

Adaptation de maillage pour les éléments finis.

Jean-Marie Mirebeau, mirebeau@ann.jussieu.fr

23 novembre 2010

Résumé

Lors de la résolution d'Equations aux Dérivées Partielles par la méthode des éléments finis, la qualité des résultats obtenus dépend fortement du maillage utilisé pour la discrétisation du domaine. Dans ce sujet nous nous restreignons à l'EDP la plus simple posée sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} -\Delta f = \varphi & \text{sur } \Omega \\ f = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.1)$$

nous la discrétisons à l'aide des éléments finis de degré 1. Le travail portera sur l'étude et la construction d'un maillage permettant d'obtenir la meilleure approximation de la solution pour un coût en temps de calcul donné.

La partie §1 précise ces objectifs. Dans la partie §2 nous étudions l'optimisation de maillage dans le cadre des triangulations isotropes : les triangles sont contraints à ne pas être trop fins (Figure 1b). La partie §3 aborde l'optimisation anisotrope de maillage, un domaine de recherche encore largement ouvert, où les formes des triangles ne sont plus contraintes (Figure 1c).

1 Motivations et objectifs

Pour fixer les idées nous choisissons le domaine $\Omega :=]0, 1[^2 \setminus]\frac{1}{2}, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ qui est illustré sur la Figure 1. Nous notons $H = H_0^1(\Omega)$, c'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire et de la norme ci dessous

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} \nabla f \nabla g \quad \text{et} \quad \|f\| := \sqrt{\langle \nabla f, \nabla f \rangle} = \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.2)$$

Nous supposons désormais que $\varphi \in L^2(\Omega)$. Pour tout sous espace vectoriel fermé V de H on définit le problème

$$\text{Pb}_1(V) : \text{trouver } f_V \in V \text{ tel que } \forall g \in V, \langle f_V, g \rangle = \int_{\Omega} \varphi g. \quad (1.3)$$

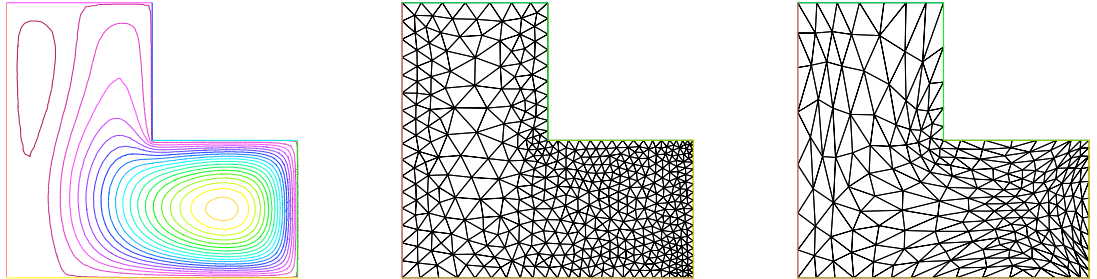


FIGURE 1 – (a) Une solution du problème (0.1), (b) une triangulation isotrope et (c) une triangulation anisotrope qui lui sont adaptées.

Question 1 Montrer que si V est fermé, alors $\text{Pb}_1(V)$ admet une unique solution f_V . Nous notons f_H , la solution associée à l'espace entier H , qui est aussi la solution du problème initial (0.1). Montrer que pour tout sous espace fermé V de H ,

$$\|f_H - f_V\| \leq \inf_{f \in V} \|f_H - f\|.$$

Si V est de dimension finie N et muni d'une base $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$, on définit une matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$ et un vecteur $\Phi \in \mathbb{R}^N$ par

$$A_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle \quad \text{et} \quad \Phi_i := \int_{\Omega} \varphi v_i \quad (1.4)$$

Question 2 Posons

$$F^V := A^{-1} \Phi \in \mathbb{R}^N. \quad (1.5)$$

Montrer que $f_V = \sum_{1 \leq i \leq N} F_i^V v_i$.

Soit $\mathcal{T}$ une triangulation conforme de Ω (on dit qu'une triangulation est conforme si aucun sommet de triangle ne se trouve à l'intérieur de l'arête d'un autre triangle). Désormais V désigne l'espace des éléments finis sur $\mathcal{T}$ de degré 1

$$V = V(\mathcal{T}) := \{f \in H_0^1(\Omega) ; \forall T \in \mathcal{T}, f|_T \text{ est affine} \}.$$

Noter que si $f \in V$, alors f est continue sur Ω et nulle sur $\partial\Omega$. On note e_i , $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, les sommets de $\mathcal{T}$ intérieurs à Ω , et ψ_i la fonction de $V(\mathcal{T})$ définie par

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \psi_i(e_j) = \delta_{i,j} \quad (1.6)$$

La base de V que nous utiliserons est la suivante.

$$v_i := \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|}. \quad (1.7)$$

Deux sommets de $\mathcal{T}$ sont dits voisins s'ils sont identiques ou liés par une arête de la triangulation $\mathcal{T}$. On note $\nu(\mathcal{T})$ le nombre maximal de voisins d'un sommet de $\mathcal{T}$.

Question 3 Montrer que $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$ si les sommets e_i et e_j ne sont pas voisins.

Montrer que

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \sum_{1 \leq j \leq N} |A_{i,j}| \leq \nu(\mathcal{T})$$

et en déduire que la plus grande valeur propre λ_M de A vérifie $\lambda_M \leq \nu(\mathcal{T})$.

On peut montrer qu'il suffit alors de $\mathcal{O}(\nu(\mathcal{T})N^2)$ opérations élémentaires pour inverser le système (1.5). La constante $\nu(\mathcal{T})$ ne joue pas un grand rôle car nous verrons à la question 4 comment la borner. Par ailleurs si N_b est le nombre de sommets de $\mathcal{T}$ sur $\partial\Omega$ on montre à l'aide de la formule d'Euler que $N = \frac{\#\mathcal{T}}{2} + N_b - 1$, où $\#\mathcal{T}$ désigne le cardinal de $\mathcal{T}$. En pratique $N_b \ll N$ et donc $N \simeq \#\mathcal{T}/2$. Le nombre d'opérations élémentaires est donc $\mathcal{O}(\#\mathcal{T}^2)$.

Pour une fonction f_* donnée et un entier N_0 , considérons le problème (posé de façon heuristique) suivant

$$\begin{aligned} \text{Pb}_2(N_0, f_*) : & \text{ Parmi les triangulations } \mathcal{T} \text{ de } \Omega \text{ vérifiant } \#\mathcal{T} \leq N_0 \\ & \text{trouver celle qui minimise } \inf_{f \in V(\mathcal{T})} \|f_* - f\|. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dans les parties §2.2 et §3.2 nous verrons comment résoudre (approximativement) ce problème, au sein des triangulations isotropes et anisotropes respectivement.

Pour obtenir la meilleure approximation de f_H pour un coût en calcul M donné, il faudrait appliquer la méthode des éléments finis sur la triangulation solution de $\text{Pb}(\sqrt{M}, f_H)$. Malheureusement pour construire cette triangulation il faudrait déjà connaître f_H ! Les programmes d'adaptation de maillage proposés dans ce sujet contournent cette difficulté à l'aide d'une approche itérative.

2 Triangulations adaptatives isotropes

Cette partie est consacrée aux triangulations isotropes, i.e. dont les triangles ne sont pas trop fins (Figure 1b). Cette idée est quantifiée comme suit : pour tout triangle T on définit son excentricité

$$\rho(T) := \frac{\text{diam}(T)^2}{2|T|}.$$

Nous rappelons que le diamètre d'un triangle est la longueur de son plus grand côté. L'excentricité $\rho(T)$ prend sa valeur minimale $\frac{2}{\sqrt{3}}$ sur les triangles équilatéraux, et est d'autant plus grande que le triangle T est "fin".

Definition 2.1 *Un maillage $\mathcal{T}$ de Ω est C -isotrope si et seulement si $\rho(T) \leq C$ pour tout $T \in \mathcal{T}$.*

Question 4 *Soit T un triangle et θ un de ses angles, montrer que $\rho(T) \sin \theta \geq 1$. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation C_* -Isotrope de Ω , majorer $\nu(\mathcal{T})$ en fonction de C_* .*

Question 5 *Soit T un triangle, soit a la longueur d'un de ses côtés et h la longueur d'une de ses hauteurs. Montrer que $a\rho(T) \geq \text{diam}(T)$ et $h\rho(T) \geq \text{diam}(T)$.*

2.1 Taille locale des éléments d'une triangulation

Dans cette partie nous présentons un programme et des théorèmes qui permettent à partir d'une fonction h donnée sur Ω , de construire une triangulation C -isotrope $\mathcal{T}$ de Ω où le diamètre de chaque triangle $T \in \mathcal{T}$ est dicté par la valeur de h sur T . Comme des triangles de diamètres très différents ne peuvent pas être accolés la fonction h doit satisfaire certaines contraintes. Définissons

$$H := \{h : \bar{\Omega} \rightarrow]0, 1] ; h \text{ est 1-Lipschitzienne}\}$$

et posons pour toute fonction $h \in H$

$$m(h) := \int_{\Omega} \frac{1}{h^2}.$$

Definition 2.2 *Une triangulation $\mathcal{T}$ de Ω est C -adaptée à une fonction $h \in H$ si pour tout $T \in \mathcal{T}$ et $z \in T$ on a*

$$C^{-1}h(z) \leq \text{diam}(T) \leq Ch(z).$$

Question 6 *Soit $\mathcal{T}$ une triangulation C_* -isotrope et C_* -adaptée à une fonction $h \in H$. Montrer que pour tout $T \in \mathcal{T}$ et $z \in T$,*

$$C^{-1}h(z)^2 \leq |T| \leq Ch(z)^2.$$

où $C = C(C_*)$. En déduire que

$$C^{-1}m(h) \leq \#\mathcal{T} \leq Cm(h).$$

Indication : Pour tout $z \in \Omega$, noter T_z le triangle de $\mathcal{T}$ contenant z et vérifier que

$$\int_{\Omega} \frac{dz}{|T_z|} = \#\mathcal{T}.$$

Des algorithmes efficaces, l'un d'eux implémenté dans FreeFem++, permettent à partir d'une fonction $h \in H$ donnée de construire une triangulation adaptée.

Programmation 7 *Créer un fichier "Projet.edp", et recopier les lignes suivantes qui décrivent le bord de Ω et en construisent une première triangulation $\mathcal{T}_h$.*

```

border b1(t=0,1.0){x=t; y=0; label=1;};
border b2(t=0,0.5){x=1; y=t; label=2;};
border b3(t=0,0.5){x=1-t; y=0.5;label=3;};
border b4(t=0.5,1){x=0.5; y=t; label=4;};
border b5(t=0.5,1){x=1-t; y=1; label=5;};
border b6(t=0.0,1){x=0; y=1-t;label=6;};

mesh Th= buildmesh (b1(6) + b2(4) + b3(4) +b4(4) + b5(4) + b6(6));
plot(Th, wait=true);

```

Si l'on souhaite que la triangulation Th soit adaptée à une fonction $h = 0.01 + |x - 1/4|/5 + y/20 \in H$, il faut ajouter les lignes suivantes. (C'est volontairement qu'on effectue deux fois la commande adaptmesh)

```

func h= 0.01 +0.2*abs(x-0.25) +0.05*y;
func metric=1/h^2;
Th=adaptmesh(Th, metric,0,metric, IsMetric=true);
Th=adaptmesh(Th, metric,0,metric, IsMetric=true);
plot(Th,wait=true, ps="pic.eps"); //l'image est enregistrée dans le fichier pic.eps

```

Choisir une autre fonction $h \in H$ et générer le maillage associé. Rajouter “, ratio=0” après métrique=true dans adaptmesh et essayer la fonction ci dessous (qui vaut 0.01 si $x < 0.33$ et 0.5 sinon). Les triangles sont-ils toujours isotropes ?

```
func h=x<0.33? 0.01: 0.5;
```

D'un point de vue culturel citons les théorèmes suivants qui établissent une forme d'équivalence entre les fonctions $h \in H$ et les triangulations C -isotropes de Ω .

Theorem 2.3 (admis) *Il existe une constante C telle que pour toute fonction $h \in H$ il existe une triangulation C -isotrope de Ω qui est C -adaptée à h .*

Theorem 2.4 (admis) *Pour toute constante C_* il existe $C = C(C_*)$ tel que :
Pour toute triangulation C_* -isotrope T de Ω il existe $h \in H$ tel que T est C -adaptée à h .*

2.2 Approximation adaptative

Cette sous partie est dévolue à la résolution (approximative) du problème 1.8, $Pb_2(N, f)$. Pour tout triangle T et toute fonction $f \in C^2(T)$ on note $I_T f$ l'interpolation de f sur T et

$$e_T(f) := \|\nabla f - \nabla I_T f\|_{L^2(T)}.$$

Dans la suite de ce sujet nous notons $d^2 f(z) = H_z$ la matrice hessienne de f en un point z .

$$d^2 f(z) = H_z := \begin{pmatrix} \partial_{xx}^2 f(z) & \partial_{xy}^2 f(z) \\ \partial_{xy}^2 f(z) & \partial_{yy}^2 f(z) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Nous posons

$$\|d^2 f(z)\| = \|H_z\| = \sup_{u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{\|H_z u\|}{\|u\|}, \quad (2.10)$$

et $\|d^2 f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} \|d^2 f(z)\|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}$.

On admet qu'il existe une constante C_0 telle que pour tout triangle T et toute $f \in C^2(T)$,

$$e_T(f) \leq C_0 \rho(T)^{3/2} \|d^2 f\|_{L^1(T)}.$$

Notons

$$E := \{f \in C^2(\overline{\Omega}) ; f|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (2.11)$$

Soit $\mathcal{T}$ une triangulation de Ω et $f \in E$. On note $I_{\mathcal{T}} f \in V(\mathcal{T})$ la fonction qui pour tout $T \in \mathcal{T}$ coïncide avec $I_T f$ sur T , et on définit

$$e_{\mathcal{T}}(f) := \|\nabla f - \nabla I_{\mathcal{T}} f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}} e_T(f)^2}$$

Notez que $\inf_{g \in V(\mathcal{T})} \|g - f\| \leq e_{\mathcal{T}}(f)$. Nous donnons ci dessous des majorations de $e_{\mathcal{T}}(f)$ pour différentes triangulations.

Question 8 Soit $\mathcal{T}$ une triangulation C_* -isotrope de Ω , telle que $\text{diam}(T) \leq C_* \text{diam}(T')$ pour tous $T, T' \in \mathcal{T}$. Montrer que pour tout $f \in E$

$$\sqrt{\#\mathcal{T}} e_{\mathcal{T}}(f) \leq C \|d^2 f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.12)$$

où $C = C(C_*)$. (La constante C ne doit pas dépendre de f , δ ou ε .)

Question 9 Soit $f \in E$ et soient $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$.

$$\text{Posons } h_{\delta,\varepsilon}(z) := \sqrt{\delta}(\|d^2 f(z)\| + \varepsilon)^{-1/2} \text{ et supposons que } h_{\delta,\varepsilon} \in H. \quad (2.13)$$

Soit $\mathcal{T}$ une triangulation C_* -isotrope et C_* -adaptée à $h_{\delta,\varepsilon}$. Montrer que

$$\sqrt{\#\mathcal{T}} e_{\mathcal{T}}(f) \leq C (\|d^2 f\|_{L^1(\Omega)} + \varepsilon |\Omega|) \text{ où } C = C(C_*). \quad (2.14)$$

L'estimation d'erreur (2.14), permise par l'adaptation à f de la triangulation $\mathcal{T}$, est une importante amélioration de (2.12) car dans plusieurs cas la solution f_H du problème (0.1) vérifie $|d^2 f_H| \in L^1$ mais pas $|d^2 f_H| \in L^2$. L'exercice de programmation suivant illustre ce type d'adaptation de maillage.

Programmation 10 Conserver la première partie du programme défini en 7. Nous définissons ci dessous l'espace d'éléments finis $V_h = V(\text{Th})$, deux éléments $u, v \in V_h$ et la fonction second membre $\varphi = \text{phi}$.

```
fespace Vh(Th,P1);
Vh f,g;
func phi=x-0.25;
```

Le problème (0.1) est défini dans le programme sous forme variationnelle

```
problem Poisson(f,g,solver=CG,eps=1.0e-6) =
  int2d(Th)( dx(f)*dx(g) + dy(f)*dy(g))
  + int2d(Th)( phi*g)
  + on(1,2,3,4,5,6, f=0);
```

La boucle suivante permet de raffiner le maillage Th de manière itérative. La solution numérique $f = f_{V_h}$ du problème $\text{Pb}(\text{Vh})$ est une approximation de f_H et est utilisée pour estimer $\|d^2 f_H(z)\|$ sur Ω . La commande `adaptmesh` raffine alors Th pour s'adapter à f_H , suivant le principe de 9.

```
int i;
real error = 0.01;
for (i=0;i< 4;i++)
{
  Poisson;
  plot(f,wait=true);
  Th=adaptmesh(Th,f,err=error,iso = true);
  plot(Th,wait=true);
  f=f; //nécessaire car l'espace Vh a changé.
  error = error/2.;
};
```

Essayer une autre fonction $\phi = \varphi$. Essayer une autre condition au bord, en remplaçant la dernière ligne de la définition du problème Poisson par une condition comme

+ on(1,2,3,4,5,f=0)+on(6,f=y);

Essayer les conditions au bord de Neumann, $\partial_n f = 0$. Pour cela il faut choisir une fonction ϕ d'intégrale nulle sur Ω , comme "func phi=x-y;" et supprimer "+ on(1,2,3,4,5,6, u=0)" (sans supprimer le ";")

Imprimer certains résultats. On choisira le coefficient error pour que le maillage final ait un nombre raisonnable de triangles. (Pour une trop petite valeur du coefficient error, le maillage final peut avoir une mauvaise allure et de gros trous, car le générateur de maillage s'interrompt par défaut à partir de 9000 triangles.)

L'estimation d'erreur (2.14) est fondée sur l'hypothèse restrictive (2.13) ce qui n'est pas très satisfaisant d'un point de vue théorique. Voici, à titre culturel, un résultat similaire qui se passe de cette hypothèse.

Theorem 2.5 (admis) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C = C(\varepsilon)$ telle que :

Pour toute $f \in W^{2,1+\varepsilon} \cap H_0^1(\Omega)$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$ il existe une triangulation $\mathcal{T}$ vérifiant $\#\mathcal{T} = N$ et

$$\sqrt{\#\mathcal{T}} e_{\mathcal{T}}(f) \leq C \|d^2 f\|_{L^{1+\varepsilon}(\Omega)}.$$

Des arguments de théorie de l'approximation permettent par ailleurs de minorer $\sqrt{\#\mathcal{T}} e_{\mathcal{T}}(f)$ de sorte que $\text{Pb}_2(N, f)$ est quasiment résolu au sein des triangulations isotropes.

2.3 Conditionnement du système linéaire (1.5)

Soient $\lambda_m < \lambda_M$ la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice symétrique A définie en (1.4), et soit $\kappa := \lambda_M/\lambda_m$ le conditionnement de A . La quantité κ détermine la vitesse de convergence des méthodes itératives de résolution du système linéaire (1.5), comme le gradient conjugué. Elle détermine aussi l'amplification des erreurs informatiques d'arrondi. Il est donc indispensable de la contrôler.

Soit $\mathcal{T}$ une triangulation C_* isotrope et C_* adaptée à une fonction $h \in H$ (cette seconde hypothèse n'est pas restrictive compte tenu du résultat de la question 2.4.) En combinant les questions 3 et 4 nous obtenons que $\lambda_M \leq C(C_*)$. Il suffit donc de minorer λ_m pour contrôler κ . Nous reprenons les notations e_i et ψ_i de la partie §1.

Question 11 On note $h_{T,e}$ la hauteur issue d'un sommet e d'un triangle T . Montrer que

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \|\psi_i\|^2 = \sum_{\substack{T \in \mathcal{T} \\ e_i \in T}} |T| h_{T,e_i}^{-2}.$$

Notations : la somme est prise sur les triangles $T \in \mathcal{T}$ contenant le sommet e_i , la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H_0^1}$ est définie en (1.2).

Définissons la matrice diagonale D d'entrées $D_{ii} = \langle \psi_i, \psi_i \rangle$ et la matrice symétrique M d'entrées $M_{ij} := \langle \psi_i, \psi_j \rangle$. D^α désigne la matrice diagonales d'entrées $D_{ii}^\alpha = (D_{ii})^\alpha$.

Question 12 Montrer que $A = D^{-\frac{1}{2}} M D^{-\frac{1}{2}}$. Si un réel λ satisfait

$$\forall u \in \mathbb{R}^N, \lambda u^T D u \leq u^T M u$$

montrer qu'alors $\lambda \leq \lambda_m$.

Question 13 Soit $u \in \mathbb{R}^N$ et soit $U := \sum_{i=1}^N u_i \psi_i$. Montrer que

$$u^T M u = \int_{\Omega} |\nabla U|^2. \quad (2.15)$$

et qu'il existe $C = C(C_*)$ tel que

$$u^T D u \leq C \int_{\Omega} h^{-2} U^2. \quad (2.16)$$

(On pourra utiliser sans démonstration le fait suivant : si U est affine sur un triangle T de sommets z_0, z_1, z_2 , alors $\int_T U^2 \geq \frac{|T|}{3} (U(z_0)^2 + U(z_1)^2 + U(z_2)^2)$.)

On rappelle l'inégalité de Holder : si $p \geq 1$, $q \geq 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$\forall f \in L^p(\Omega), \forall g \in L^q(\Omega), \int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \quad (2.17)$$

L'inégalité de Poincaré : Pour tout $p \in [1, \infty[$ il existe $C(p)$ tel que

$$\forall g \in H_0^1(\Omega), \|g\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p) \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Question - Théorème 14 *Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous $f \in L^{2+\varepsilon}(\Omega)$ et $g \in H_0^1(\Omega)$ on a*

$$\|fg\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{2+\varepsilon}} \|g\|_{H_0^1(\Omega)} \text{ où } C = C(\varepsilon).$$

(Indication : utiliser (2.17) pour majorer $\int_{\Omega} f^2 g^2$, avec les exposants $p = 1 + \varepsilon$ et $q = 1 + \varepsilon^{-1}$)
En choisissant $f = h^{-1}$ et $g = U$ obtenir

$$\lambda_m^{-1} \leq C \|h^{-1}\|_{L^{2+\varepsilon}(\Omega)}^2 \text{ où } C = C(C_*, \varepsilon).$$

Interprétons ce résultat : Rigueur mise à part, $\|h^{-1}\|_{L^{2+\varepsilon}}^2$ est proche de $\|h^{-1}\|_{L^2}^2 = m(h) \simeq \#\mathcal{T}$. On a donc “presque” minoré λ_m par $\#(\mathcal{T})^{-1}$. Pour une triangulation uniforme $\mathcal{T}$ on peut montrer que $\lambda_m \simeq \#(\mathcal{T})^{-1}$. L'adaptation de maillage ne dégrade donc le paramètre λ_m (et le conditionnement κ) que de manière mineure.

3 Triangulations adaptatives anisotropes

La théorie des triangulations anisotropes est moins développée que celle des triangulations isotropes, en particulier on ne dispose pas d'équivalent satisfaisant du Théorème 2.5. Trois ingrédients sont ajoutés par rapport aux triangulations isotropes et doivent être contrôlés : l'angle maximal des triangles, leur orientation et leur rapport d'aspect.

3.1 Angles plats et oscillations indésirables du gradient

Soit T un triangle et $g \in C^1(T)$. Notons θ le plus grand angle de T et observons que $\theta \geq \frac{\pi}{3}$. Soit z_0 le sommet de T où l'angle est θ , les autres sommets de T sont

$$z_1 = z_0 + \alpha u, z_2 = z_0 + \beta v, \quad (3.18)$$

$$\text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \|u\| = \|v\| = 1. \quad (3.19)$$

Question 15 *Montrer que*

$$\alpha u \cdot \nabla I_T g = g(z_1) - g(z_0) = \int_{t=0}^{\alpha} u \cdot \nabla g(z_0 + tu) dt$$

en déduire que

$$|u \cdot \nabla I_T g| \leq \|\nabla g\|_{L^\infty(T)}.$$

On montre de même que $|v \cdot \nabla I_T g| \leq \|\nabla g\|_{L^\infty(T)}$.

Question 16 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que*

$$(a^2 + b^2)(1 - |\cos \theta|) \leq \|au + bv\|^2$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\nabla I_T g = au + bv$. En majorant et minorant la norme de $(au + bv) \cdot \nabla I_T g$, montrer que

$$\|\nabla I_T g\| \leq S(\theta) \|\nabla g\|_{L^\infty(T)} \quad (3.20)$$

où S est une fonction continue de $\theta \in [\pi/3, \pi]$.

La dernière inégalité montre que le gradient de $I_T g$ est contrôlé pourvu que T n'ait pas d'angle trop plat. Dans le cas contraire des phénomènes indésirables d'oscillation peuvent apparaître, comme illustré sur la Figure 2.

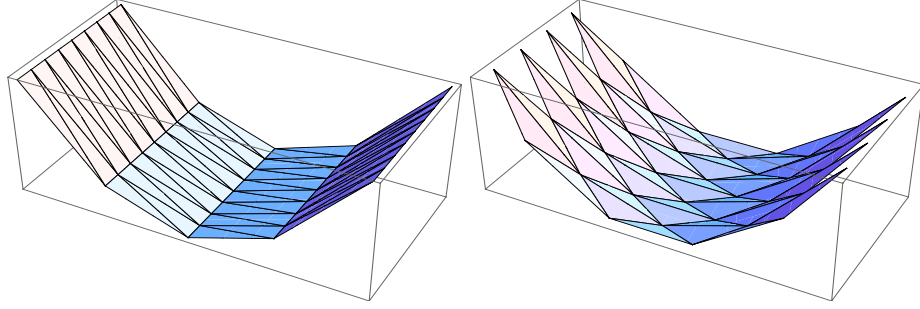


FIGURE 2 – Interpolation d’une fonction quadratique avec (a) des triangles aigus, et (b) des triangles possédant un angle “plat”.

3.2 Orientation et rapport d’aspect optimal des triangles

Dans une triangulation isotrope l’excentricité $\rho(T)$ est bornée par définition. Pour une adaptation anisotrope optimale à une fonction $f \in E$ donnée, voir (2.11), nous montrons dans cette section que c’est $\rho(H_z(T))$ qui doit être borné : l’image du triangle T par la matrice hessienne H_z de f en un point $z \in T$ (définie ci dessous).

Question 17 Soit $T \subset \Omega$ et $z_0 \in T$. En appliquant (3.20) à la fonction $g(z) := f(z) - z \cdot \nabla f(z_0)$, montrer que

$$\|\nabla f - \nabla \mathbf{I}_T f\|_{L^\infty(T)} \leq S(T) \|\nabla f - \nabla f(z_0)\|_{L^\infty(T)},$$

où l’on exprimera $S(T)$ en fonction de $S(\theta)$ qui est défini à la question précédente.

Le module de continuité ω de la matrice hessienne $z \mapsto H_z$ (voir (2.9)) de f , est défini pour tout $r > 0$ par

$$\omega(r) := \sup_{\substack{z_1, z_2 \in \Omega \\ \|z_1 - z_2\| \leq r}} \|H_{z_1} - H_{z_2}\|.$$

Notez que $\omega(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$.

Question - Théorème 18 Si $z, h \in \mathbb{R}^2$ et si le segment $[z, z+h]$ est inclus dans Ω , montrer que

$$\|\nabla f(z+h) - \nabla f(z)\| \leq \|H(z)h\| + \|h\|\omega(\|h\|). \quad (3.21)$$

En déduire que si $T \subset \bar{\Omega}$ est un triangle et $z_0 \in T$,

$$\|\nabla f - \nabla f(z_0)\|_{L^\infty(T)} \leq \text{diam}(H_{z_0}(T)) + \text{diam}(T)\omega(\text{diam}(T)),$$

où $H_{z_0}(T)$ est l’image du triangle T par l’application linéaire H_{z_0} . En déduire que

$$e_T(f) \leq \sqrt{2}S(T) \left(\sqrt{|\det H_{z_0}|} \sqrt{\rho(H_{z_0}(T))} + \sqrt{\rho(T)}\omega(\text{diam}(T)) \right) |T| \quad (3.22)$$

Indication : Pour établir (3.21) on pourra utiliser la formule

$$\nabla f(z+h) - \nabla f(z) = \int_{t=0}^1 H_{z+th} h \, dt$$

L’estimation d’erreur (3.22) est utilisée comme guide pour la génération d’une triangulation anisotrope $\mathcal{T}$ adaptée à une fonction $f \in E$. Pour que la qualité de l’approximation soit optimale, pour tout $z \in \Omega$ le triangle $T \in \mathcal{T}$ contenant z doit satisfaire si possible les points suivants.

1. **Contrainte angulaire :** T ne doit pas comporter d’angles trop proches de π , de sorte que $S(T)$ reste borné.

2. **Contrainte d'aspect :** La forme de T doit être ajustée de sorte que le terme central soit minimal. Dans le cas le plus simple $\omega(\text{diam}(T))$ peut être négligé. On adapte alors la forme de T de sorte que $\rho(H_z T)$ soit borné, et le terme central est majoré par $C\sqrt{|\det H_z|}$.
3. **Contrainte d'aire :** L'aire des différents triangles $T \in \mathcal{T}$ est ajustée pour $e_T(f)$ soit du même ordre sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}$.

Si ces contraintes sont remplies, on peut obtenir l'estimation d'erreur

$$\sqrt{\#\mathcal{T}}e_{\mathcal{T}}(f) \leq \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^1(\Omega)},$$

où $d^2 f(z) = H_z$. Elle présente un gain important par rapport à l'estimation isotrope (2.14) dans les zones de Ω où les valeurs propres λ_1, λ_2 de H_z sont d'ordre de grandeur différents. En effet dans ce cas

$$\sqrt{|\det H_z|} = \sqrt{|\lambda_1 \lambda_2|} \ll \|d^2 f\| = \|H_z\| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}.$$

Programmation 19 Reprendre le programme 10 en remplaçant la ligne contenant la commande `adaptmesh` par l'un des deux choix suivants

```
Th=adaptmesh(Th,f,err=error);
Th=adaptmesh(Th,f,err=sqrt(error), power=2);
```

Le second choix est consistant avec l'analyse d'erreur (3.22), mais il est "trop anisotrope" et mène à des difficultés numériques. En pratique on préfère souvent le premier.