

Analyse numérique et optimisation

Impact d'un corps élastique contre une paroi

Alexandre Ern ern@cermics.enpc.fr

Dans ce projet, on s'intéresse à la modélisation numérique de l'impact d'un corps élastique (une barre en 1D, une balle en 2D) contre une paroi rigide.

1 Impact d'une barre contre une paroi

On considère une barre élastique verticale qui vient impacter une paroi rigide horizontale. Initialement, la barre se trouve à une hauteur h_0 au-dessus de la paroi et elle a une vitesse $-v_0$. À un instant $t \in [0, T]$, où T est un temps de simulation fixé, la position de la barre est repérée par le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ par rapport à une configuration de référence Ω de la barre. On choisit pour celle-ci la barre non-déformée en contact avec la paroi ; on a donc $\Omega = [0, L]$ où L est la longueur de la barre non-déformée. À $t = 0$, la condition initiale s'écrit donc

$$\forall x \in \Omega, \quad u(x, 0) = h_0, \quad \partial_t u(x, 0) = -v_0. \quad (1)$$

L'évolution spatio-temporelle de la fonction u est régie par l'équation fondamentale de la dynamique : pour $(x, t) \in \Omega \times]0, T[$,

$$\rho \partial_{tt}^2 u(x, t) - E \partial_{xx}^2 u(x, t) = 0, \quad (2)$$

où les paramètres positifs ρ et E désignent respectivement la densité et le module de Young de la barre. On a de plus négligé les forces extérieures, notamment la gravité. Enfin, les conditions aux limites sont pour $t \in]0, T[$,

$$u(0, t) \geq 0, \quad r(t) \geq 0, \quad r(t)u(0, t) = 0, \quad (3)$$

$$\partial_x u(L, t) = 0. \quad (4)$$

En $x = L$, la condition aux limites exprime le fait qu'il n'y a pas d'effort exercé sur la barre en ce point. En $x = 0$, on a posé $r(t) = -E \partial_x u(0, t)$; cette quantité représente la force exercée en ce point sur la barre. Elle est égale à la force de contact exercée par la paroi sur la barre s'il y a contact et elle est nulle en l'absence de contact. La condition en $x = 0$ est appelée condition de Signorini. Elle exprime le fait que (i) soit $u(0, t) > 0$, la barre n'est donc pas en contact avec la paroi et $r(t) = 0$, (ii) soit $u(0, t) = 0$, la barre est donc en contact avec la paroi et celle-ci repousse la barre si bien que $r(t) \geq 0$.

On montre (et nous admettrons) que le problème d'évolution (2) avec la condition initiale (1) et les conditions aux limites (3)-(4) est bien posé (il

admet une et une seule solution faible dans un sens que nous ne précisons pas ici). De plus, durant les phases de contact entre la barre et la paroi, on montre que la force de contact ne travaille pas, si bien que l'énergie totale de la barre, somme de son énergie cinétique et de son énergie élastique de déformation, se conserve. On a donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\partial_t u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} E |\partial_x u|^2 \right) = 0. \quad (5)$$

Question 1 Déterminer l'instant t_1 auquel la barre entre en contact avec la paroi. Après l'impact, la barre reste en contact avec la paroi pendant un certain intervalle de temps avant de décoller. Pendant cette phase de contact, une onde de choc, de vitesse $c_0 = \sqrt{E/\rho}$, remonte la barre ; devant l'onde de choc, la vitesse est $-v_0$, derrière, elle est nulle. Une fois atteint le sommet de la barre, l'onde de choc repart vers le bas ; devant l'onde de choc, la vitesse est toujours nulle, derrière, elle vaut v_0 . Lorsque l'onde de choc atteint le bas de la barre, celle-ci décolle avec une vitesse uniforme v_0 . Ces différentes étapes sont illustrées à la figure 1.

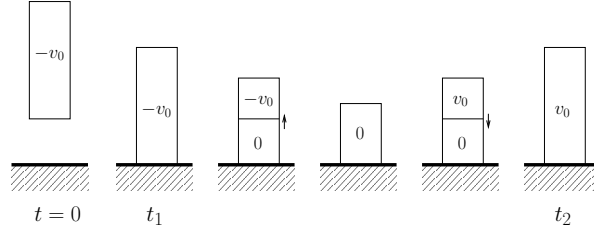


FIG. 1 – Impact d'une barre élastique.

On pose $t_w = \frac{L}{c_0}$ et $t_2 = t_1 + 2t_w$. Vérifier que ces différentes étapes sont bien décrites par la fonction

$$u(x, t) = \begin{cases} h_0 - v_0 t & 0 \leq t \leq t_1, \\ -v_0 \min(x/c_0, t_w - |t - t_1 - t_w|) & t_1 \leq t \leq t_2, \\ v_0(t - t_2) & t_2 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (6)$$

(Noter au passage que cette fonction u n'a pas la régularité suffisante pour être une solution classique de (2).) Déduire de (6) les expressions de $u(0, t)$ et de $r(t)$.

Question 2 On discrétise en espace avec des éléments finis de Lagrange de degré un et un maillage uniforme de pas $\Delta x = L/N_x$ où N_x est un entier. Il y a donc $(N_x + 1)$ sommets dans le maillage (dont les deux sommets situés en $x = 0$ et en $x = L$). On numérote les sommets en commençant par le

bas. Les fonctions de forme sont $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_x+1})$. Donner l'expression des matrices de masse et de rigidité de termes génériques pour $1 \leq i, j \leq N_x+1$,

$$M_{ij} = \rho \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j, \quad K_{ij} = E \int_{\Omega} \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j. \quad (7)$$

On note $U(t)$ le vecteur de \mathbb{R}^{N_x+1} tel que $u(x, t) = \sum_{i=1}^{N_x+1} U_i(t) \varphi_i(x)$. Vérifier formellement qu'après discrétisation en espace, l'équation de la dynamique (2) avec la condition aux limites (4) en $x = L$ et la condition aux limites $-E \partial_x u(0, t) = r(t)$ en $x = 0$ devient

$$M \ddot{U}(t) + KU(t) = R(t), \quad (8)$$

où $\ddot{U}(t)$ désigne la dérivée seconde en temps de $U(t)$ et $R(t)$ est le vecteur de \mathbb{R}^{N_x+1} dont toutes les composantes sont nulles sauf la première qui vaut $r(t)$. En élastodynamique, il est courant de condenser la matrice de masse. Avec des éléments finis de degré un, cela revient à remplacer la matrice de masse M par une matrice diagonale \bar{M} dont chaque coefficient diagonal est égal à la somme des coefficients de M de la ligne correspondante. Donner l'expression de \bar{M} . En définitive, le problème discrétisé en espace s'écrit

$$\bar{M} \ddot{U}(t) + KU(t) = R(t). \quad (9)$$

Question 3 On discrétise (9) en temps par un schéma des différences centrées avec un pas de temps $\Delta t = T/N_t$ où N_t est un entier. Pour un entier $m \in \{0, \dots, N_t\}$, un indice m désigne la valeur en $m\Delta t$. On traite le terme de rigidité explicitement et la force de contact implicitement. Le schéma des différences centrées s'écrit

$$\bar{M} \left(\frac{U^{m+1} - 2U^m + U^{m-1}}{\Delta t^2} \right) + KU^m = R^{m+1}. \quad (10)$$

Il s'agit d'une marche en temps : une fois connus U^m et U^{m-1} , (10) permet de déterminer U^{m+1} ; il s'agit d'un problème non-linéaire à cause du traitement implicite de la force de contact. Les conditions initiales (1) fournissent U^0 et une vitesse V^0 et on pose $U^1 = U^0 + \Delta t V^0$. Avec la convention $U^{-1} = 2U^0 - U^1$, on définit pour $m \geq 0$ la vitesse discrète $V^m = (U^{m+1} - U^{m-1})/(2\Delta t)$ et l'accélération discrète $A^m = (U^{m+1} - 2U^m + U^{m-1})/\Delta t^2$. On considère les quantités

$$\mathcal{E}^m = \frac{1}{2} {}^T V^m \bar{M} V^m + \frac{1}{2} {}^T U^m K U^m, \quad (11)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}^m = \mathcal{E}^m - \frac{1}{8} \Delta t^2 {}^T A^m \bar{M} A^m. \quad (12)$$

\mathcal{E}^m représente l'énergie discrète de la barre, alors que $\tilde{\mathcal{E}}^m$ est une approximation de celle-ci (à l'ordre deux en Δt). Vérifier que pour tout $m \geq 0$,

$$\tilde{\mathcal{E}}^{m+1} - \tilde{\mathcal{E}}^m = \frac{1}{2} (R_1^{m+2} + R_1^{m+1})(U_1^{m+1} - U_1^m). \quad (13)$$

Commenter en lien avec (5).

Question 4 Afin de résoudre (10), on considère les deux étapes suivantes (ce schéma a été proposé par Paoli et Schatzman en 2002, suite aux travaux de Schatzman et Bercovier en 1989).

1. Prédiction : déterminer $U_{\text{pred}}^{m+1} \in \mathbb{R}^{N_x+1}$ tel que

$$\bar{M} \left(\frac{U_{\text{pred}}^{m+1} - 2U^m + U^{m-1}}{\Delta t^2} \right) + KU^m = 0. \quad (14)$$

2. Correction : Poser $U_i^{m+1} = U_{\text{pred},i}^{m+1}$ pour $2 \leq i \leq N_x + 1$ et $U_1^{m+1} = \max(0, U_{\text{pred},1}^{m+1})$.

Montrer que le vecteur U^{m+1} ainsi déterminé satisfait (10) avec une force de contact R^{m+1} que l'on précisera (commenter l'intérêt d'avoir condensé la matrice de masse). Montrer en outre que les conditions de Signorini sont vérifiées :

$$U_1^{m+1} \geq 0, \quad R_1^{m+1} \geq 0, \quad U_1^{m+1} R_1^{m+1} = 0. \quad (15)$$

Evaluer enfin la variation d'énergie approchée $\tilde{\mathcal{E}}^m - \tilde{\mathcal{E}}^0$ ($m \leq M - 2$) en utilisant (13) et commenter.

Question 5 Simulation sous Scilab. On prendra $\rho = 1$, $E = 1000$, $L = 12$, $h_0 = 5$, $v_0 = 10$ et $T = 1.5$. Les paramètres de discrétisation sont $N_x = 100$ et $N_t = 800$. On tracera l'évolution temporelle de U_1^m (déplacement du bas de la barre), R_1^m (force de contact), \mathcal{E}^m (énergie discrète) et $\tilde{\mathcal{E}}^m$ (énergie discrète approchée). On commentera par rapport aux valeurs analytiques (cf. question 1) et par rapport aux résultats relatifs à la conservation de l'énergie (cf. question 4). On pourra prolonger l'étude en faisant varier les paramètres physiques d'une part et les paramètres de discrétisation d'autre part (dans ce deuxième cas, on pourra observer la présence d'une condition de stabilité sur le schéma de la forme $c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \nu_c$ où le paramètre ν_c est de l'ordre de 1).

2 Impact d'une balle contre une paroi

On s'intéresse maintenant à l'impact d'une balle. Pour simplifier, on se place en deux dimensions d'espace et on considère un disque. La configuration de référence Ω est un disque en contact avec la paroi ; celui-ci a un rayon R et son centre est le point O de coordonnées $(0, R)$; voir la figure 2 à gauche. À un instant $t \in [0, T]$, la position du disque est repérée par le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto u(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2$. On notera (x, y) les coordonnées cartésiennes du point courant de Ω et (u_x, u_y) les composantes de u . Initialement, le disque n'est pas déformé, il a une vitesse $-v_0$ et son centre a pour coordonnées $(0, R + h_0)$.

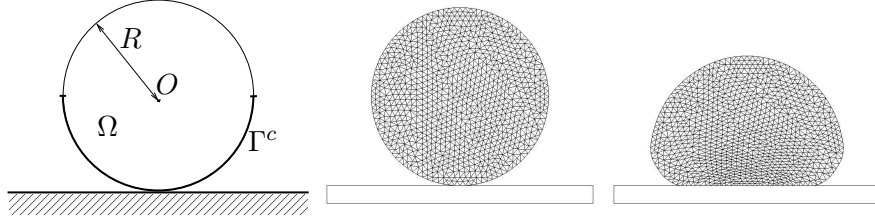


FIG. 2 – Impact d'un disque élastique. Configuration de référence (gauche), maillage (centre), et exemple de configuration déformée après impact (droite).

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, on introduit le tenseur des déformations (linéarisées) $\varepsilon(u) \in \mathbb{R}^{2,2}$ et le tenseur des contraintes $\sigma(u) \in \mathbb{R}^{2,2}$ tels que

$$\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \partial_x u_x & \frac{1}{2}(\partial_x u_y + \partial_y u_x) \\ \frac{1}{2}(\partial_x u_y + \partial_y u_x) & \partial_y u_y \end{pmatrix}, \quad \sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda(\nabla \cdot u)I, \quad (16)$$

où λ et μ sont des paramètres réels (appelés coefficients de Lamé), $\nabla \cdot u = \partial_x u_x + \partial_y u_y$ et I est la matrice identité de $\mathbb{R}^{2,2}$. La relation fondamentale de la dynamique (2) se réécrit sous la forme vectorielle suivante,

$$\rho \partial_{tt}^2 u(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \sigma(u(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (17)$$

Enfin, afin de formuler les conditions aux limites, on distingue au sein de la frontière de Ω , notée Γ , la partie, notée Γ^c , pouvant entrer en contact avec la paroi. On choisit pour Γ^c le demi-cercle inférieur de Γ ; voir la figure 2. Soit ν la normale extérieure à Ω . Les conditions aux limites sont pour $t \in]0, T[$,

$$\text{sur } \Gamma^c \quad u_y(\mathbf{x}, t) \geq -y, \quad r_y(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad r_y(\mathbf{x}, t)(u_y(\mathbf{x}, t) + y) = 0, \quad (18)$$

$$\text{sur } \Gamma^c \quad r_x(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (19)$$

$$\text{sur } \Gamma \setminus \Gamma^c \quad r(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (20)$$

où on a posé $r(\mathbf{x}, t) = {}^T \nu \sigma(u(\mathbf{x}, t))$ de composantes (r_x, r_y) . On observera que la condition $u_y(\mathbf{x}, t) \geq -y$ exprime bien la non-pénétration de la paroi par la balle.

Question 6 On discrétise en espace avec des éléments finis de Lagrange de degré un et une triangulation quasi-uniforme non-structurée contenant N_s sommets (dont ceux situés sur Γ). Comme chaque composante de u est approchée, il y a en tout $2N_s$ fonctions de forme à valeurs vectorielles; on les note $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2N_s})$. On considère la matrice de masse M et la matrice de rigidité K de termes génériques pour $1 \leq i, j \leq 2N_s$,

$$M_{ij} = \rho \int_{\Omega} \varphi_i \cdot \varphi_j, \quad K_{ij} = \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(\varphi_i) : \varepsilon(\varphi_j) + \int_{\Omega} \lambda (\nabla \cdot \varphi_i)(\nabla \cdot \varphi_j), \quad (21)$$

où $\varepsilon(\varphi_i) : \varepsilon(\varphi_j) = \varepsilon_{xx}(\varphi_i)\varepsilon_{xx}(\varphi_j) + \varepsilon_{yy}(\varphi_i)\varepsilon_{yy}(\varphi_j) + 2\varepsilon_{xy}(\varphi_i)\varepsilon_{xy}(\varphi_j)$. On note $U(t)$ le vecteur de \mathbb{R}^{2N_s} tel que $u(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{2N_s} U_i(t)\varphi(\mathbf{x})$. Vérifier qu'après discrétisation en espace, l'équation de la dynamique (17) devient

$$M\ddot{U}(t) + KU(t) = R(t), \quad (22)$$

où $R_i(t) = \int_{\Gamma^c} \text{Tr}(\mathbf{x}, t)\varphi_i(\mathbf{x})$.

Question 7 Comme dans le cas de la barre, on condense la matrice de masse et on considère le même schéma des différences centrées pour la discrétisation en temps. En procédant comme à la question 4, formuler ce schéma en deux étapes de prédiction-corrrection.

Question 8 Simulation sous FreeFem++. On prendra $\rho = 100$, $\lambda = 8000$, $\mu = 2000$, $R = 1$, $h_0 = 0.1$, $v_0 = 1$ et $T = 0.75$. On maillera le disque à partir d'un maillage uniforme contenant 100 points sur son pourtour ; on posera $\Delta x = \frac{2\pi}{100}$ et on choisira le pas de temps Δt de sorte que $c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.1$ où $c_0 = 10.95$ est une estimation de la vitesse des ondes de compression dans le disque. On tracera l'évolution temporelle du déplacement du centre du disque et de son énergie discrète \mathcal{E}^m (on pourra stocker les valeurs dans un fichier puis tracer les courbes sous Scilab). Reprendre avec un matériau 100 fois plus rigide et commenter.

Conseils FreeFem++. Créer des tableaux pour repérer les indices des nœuds du maillage situés sur Γ^c et pour y stocker la valeur de l'écart initial avec la paroi (l'ordonnée y du nœud considéré).

```
int nbord=100;
real[int] lnc(nbord);
real[int] valnc(nbord);
```

Assemblage de la matrice de rigidité

```
real sqrt2=sqrt(2.);
macro eps(u1,u2) [dx(u1),dy(u2),(dy(u1)+dx(u2))/sqrt2] // EOM
macro div(u,v) ( dx(u)+dy(v) ) // EOM
varf elas([uu,vv],[w,s])=
int2d(Th) ( lm*div(uu,vv)*div(w,s)+2.*mu*(eps(uu,vv)'*eps(w,s)));
matrix K=elas(Vh,Vh);
```

Condensation de la matrice de masse

```
varf mass([uu,vv],[w,s])=int2d(Th,qft=qf1pTlump)(rho*(uu*w+vv*s));
matrix M=mass(Vh,Vh);
real[int] diagM(M.n);
diagM = M.diag;
```