

# Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 431

Propagation de signaux dans les fibres optiques

*sujet proposé par M. Gazeau*

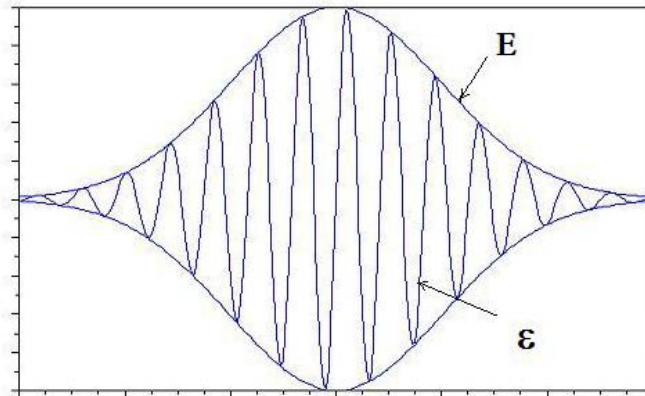
`gazeau@cmapx.polytechnique.fr`

La propagation stable de signaux lumineux dans les fibres optiques a engendré d'importantes applications dans le domaine des télécommunications, notamment transatlantiques. Le but de ce projet est d'étudier la propagation de tels signaux à l'aide de l'équation de Schrödinger non linéaire.

Si  $\mathcal{E}$  est le champ électrique de l'onde lumineuse, supposée localisée en fréquence, on note  $E(z, t)$  son enveloppe complexe lentement variable, c'est à dire que l'on pose

$$\mathcal{E} = \text{Re}\{E(z, t)e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}\},$$

où  $z$  représente la coordonnée le long de la fibre (celle-ci est supposée de section négligeable), et  $t$  est le temps. Ici,  $k_1$  est le nombre d'onde et  $\omega_1$  est la fréquence de l'onde porteuse.



Dans une fibre à effet Kerr, l'indice de réfraction dépend de manière affine du carré de l'amplitude du champ  $|E|^2$ . Si l'on regarde la propagation sur de longues distances  $z$ , l'évolution de  $E$  est alors bien approchée par l'équation

$$i\partial_z E + \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + |E|^2 E = 0,$$

où  $E$ ,  $z$  et  $t$  ont été normalisés.

Le signal étant injecté à l'entrée  $z = 0$  de la fibre et se propageant dans la direction  $z > 0$ , on préfère réécrire cette équation sous la forme mathématiquement plus agréable :

$$(1) \quad i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = 0,$$

où  $u(t, x)$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , à laquelle on adjoint la condition initiale (correspondant au signal à l'entrée de la fibre)  $u(0, x) = u_0(x)$ . Pour simplifier, on supposera que  $x \in \mathbb{R}$  et les solutions considérées (ainsi que leurs dérivées) seront supposées tendre vers 0 à l'infini en  $x$ .

## 1. ETUDE ET RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION LINÉAIRE

On commence par considérer l'équation suivante, valable lorsque l'amplitude du champ électrique reste petite :

$$(2) \quad \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

1. On suppose qu'à tout instant  $t$  la solution de (1) admet une transformée de Fourier en espace, notée  $\hat{u}(t, \xi)$  pour  $\xi \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$(3) \quad \hat{u}(t, \xi) = e^{-it\xi^2} \hat{u}_0(t, \xi), \quad \forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

En déduire que  $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$  pour tout  $t \geq 0$ .

2. Montrer que si  $u_0(x) = e^{-x^2}$  alors la solution de l'équation (2) est

$$(4) \quad u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1+4it}} e^{-\frac{x^2}{1+4it}}$$

où  $\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$  pour  $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ .

3. En vue de simuler numériquement l'équation (2), on remplace  $x \in \mathbb{R}$  par  $x \in [-a, a]$ ,  $a > 0$  et on rajoute les conditions aux limites de Dirichlet (artificielles)  $u(a) = u(-a) = 0$ .

**a-** Ecrire un programme en Scilab, à l'aide d'un schéma aux différences finies explicite en temps, permettant de calculer la solution approchée de (2). On prendra une discrétisation uniforme des intervalles de temps et d'espace. Ce programme devra prendre pour paramètres d'entrée la borne supérieure  $a$  de l'intervalle d'espace, le nombre de points de discrétisation en  $x$ , le temps final  $T$  et le paramètre  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  où on a noté  $\Delta t$  le pas de temps et  $\Delta x$  le pas d'espace.

**b-** Mettre en évidence numériquement le caractère instable du schéma en traçant sur un même graphique la solution calculée à la question précédente et la solution exacte de la question 2. On utilisera plusieurs valeurs des paramètres d'entrée. Retrouver théoriquement ce résultat par l'analyse de Fourier en calculant le facteur d'amplification du schéma.

**4.a-** Reprendre la question **3.a** en remplaçant le schéma explicite en temps par le schéma de Crank-Nicholson, et tracer la solution; montrer par l'analyse de Fourier que pour tout  $n$ ,

$$\sum_j |v_j^n|^2 = \sum_j |v_j^0|^2$$

où  $v_j^n$  est la valeur approchée de  $u(t_n, x_j)$ . A quoi correspond cette égalité ? Qu'en déduit-on ?

**b-** Visualiser la partie réelle de la solution pour différentes valeurs du paramètre  $r$ . Qu'observe-t'on ?

**c-** Effectuer des simulations sur un temps  $T$  suffisamment long (par exemple  $T = 5$  pour  $a = 5$ ) et commenter la différence avec la solution exacte.

## 2. L'ÉQUATION NON LINÉAIRE

**1.a-** Soit  $u$  une solution de (1) supposée régulière (et tendant vers 0 rapidement à l'infini, ainsi que ses dérivées). En multipliant (1) par  $\bar{u}$  et en intégrant sur  $\mathbb{R}$ , montrer que l'on a encore  $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$  pour tout  $t$ .

**b-** En multipliant cette fois l'équation par  $\partial\bar{u}/\partial t$  et en intégrant sur  $\mathbb{R}$ , montrer de manière similaire la conservation de l'énergie :  $E(t) = E(0)$  où

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} |u|^4 dx.$$

**2.** On cherche une solution de (1) de la forme

$$u(t, x) = \varphi(x - ct)e^{i(kx - \omega t)},$$

où  $\varphi$  est une fonction à valeurs positives qui décroît rapidement vers 0 à l'infini (une telle solution est appelée un "soliton").

**a-** Montrer que si  $c = 2k$  et si on pose  $\alpha = k^2 - \omega$ , alors  $u$  est solution de (1) si  $\varphi$  vérifie l'équation différentielle

$$\varphi'' - \alpha\varphi + \varphi^3 = 0.$$

**b-** On suppose  $\alpha > 0$ ; en multipliant cette équation par  $\varphi'$  et en supposant que  $\varphi$  et ses dérivées tendent vers 0 rapidement à l'infini, montrer que

$$(5) \quad \varphi(\xi) = \pm \frac{\sqrt{2\alpha}}{\text{ch}(\sqrt{\alpha}\xi)}.$$

(On pourra chercher une équation vérifiée par  $1/\varphi$ ). Expliquer l'intérêt de telles solutions pour la transmission dans les fibres optiques.

**3.** On veut maintenant calculer des solutions approchées de l'équation (1). On considère pour cela le schéma suivant :

$$(6) \quad i \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2(\Delta x)^2} (v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1} + v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \\ + \frac{1}{4} (|v_j^n|^2 + |v_j^{n+1}|^2)(v_j^n + v_j^{n+1}) = 0$$

avec toujours les conditions de Dirichlet  $v_0^n = v_{N+1}^n = 0$ , pour tout  $n$ .

**a-** Montrer que si on pose  $V^n = (v_1^n, v_2^n, \dots, v_N^n)^t \in \mathbb{C}^N$ , le schéma (6) s'écrit

$$(7) \quad AV^{n+1} = BV^n + F(V^n, V^{n+1})$$

où l'on précisera les matrices  $A$  et  $B$  de taille  $N$  et le vecteur  $F(V^n, V^{n+1}) \in \mathbb{C}^N$ .

**b-** La mise en oeuvre du schéma non linéaire (6) nécessite à chaque itération la résolution d'un système algébrique non linéaire. Pour cela, on utilise une méthode de point fixe : on calcule à chaque pas de temps une suite d'itérées  $(W_l)_{l \geq 0}$  définies par :

$$W^0 = V^n, \quad AW^{l+1} = BV^n + F(V^n, W^l), \forall l \geq 0.$$

Si cette suite, obtenue par résolution de systèmes linéaires converge dans  $\mathbb{C}^N$  alors elle converge vers la solution du problème (7). Ecrire un programme en Scilab, qui permet de calculer la solution approchée en un temps final  $T$ , à l'aide du schéma (6) et de la méthode de point fixe précédente. On pourra utiliser comme critère d'arrêt le critère

$$\frac{\max_j |w_j^{l+1} - w_j^l|}{\max_j |w_j^1 - v_j^n|} < \varepsilon_0$$

où  $\varepsilon_0$  est un petit paramètre par exemple ( $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ ).

**c-** Tester le programme précédent sur la propagation de solitons : en notant  $\varphi_\alpha$  la solution de (5), on calculera la solution correspondant à  $u_0(x) = \varphi_\alpha(x - x_0)e^{ikx}$  pour  $k = 0, 1, 2$ , et différentes valeurs de  $\alpha$  (on pourra prendre  $\alpha$  entre 1 et 10); on ajustera le paramètre  $x_0$  pour que le soliton reste plus longtemps dans la fenêtre de calcul. On tracera à chaque fois le module de la solution. Commenter.

**d-** Exécuter le programme en prenant pour donnée initiale  $u_0(x) = 2e^{-x^2}$ , et tracer

en fonction de  $n$  les quantités  $M_n = \sum_{j=0}^{N+1} |v_j^n|^2$  et

$$E_n = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N+1} \left| \frac{1}{\Delta x} (v_{j+1}^n - v_j^n) \right|^2 - \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{N+1} |v_j^n|^4.$$

Qu'observe-t'on ? interpréter. Essayer d'intuiter de quoi peut être proche la solution au temps final.