

## Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 431

Calcul du champ démagnétisant d'un matériau aimanté

*sujet proposé par F. Alouges*  
alouges@cmapx.polytechnique.fr

Le but de ce mini-projet est de calculer numériquement le champ magnétique généré par un aimant (appelé champ démagnétisant). Pour ce faire, on considère un domaine borné et régulier  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , représentant l'aimant. Ce dernier est le siège d'une aimantation spontanée:

$$m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

et cette distribution d'aimantation au sein du matériau produit le champ démagnétisant  $H_d(m) = \nabla \phi_d(m)$  où le potentiel  $\phi_d(m)$  est donné par le système d'équations suivant:

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta \phi_d(m) = \operatorname{div}(m) \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta \phi_d(m) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ \left[ \frac{\partial \phi_d(m)}{\partial n} \right] = m \cdot n \text{ sur } \partial\Omega, \\ [\phi_d(m)] = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \phi_d(m)(x) \rightarrow 0 \text{ si } |x| \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Dans les équations précédentes  $n$  est la normale extérieure à  $\Omega$ , et le crochet  $[\Psi]$  dénote le saut de la quantité (discontinue)  $\Psi$  à travers la surface  $\partial\Omega$  entre la valeur extérieure et intérieure

$$[\Psi] = \Psi_{ext} - \Psi_{int}.$$

### 1. RÉOLUTION THÉORIQUE DU PROBLÈME

Nous commençons par introduire un cadre variationnel adapté à la résolution du problème (1) puis étudions sa résolution numérique par la méthode des éléments finis.

**1.1** Soit  $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  à support compact. Montrer que

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \phi(r)^2 dr \leq 4 \int_0^{+\infty} r^2 (\phi'(r))^2 dr.$$

On pourra utiliser pour cela une intégration par parties en écrivant  $\phi(r)^2 = 1 \times \phi(r)^2$ .

**1.2** Montrer que pour  $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , on a

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1 + |x|^2} dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi(x)|^2 dx.$$

On pourra passer en coordonnées sphériques et utiliser l'estimation de la question précédente.

**1.3** On pose

$$(4) \quad BL^1 = \left\{ \phi \text{ tel que } \frac{\phi}{\sqrt{1+|x|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \nabla\phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\}$$

muni du produit scalaire

$$(5) \quad (\phi, \psi)_{BL^1} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)\psi(x)}{1+|x|^2} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi(x) \cdot \nabla\psi(x) dx.$$

Montrer que  $BL^1$  est un espace de Hilbert. Montrer que  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  est dense dans  $BL^1$ .

**1.4** En utilisant les questions précédentes montrer que  $BL^1$  muni du produit scalaire

$$(6) \quad (\phi, \psi)_{\dot{H}^1} = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi(x) \cdot \nabla\psi(x) dx$$

est aussi un espace de Hilbert. On montrera que les normes sous-jacentes  $\|\cdot\|_{BL^1}$  et  $\|\cdot\|_{\dot{H}^1}$  sont équivalentes.

**1.5** Montrer que  $BL^1 \neq H^1(\mathbb{R}^3)$ .

**1.6** Montrer que la formulation variationnelle du problème (1) est

$$\text{Trouver } \phi \in BL^1, \text{ tel que } \forall \psi \in BL^1, \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi \cdot \nabla\psi = - \int_{\Omega} m \cdot \nabla\psi.$$

On supposera que la dernière condition de (1) est automatiquement vérifiée pour les fonctions de  $BL^1$ . En déduire que si  $m \in L^2(\Omega)$ , le problème précédent a une unique solution dans  $(BL^1, \|\cdot\|_{\dot{H}^1})$ .

## 2. TRONQUONS LE PROBLÈME

On supposera donc dorénavant que  $m \in L^2(\Omega)$ . Afin de rendre le problème de taille finie, susceptible d'être discrétisé, on approche le problème posé sur  $\mathbb{R}^3$  tout entier par un problème posé sur une boîte  $B$  englobant  $\Omega$  suffisamment grande (voir Fig. 1). On rajoute alors la condition au bord de la boîte

$$(7) \quad \frac{\partial\phi_d(m)}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial B$$

où  $n$  est la normale extérieure à  $\partial B$ . On cherche donc à résoudre

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta\phi_d(m) = \text{div}(m) \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta\phi_d(m) = 0 \text{ dans } B \setminus \Omega, \\ \left[ \frac{\partial\phi_d(m)}{\partial n} \right] = m \cdot n \text{ sur } \partial\Omega, \\ [\phi_d(m)] = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial\phi_d(m)}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial B. \end{array} \right.$$

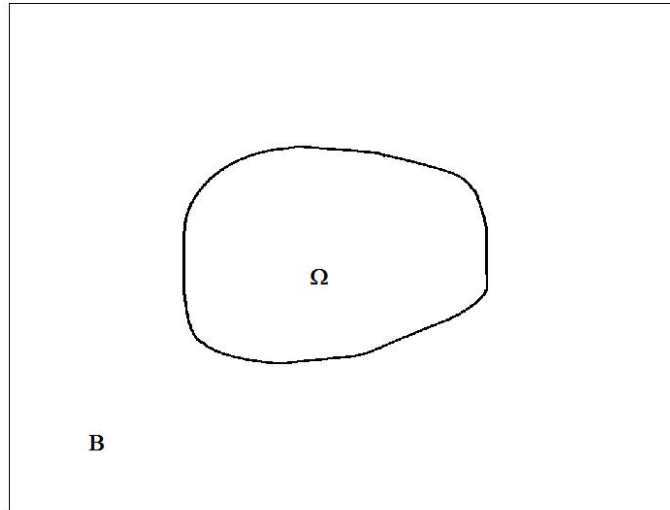


FIGURE 1. Le problème posé dans une boîte englobante

**2.1** On pose  $H = \{\psi \in H^1(B), \int_B \psi dx = 0\}$ . Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall \psi \in H, \int_B \psi^2 dx \leq C \int_B |\nabla \psi|^2 dx$$

(on pourra raisonner par l'absurde). Que peut-on dire de  $H$  muni de  $\|\cdot\|$  où

$$\|\psi\| = \left( \int_B |\nabla \psi|^2 dx \right)^{1/2} ?$$

**2.2** Montrer que la formulation variationnelle du problème (8) est

$$(9) \quad \text{Trouver } \phi \in H, \text{ tel que } \forall \psi \in H, \int_B \nabla \phi \cdot \nabla \psi = - \int_{\Omega} m \cdot \nabla \psi.$$

Montrer que cette formulation variationnelle possède une unique solution.

**2.3** On considère un maillage de  $B$  par des triangles de telle sorte que ce maillage respecte la frontière de  $\Omega$  (supposée polyédrique), et une approximation du problème par des éléments finis  $\mathbb{P}_1$ . On note  $V_h$  l'espace des fonctions de  $H^1(B)$ , linéaires sur chaque triangle du maillage, et continues sur  $B$ . Ecrire la formulation variationnelle discrète associée au problème continu de la question **2.2**. Montrer que celle-ci admet une unique solution; en déduire que la formulation variationnelle

$$(10) \quad \text{Trouver } \varphi_h \in V_h, \text{ tel que } \forall \psi_h \in V_h, \int_B \nabla \varphi_h \cdot \nabla \psi_h = - \int_{\Omega} m \cdot \nabla \psi_h$$

admet une infinité de solutions que l'on décrira.

**2.4** On suppose que  $\Omega$  est un ouvert polyédrique, et que la solution exacte de (2) a la régularité  $H^2$  sur  $\Omega$  et  $B \setminus \Omega$  ( $\phi$  n'est en général pas  $H^2$  sur  $B$  tout entier car sa

dérivée normale peut avoir un saut sur  $\partial\Omega$ ). Donner une estimation théorique de l'erreur  $\|\phi - \varphi_h\|$  où  $\varphi_h$  est une solution de (10), en fonction de  $|\phi|_{H^2(\Omega) \cap H^2(B \setminus \Omega)}$ .

---

### 3. APPROXIMATION NUMÉRIQUE

**3.1** On se place dans cette question en dimension 1 d'espace. Le "vecteur"  $m$  n'a alors qu'une seule composante. On prendra  $B = ]-2, 2[$ ,  $\Omega = ]-1, 1[$  et  $m = 1$  sur  $\bar{\Omega}$ , (évidemment  $m = 0$  sur  $B \setminus \Omega$ ). Ecrire un programme en Scilab permettant de calculer la solution approchée du problème correspondant à (8) à l'aide d'éléments finis  $\mathbb{P}_1$ , en dimension un. On tracera sur un même graphique cette solution approchée, et la solution exacte que l'on calculera explicitement.

**3.2** On se place maintenant en dimension 2 d'espace. Calculer, à l'aide de FreeFem++, la solution approchée en dimension deux, toujours à l'aide d'éléments finis  $\mathbb{P}_1$ , dans le cas suivant :

$$(11) \quad \begin{aligned} B &= ]-2, 2[ \times ]-2, 2[ \\ \Omega &= \{ (x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 < 1/4 \} \end{aligned}$$

et

$$(12) \quad m(x) = \begin{cases} (0, 1)^t & \text{pour } x \in \Omega, \\ (0, 0)^t & \text{pour } x \in B \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

On visualisera la solution  $\phi$  ainsi que le champ démagnétisant  $\nabla\phi$ . Commenter la solution obtenue par rapport au cas unidimensionnel.

**3.3** Reprendre la question **3.2** en faisant varier le domaine  $\Omega$ . On prendra tout d'abord une ellipse puis un rectangle. Observer que dans le cas d'une ellipse,  $\nabla\phi$  paraît constant dans  $\Omega$  et que ce n'est pas le cas pour un rectangle.

**3.4** Un calcul en dimension 3. On cherche à approcher le véritable problème en dimension 3. On appelle  $(x, y, z)$  les coordonnées. Pour se ramener à un problème bidimensionnel (calculable dans FREEFEM++) on envisage une situation axisymétrique. On suppose que  $\Omega$  est un ellipsoïde (on décrit ci-dessous le cas d'une sphère) vertical centré en  $(0, 0, 0)$ , que  $m = (0, 0, 1)^t$  et que la boîte  $B$  est un cylindre vertical centré en  $(0, 0, 0)$  suffisamment grand. Montrer (par symétrie) que la solution  $\phi$  du problème ne dépend que des variables  $(r, z)$  (où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ). Ecrire la formulation variationnelle axisymétrique du problème et la résoudre à l'aide de FREEFEM++. On prendra pour la boîte et pour le domaine (une sphère de rayon  $1/2$ )

$$(13) \quad B = \{(r, z) \in [0, 2[ \times ]-2, 2[\}, \Omega = \{(r, z) \text{ tel que } r^2 + z^2 < \frac{1}{4}\}.$$

Vérifier que pour des ellipsoïdes verticaux  $\nabla\phi$  est toujours constant dans  $\Omega$ . Comparer avec le cas où  $\Omega$  est un cylindre.