

Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 431

L'équation de la chaleur relativiste

sujet proposé par F. Coquel

coquel@cmapx.polytechnique.fr

La modélisation de la conduction de la chaleur par la loi de Fourier conduit à une équation parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad (1)$$

dont la propriété de propagation à vitesse infinie est en contradiction avec la théorie de la relativité. A la fin des années cinquante, certains physiciens ont proposé sur la base de raisonnements liés à la relativité d'abandonner la loi précédente au profit d'une loi de nature hyperbolique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (2)$$

baptisée équation relativiste de conduction de la chaleur. Ici, $\epsilon > 0$ désigne un paramètre réel fixe. Il s'agit d'un temps caractéristique du milieu physique étudié, il est notamment lié à la vitesse du son des phonons.

De manière centrale, le temps caractéristique ϵ n'est pas nul mais il est en général **très petit**. Afin de souligner le rôle de la petitesse de ce temps caractéristique, rapportons que les solutions u de l'équation (2) ainsi leur dérivée en temps $\frac{\partial u}{\partial t}$ décroissent exponentiellement vite vers zéro lorsque le temps t tend vers l'infini. Nous renvoyons à un résultat admis du cours (p 267, Chapitre 8 du livre de cours). Il se trouve que la vitesse de convergence est d'autant plus grande que le temps caractéristique ϵ est petit. En d'autres termes plus ϵ est petit, plus vite le comportement asymptotique est atteint.

On suggère dans une première partie d'illustrer par le calcul scientifique le rôle du terme $\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial t}$ dans l'équation (2) en se restreignant au cas de la dimension deux d'espace. Il s'agit donc de mettre en évidence par le calcul que ce terme est un terme d'amortissement dans la force de freinage est proportionnelle à l'inverse de ϵ .

La seconde partie du projet est motivée par la propriété profonde que l'équation de la chaleur (1) (au moins dans le cadre simplifié d'une seule variable d'espace) permet de décrire l'évolution en temps grand de la dérivée en espace $\frac{\partial u}{\partial x}$ des solutions u de la version relativiste (2). Etablir formellement ce lien asymptotique est simple et permettra de comprendre comment passer de (2) à (1) pour des temps T d'autant plus courts que le temps caractéristique ϵ dans (2) est petit.

On abordera alors une difficulté numérique génériquement rencontrée lorsque l'on souhaite capturer la bonne relation asymptotique liant (1) et (2) en approchant directement les solutions de (2) pour des raffinements en espace réalistes, à savoir avec $\epsilon/\Delta x$ petits pour les pas d'espace Δx considérés.

1 Partie 1 : calcul scientifique en deux dimensions d'espace

Afin de motiver la discussion à mener, il est intéressant de rapprocher la forme de l'équation (2) de celle obtenue par Oliver Heaviside en 1880 pour décrire à l'aide des équations de Maxwell la transmission des fréquences radio dans un télégraphe :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0. \quad (3)$$

Les fondements physiques des modèles (2) et (3) sont évidemment très différents mais la forme de l'équation du télégraphe est identique à celle de l'équation de la chaleur relativiste (2). Ce qui les distingue de manière essentielle est la taille du temps caractéristique impliqué. Ainsi, la constante de temps ν de l'équation du télégraphe est de plusieurs ordres de grandeur supérieur au temps caractéristique ϵ associée à (2) : *i.e.* $\epsilon/\nu \ll 1$.

Envisager formellement la limite $\epsilon/\nu \rightarrow 0^+$, à savoir ν tend vers l'infini à $\epsilon > 0$ fixé, suggère qu'au moins pour les temps physiques $t \in [0, T]$ où $T > 0$ désigne un temps court, le comportement des solutions de l'équation du télégraphe (3) est plus proche de celui des solutions de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad (4)$$

que du comportement des solutions de (2). En d'autres termes, les aspects propagatifs sont plus longtemps perceptibles dans les solutions de (3) que dans les solutions de l'équation de la chaleur relativiste (2). Rappelons qu'en revanche les solutions de (2) et (3) ont bien évidemment le même comportement asymptotique en temps long : elles convergent toutes deux vers zéro contrairement aux solutions de l'équation des ondes.

On se propose d'illustrer numériquement ces deux types de comportement en fonction de la taille de ν et du temps T d'observation à l'aide du logiciel de calcul FreeFem++.

1) *Analyse numérique.* La stratégie numérique que l'on adopte suit étroitement la méthode numérique décrite en section 8.7, chapitre 8, du livre du cours. Ainsi la semi-discrétisation en espace introduite au paragraphe 8.7.1 reste inchangée et conduit dans le contexte des équations hyperboliques de la forme (3) à devoir intégrer en temps un système d'équations différentiels du second ordre à coefficients constants. La discrétisation en temps requise est menée en adoptant le schéma de Newmark décrit au paragraphe 8.7.2. Proposer une analyse de Von Neumann de ce schéma pour les équations des ondes amorties, analogue à celle proposée au lemme 8.7.1 du Chapitre 8 dans le cadre sans amortissement.

2) *Implémentation :* Modifier le script FreeFem++, *ondes.edp*, disponible sur la page de Pr. Grégoire Allaire, conformément au choix numériques décrits à la question précédente. Le choix des paramètres δ et θ du schéma de Newark doit pouvoir être modifié selon les exigences de précision de la discrétisation en temps, conformément aux résultats de stabilité obtenus au titre de la précédente analyse de von Neumann.

3) *Illustration numérique :* on considère le problème de la propagation amortie d'une onde sphérique dans une cavité carrée sur les parois de laquelle elle se réfléchit. Le détail de ce problème est exposé p 279, Chapitre 8, dans le cas de l'équation des ondes (4) sans amortissement. On

demande de comparer la norme euclidienne du vecteur ∇u de la solution approchée à différents temps physiques T pour différentes tailles de la constante de temps ν entrant dans l'équation (3), conformément aux objectifs de cette première partie. On pourra typiquement considérer trois tailles différentes de temps caractéristiques ν : ν de l'ordre de 10^{-2} , de 1 et enfin de 10^2 puis accorder la taille du temps physique T en proportion.

2 Partie 2 : Un lien asymptotique entre l'équation de la chaleur relativiste et sa version classique

Par simplicité, on restreint l'étude à une seule variable d'espace en considérant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

On suppose dans toute la suite que les solutions considérées sont autant régulières que souhaitées.

– 4) Soit u une solution régulière de (5). Vérifier que les fonctions définies par

$$v = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6)$$

sont solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\epsilon} w. \end{cases} \quad (7)$$

– 5) En introduction, nous avons rapporté que les solutions u de l'équation (5) ainsi que leur dérivées en temps $\frac{\partial u}{\partial t}$ tendent vers 0 lorsque le temps t tend vers l'infini. Le changement de fonctions introduit en (6) implique donc que la composante w d'une solution (v, w) de (7) tend vers 0 en temps infini. Notre objectif est de préciser le comportement de w en temps grands pour en déduire celui de v . A cette fin, on commence par introduire un nouveau temps s défini par :

$$s = \epsilon t, \quad (8)$$

pour ensuite définir les nouvelles fonctions :

$$v_\epsilon(x, s) = v(x, t), \quad p_\epsilon(x, s) = \epsilon w(x, t), \quad (9)$$

où (v, w) est solution des équations (7). Vérifier que v_ϵ et p_ϵ satisfont :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_\epsilon}{\partial s} + \frac{\partial p_\epsilon}{\partial x} = 0, \\ \epsilon^2 \frac{\partial p_\epsilon}{\partial s} + \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x} = -p_\epsilon. \end{cases} \quad (10)$$

Déduire de ce qui précède qu'au second ordre près en ϵ , v_ϵ et p_ϵ satisfont :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_\epsilon}{\partial s} - \frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x^2} = 0, \\ p_\epsilon = -\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x}. \end{cases} \quad (11)$$

En d'autres termes et à $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ près, v_ϵ est solution de l'équation de la chaleur et p_ϵ évolue selon la dérivée en espace de v_ϵ . Afin de simplifier les notations on omet à l'avenir l'indice ϵ .

On propose d'examiner le comportement de quelques schémas aux différences finies pour les équations (7) en lien avec l'asymptotique exhibée en (11). On envisage à cette fin des discrétisations de (7) explicites en temps de la forme :

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{w_{j+1/2}^n - w_{j-1/2}^n}{\Delta x} = 0, \\ \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1/2}^n - v_{j-1/2}^n}{\Delta x} = -\frac{1}{\epsilon} w_j^{n,*}, \end{cases} \quad (12)$$

où $\Delta t > 0$ et $\Delta x > 0$ désignent respectivement un pas de temps et d'espace constants. Ici, $w_{j+1/2}^n$ et $v_{j+1/2}^n$ désignent deux fonctions flux numériques. On propose deux choix dans la suite.

– 6) Le premier choix de schéma repose sur l'écriture équivalente suivante des équations (7) :

$$\begin{cases} \frac{\partial(w+v)}{\partial t} + \frac{\partial(w+v)}{\partial x} = -\frac{1}{\epsilon} w, \\ \frac{\partial(w-v)}{\partial t} - \frac{\partial(w-v)}{\partial x} = -\frac{1}{\epsilon} w. \end{cases} \quad (13)$$

En négligeant le terme de relaxation w/ϵ , on observe que la quantité $(w+v)$ est transportée à la vitesse positive $+1$ alors $(w-v)$ est transportée à la vitesse négative -1 . Dès lors, une approximation décentrée amont de chacune de ces quantités, menée indépendamment du terme de relaxation, conduirait conformément au cours à adopter les formules suivantes :

$$(w+v)_{j+1/2}^n = w_j^n + v_j^n, \quad (w-v)_{j+1/2}^n = w_{j+1}^n - v_{j+1}^n, \quad (14)$$

soit en revenant aux variables v et w :

$$w_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(w_j^n + w_{j+1}^n) - \frac{1}{2}(v_{j+1}^n - v_j^n), \quad v_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j+1}^n) - \frac{1}{2}(w_{j+1}^n - w_j^n). \quad (15)$$

On définit alors :

$$w_j^{n,*} = w_j^n. \quad (16)$$

Proposer une analyse de stabilité à la von Neumann du schéma résultant.

- 7) L'analyse en temps grand t^n de ce schéma est menée à Δt et Δx fixés (sous la condition de stabilité obtenue au titre de l'analyse précédente) en développant formellement en ϵ les équations discrètes (12)–(15)–(16). Conformément au changement d'échelle de temps introduit en (8) puis de fonctions en (9), on pose $\Delta s = \epsilon \Delta t$ puis $p_j^n = \epsilon w_j^n$. Vérifier alors que la seconde équation de (12)–(15) conduit à :

$$p_j^n = -\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (17)$$

de sorte qu'après substitution dans la première équation, nous avons au premier ordre près en ϵ :

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta s} - \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{2\epsilon\Delta x} - \frac{v_{j+2}^n - 2v_j^n + v_{j-2}^n}{2\Delta x^2} = 0. \quad (18)$$

En remarquant que ces formules aux différences sont consistantes avec

$$\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{\Delta x}{2\epsilon} + 1\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (19)$$

déduire qu'il faut choisir Δx avec $\Delta x/\epsilon$ petit si l'on souhaite approcher convenablement l'asymptotique (11). Une telle condition est bien sûr irréaliste dans les applications à l'équation de la chaleur relativiste.

- 8) Une approche élémentaire fait reposer le second schéma sur les solutions stationnaires des équations (7), à savoir en variables $(w + v)$ et $(w - v)$:

$$\frac{\partial(w + v)}{\partial x} = -\frac{1}{\epsilon}w, \quad -\frac{\partial(w - v)}{\partial x} = -\frac{1}{\epsilon}w. \quad (20)$$

Respecter la condition de décentrement dans l'intégration de ces équations différentielles revient à intégrer la première EDO de x_j à $x_{j+1/2}$ avec pour donnée initiale $(w_j^n + v_j^n)$ en x_j puis la seconde EDO de manière rétrograde de x_{j+1} à $x_{j+1/2}$ avec pour donnée initiale $(w_{j+1}^n - v_{j+1}^n)$ en x_{j+1} . Ces considérations permettent de considérer :

$$(w+v)_{j+1/2}^n - (w_j^n + v_j^n) = -\frac{\Delta x}{2\epsilon}w_{j+1/2}^n, \quad (w-v)_{j+1/2}^n - (w_{j+1}^n - v_{j+1}^n) = -\frac{\Delta x}{2\epsilon}w_{j+1/2}^n, \quad (21)$$

soit de définir

$$\begin{cases} w_{j+1/2}^n = \frac{2\epsilon}{(\Delta x + 2\epsilon)} \left(\frac{1}{2}(w_j^n + w_{j+1}^n) - \frac{1}{2}(v_{j+1}^n - v_j^n) \right), \\ v_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j+1}^n) - \frac{1}{2}(w_{j+1}^n - w_j^n). \end{cases} \quad (22)$$

On pose conformément au principe de construction (21) :

$$w_j^{n,*} = \frac{1}{2}(w_{j-1/2}^n + w_{j+1/2}^n). \quad (23)$$

Proposer une analyse à la von Neumann du schéma résultant. Vérifier que le choix du flux $w_{j+1/2}^n$ en (22) conduit au développement formel :

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta s} - \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{\Delta x}\right), \quad (24)$$

où dans la pratique $\epsilon/\Delta x$ est négligeable. Ces formules aux différences réalisent donc une discrétisation consistante de l'équation de la chaleur attendue pour v .

- 9) On souhaite évaluer les performances des deux précédents schémas à l'approximation des solutions de (10) sur l'intervalle $]0, 1[$. Les conditions aux limites sont choisies périodiques et on adopte pour données initiales :

$$v(0, x) = 2 + \sin(2\pi x), \quad w(0, x) = -0.1. \quad (25)$$

On choisira successivement $\epsilon = 0.01$ puis $\epsilon = 0.001$. On approche la solution des deux problèmes considérés en fixant le pas d'espace à la valeur constante $\Delta x = 0.01$. On comparera les solutions discrètes obtenues en implémentant en SCILAB les schémas proposés.