

Analyse numérique : mini-projet
Minimisation de variation totale et calcul de surfaces minimales
Antonin Chambolle antonin.chambolle@polytechnique.edu

1 Introduction

On se propose de comparer des techniques de minimisation de la variation totale et de calcul d'ensembles qui minimisent leur surface (comme nous ne travaillerons qu'en dimension 1 ou 2, il s'agira essentiellement de points, ou de courbes qui minimisent leur longueur).

La variation totale, d'un point de vue naïf, est la fonction

$$J : u \mapsto \int_{\Omega} |\nabla u| dx$$

où u est une fonction définie sur l'ouvert Ω (en pratique : un segment ou un rectangle), et ∇u son gradient.

Elle a été introduite en statistique puis en traitement d'images dans le but de "régulariser" des données bruitées ou dégradées, suivant le modèle simplifié suivant : on cherche un signal $u(x)$ "régulier par morceaux" et on observe $u(x) + n(x)$ où $n(x)$ est un "bruit" (plus simplement, une oscillation inconnue) de moyenne nulle $\int_{\Omega} n dx = 0$, et de variance $\sigma^2 = (\int_{\Omega} n^2 dx)/|\Omega|$ donnée (on suppose qu'on sait l'estimer). On espère alors retrouver u en minimisant

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \lambda \int_{\Omega} |u - g|^2 dx \quad (1)$$

où $p \geq 1$ est donné, et λ est un "multiplicateur de Lagrange" qui doit être cherché dans le but de satisfaire la contrainte $\int_{\Omega} |u - g|^2 dx = \int_{\Omega} n^2 dx = \sigma^2 |\Omega|$. [En pratique on fixera λ , pour simplifier.]

L'idée est de chercher, parmi toutes les fonctions u telles que g s'écrit $u + n$ avec $\int_{\Omega} n dx = 0$ et $\int_{\Omega} n^2 dx/|\Omega| = \sigma^2$, celles qui est "la plus régulière" au sens où un critère donné (ici $\int_{\Omega} |\nabla u|^2$) est minimal.

L'approche la plus simple consiste à choisir $p = 2$: en effet, dans ce cas, on montre facilement que le problème a une solution unique et que $g \mapsto u$ est un opérateur linéaire qui peut être résolu rapidement. (L'équation d'Euler s'écrit effectivement

$$-\Delta u + u = g \text{ dans } \Omega, \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

et correspond bien à un problème linéaire.)

Cependant, si g et u représentent le niveau de gris (ou de couleur, ou d'intensité lumineuse) d'un pixel dans une image, cette méthode souffre d'un énorme défaut : l'image reconstruite u est floue. La raison est très simple : si $p = 2$, $u \in H^1(\Omega)$. Or en dimension 1, par exemple, on sait que si $u \in H^1(a, b)$ u est 1/2-Hölderienne et donc continue. En dimension 2, on montre de même que u ne peut être discontinue à travers une ligne. Mais dans une image, le bord d'un objet est justement représenté par une discontinuité à travers une ligne : sans quoi l'objet paraît flou.

Pour toute autre valeur de $p > 1$, on peut montrer que (1) a une solution dans $W^{1,p}(\Omega)$ et à nouveau on montre que cette solution (en 1D) est continue (et “floue” en dimension supérieure).

Pour cette raison, des chercheurs ont proposé à la fin des années 80 de considérer le cas $p = 1$. Dans ce cas le problème est non-linéaire, plus compliqué à résoudre numériquement (c’est l’objet de cet exercice), et les plus matheux soulèveront une objection : si $p = 1$, n’a-t-on pas à nouveau $u \in W^{1,1}(\Omega)$, et n’avons-nous pas appris de même que les fonctions de cet espace étaient continues en dimension 1 (et de même ne peuvent être discontinues à travers une ligne en dimension 2, etc) ? Les solutions ne devraient-elles donc pas être tout aussi floues ?

Si, mais en réalité, le problème est un peu plus compliqué, au sens où pour $p = 1$, la minimisation (1) n’a en général pas de solution, ou plus précisément pas de solution dans $W^{1,1}$: par exemple, supposons $\Omega = (-1, 1)$ et $g(x) = a \times (\text{signe de } x)$, avec $a > 0$. Il est alors raisonnable de chercher une solution u croissante et impaire, comme g (ça se démontre).

Si u est croissante et impaire, alors $J(u) = \int_{-1}^1 |u'(x)| dx = \int_{-1}^1 u'(x) dx = u(1) - u(-1) = 2u(1)$. On minimise donc, parmi toutes les fonctions croissantes et impaires,

$$2u(1) + \lambda \int_{-1}^1 |u(x) - a \operatorname{sgn} x|^2 dx = 2u(1) + 2\lambda \int_0^1 |u(x) - a|^2 dx$$

Il est facile de voir qu’une fois que le problème est ainsi réécrit, la meilleure solution est donnée par $u = b \operatorname{sgn} x$ pour une constante b avec $0 \leq b \leq a$. (En effet, u étant croissante est toujours $\leq u(1)$, $b = u(1)$ doit être plus petite que a sinon la fonction $\min(u, b)$ est “meilleure”, mais si $u(x) < b$ pour un $x \in]0, 1[$, alors on peut faire descendre l’énergie en augmentant légèrement u au voisinage de x .)

Question 1 Calculer b . Que se passe-t-il quand λ devient trop petit ?

Mais voilà, cette fonction u est discontinue (si λ est assez grand), et si $u(1)$ a bien un sens, que veut-dire

$$J(u) = \int_{-1}^1 |u'(x)| dx \quad ?$$

(u n’est certainement pas dans $W^{1,1}(-1, 1)$.)

La réponse est que le minimum de (1) n’est pas atteint dans $W^{1,1}$ mais dans un espace plus gros (appelé l’espace des “fonctions à variation bornée”), qui contient des fonctions discontinues (comme notre solution u), et en dimension 2 des fonctions discontinues à travers une ligne. Cet ensemble est donc approprié pour représenter des images “nettes”.

Il se trouve que si on essaie d’approcher (par exemple par une suite u_n minimisante) la solution de (1) par des fonctions de $W^{1,1}$, la limite de ces fonctions sera toujours notre u , discontinue.

En pratique, on va toujours discrétiser le problème. On peut donc mettre à la poubelle toutes ces subtilités et considérer, en dimension 1, un problème de la forme :

$$\min_{(u_i)_{i=0}^{N-1}} \sum_{i>1} |u_i - u_{i-1}| + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} (u_i - g_i)^2 \quad (2)$$

qui a toujours une solution (mais on verra que cette solution a bien l'aspect d'une fonction "discontinue" si g est une marche comme dans l'exemple précédent).

Question 2 Pourquoi a-t-on toujours une solution à (2) ?

2 Minimisation avec scilab

La difficulté pour résoudre (2) est que le problème a une dérivée singulière. Les méthodes classiques (gradient, Newton) marchent mal.

Une approche possible est de remarquer que

$$|w| = \inf_{v>0} v \frac{|w|^2}{2} + \frac{1}{2v}$$

et de remplacer le problème par

$$\inf_{(u_i)_{i=0}^{N-1}, (v_i)_{i=1}^{N-1}} \sum_{i=1}^{N-1} v_i \frac{|u_i - u_{i-1}|^2}{2} + \frac{1}{2v_i} + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} (u_i - g_i)^2 \quad (3)$$

Une façon de résoudre ce problème consiste à minimiser alternativement la fonction par rapport à (u_i) et par rapport à (v_i) (attention, il faudrait démontrer que ces minimisations alternées convergent vers la solution, ce qui n'est pas toujours vrai, mais dans ce cas, oui).

Question 3 Ecrire l'équation vérifiée par le vecteur (u_i) . Ecrire l'équation vérifiée par le vecteur (v_i) : que se passe-t-il lorsque $u_{i+1} = u_i$?

En pratique, pour éviter que v_i prenne la valeur $+\infty$ (et pour que l'"inf" dans (3) devienne un "min") on minimise sur $v_i \in [0, 1/\epsilon]$ pour une valeur $\epsilon > 0$ fixée au préalable. Si $w = u_i - u_{i-1}$, on remplace donc $|w|$ dans l'énergie par

$$\phi_\epsilon(w) = \min_{v \in [0, 1/\epsilon]} v \frac{|w|^2}{2} + \frac{1}{2v}$$

Question 4 Calculer ϕ_ϵ . Que se passe-t-il quand $\epsilon \rightarrow 0$? Résoudre le problème avec scilab (par minimisations alternées en u et v), pour différentes valeurs de ϵ . Discuter.

Remarque : on prendra pour g : une marche (une fonction discontinue avec deux valeurs), une sinusoïde, une marche à laquelle un bruit a été ajouté.

3 Dimension 2

En dimension 2, la même méthode est utilisée pour débruiter des images. Nous allons tester une autre application. On considère une goutte d'eau posée sur une surface rugueuse, hydrophobe. La goutte d'eau est représentée par un ensemble E , la surface par le bord supérieur d'un ensemble S , on a $E \cap S = \emptyset$. L'énergie du système (après renormalisation), est une énergie de surface portée par le bord de E ("tension superficielle"). Elle est donnée par

$$\text{surface de } (\partial E \setminus \overline{S}) + \sigma \times \text{surface de } (\partial E \cap \partial S)$$

où $\sigma \leq 1$ est un coefficient “de mouillage” de S (qui ne dépend que du matériau). Si $\sigma < 1$, on voit que le système “préfère” (i.e., abaisse son énergie) que la goutte soit collée à S (car la surface libre, non collée à S , a une énergie supérieure).

On va s’intéresser à un système bidimensionnel (qu’on résoudra avec `freefem++`). Dans un rectangle $R = (0, 1) \times (0, H)$, on va définir $S = \{(x, y) : y < h(x)\}$ où h est une fonction (continue, ou s.c.i.) et $H > \sup_{[0,1]} h$. On appelle $\Gamma = (0, 1) \times \{H\}$ le bord supérieur du rectangle et on va supposer que la goutte E contient toujours Γ (plus précisément, on peut voir $E \subset R$ comme une “fraction” du bord inférieur de la goutte, qui contient Γ , et on va chercher à calculer la forme de son contact avec la surface ∂A). On pose $\Omega = R \setminus \overline{S}$.

On va chercher à minimiser (numériquement)

$$\text{surface de } (\partial E \cap \Omega) + \sigma \times \text{surface de } (\partial E \cap \partial S) \quad (4)$$

parmi tous les $E \subset \Omega$ avec $\overline{E} \supset \Gamma$.

Question 5 Si S est plat ($h = \text{constante}$), quelle va être la solution si $\sigma < 1$? Y a-t-il unicité si $\sigma = 1$?

L’idée est que si h est assez chahutée, E a intérêt à toucher S (on suppose $\sigma < 1$), puisque la longueur de son bord “coûte” alors moins cher, mais pas forcément à aller remplir les “creux” de ∂S (car alors il faut payer toute la longueur du bord de ∂S , qui même multipliée par $\sigma < 1$ peut être plus longue qu’un segment “sautant” au dessus du creux, voir figure 1).

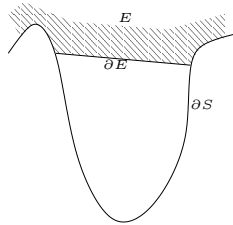


FIG. 1 – Exemple de configuration possible

On peut montrer que la solution de (4) peut être calculée en cherchant u qui minimise

$$\min_{u=1 \text{ sur } \Gamma} \int_{\Omega} |\nabla u| + \sigma \int_{\partial S} |u|. \quad (5)$$

Sur $\{0\} \times (h(0), H)$ et $\{1\} \times (h(1), H)$, on pourra mettre des conditions de Neumann, périodiques (avec $h(1) = h(0)$ dans ce cas), ou encore de Dirichlet ($u = \chi_{E_0}$ où E_0 est un ensemble donné sur le bord, avec bien sûr $\chi_{E_0} = 1$ en $y = H$ pour respecter la contrainte $u = 1$ sur Γ).

La raison heuristique pour laquelle on peut se ramener au problème convexe (5) est la suivante. Notons $\mathcal{E}(u)$ l’énergie dans (5), et par abus de notation, pour E un ensemble, on note $\mathcal{E}(E)$ (qui est en fait $\mathcal{E}(\chi_E)$) l’énergie (4). On peut montrer facilement

que

$$\mathcal{E}(\max(0, \min(1, u))) \leq \mathcal{E}(u)$$

et donc on peut se restreindre aux fonctions u comprises entre 0 et 1. Introduisons l'ensemble de fonctions

$$V := \{u \in C^1(\Omega) ; 0 \leq u \leq 1 \text{ et } u = 1 \text{ sur } \Gamma\}$$

Pour toute $u \in V$ et tout $0 \leq \gamma \leq 1$ définissons

$$E(u, \gamma) := \{z \in \Omega ; u(z) \geq \gamma\}.$$

notons que $\Gamma \subset E(u, \gamma) \subset \Omega$. On peut montrer que pour tout $u \in V$,¹

$$\int_{\Omega} |\nabla u| = \int_0^1 \text{surface}(\partial E(u, \gamma) \cap \Omega) d\gamma \quad \text{et} \quad \int_{\partial S} u = \int_0^1 \text{surface}(\partial E(u, \gamma) \cap \partial S) d\gamma$$

de sorte que

$$\mathcal{E}(u) = \int_0^1 \mathcal{E}(E(u, \gamma)) d\gamma \tag{6}$$

Formellement, $\mathcal{E}(u)$ est minimale si $\mathcal{E}(E(u, \gamma))$ est minimale pour tout $0 \leq \gamma \leq 1$. Il s'ensuit que $E(u_*, \gamma) = E_*$ pour tout $0 \leq \gamma \leq 1$, et donc que u_* est la fonction indicatrice de E_* .

4 Calcul avec FreeFem++

Pour calculer (5) on va utiliser **FreeFem++**.

On doit d'abord définir un maillage du domaine Ω , de pas approximatif de discrétisation $\eta > 0$. Il faut utiliser correctement la commande `border` pour définir le bord inférieur du domaine comme le graphe de la fonction h . Attention de mettre assez de points sur ce bord (on pourra éventuellement définir un premier maillage et utiliser `adaptmesh` pour le "régulariser" un peu).

Ensuite, on introduit l'espace V_η d'éléments finis P1 sur ce maillage. Le but est alors de résoudre

$$\min_{u \in V_\eta} \int_{\Omega} |\nabla u| + \sigma \int_{\partial S} |u|$$

avec la contrainte $u = 1$ sur Γ . Comme le problème est non linéaire (avec encore des valeurs absolues), on utilise le "truc" introduit en dimension 1 : on va introduire $\epsilon > 0$, $v : \Omega \rightarrow [0, 1/\epsilon]$, $w : \partial S \rightarrow [0, 1/\epsilon]$ et remplacer le problème par

$$\min_{u, v, w} \int_{\Omega} v \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{1}{2v} + \sigma \int_{\partial S} w \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2w}$$

sous contrainte $u = 1$ sur Γ , $v, w \leq 1/\epsilon$.

Question 6 Dans quel espace est-il le plus approprié de choisir v ? (Quel type d'élément finis?) Ecrire un programme qui résout ce problème et essayer différents profils h . On pourra adapter progressivement le maillage à la solution calculée.

¹La première égalité est en fait assez difficile en général, mais très facile dans un cas, celui où u est une fonction continue, affine par morceaux.