

Les méthodes d'optimisation de formes en élasticité

Benjamin BOUTIN

27 août 2004

Mémoire de stage de Magistère réalisé au CMAP¹,
sous l'encadrement de G.ALLAIRE

¹Centre de mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

Table des matières

1	L'optimisation de formes	4
1.1	Présentation du problème	4
1.2	Résolution du système de l'élasticité	5
1.3	Approches possibles	6
2	Optimisation paramétrique	7
2.1	Introduction	7
2.2	Méthode du gradient	7
2.3	Etat adjoint	8
2.4	Algorithme	9
2.5	Energie complémentaire	9
3	Optimisation topologique	10
3.1	Introduction	10
3.2	Théorie de l'homogénéisation	10
3.2.1	Matériaux composites	11
3.2.2	Laminés séquentiels	11
3.2.3	Formulation homogénéisée de l'optimisation	12
3.3	Algorithme	13
3.4	Résultats	15
3.4.1	La console	15
3.4.2	Autres exemples	17
4	Méthode de convexification	18
4.1	Principe de la méthode	18
4.2	La méthode SIMP	18
4.2.1	Minimisation de la compliance	18
4.2.2	Cas d'un déplacement cible	20
4.3	Résultats	20

Introduction

L'objet de ce stage est de comprendre les principes fondamentaux de l'optimisation de forme en élasticité et de programmer les algorithmes mettant en oeuvre les méthodes les plus basiques de résolution.

Un problème d'optimisation de formes en mécanique est défini par trois données :

- un **modèle** qui permet d'évaluer le comportement mécanique de la structure. Il fournit les équations aux dérivées partielles (EDP).
- un **critère** qui est généralement une fonctionnelle que l'on cherche à minimiser, appelée «fonction coût».
- un **ensemble admissible** de variables d'optimisation qui traduit les éventuelles contraintes imposées à la structure.

Le but est alors de trouver une forme dans l'ensemble admissible, tel que les paramètres respectant alors le modèle optimisent le critère.

Dans une première partie, nous nous attacherons à préciser ces données, ainsi qu'à introduire les différentes approches envisageables pour la résolution. La deuxième partie porte sur l'optimisation paramétrique, dans laquelle les calculs sont ramenés à une géométrie fixe. Elle permettra surtout de définir la notion d'état adjoint très utile par la suite. La troisième partie traite de la méthode d'homogénéisation qui permet une optimisation topologique de la structure. Quant à la quatrième partie, nous y étudierons la méthode de convexification, et une variante très utilisée en pratique : la méthode SIMP (Simplified Isotropic Material with Penalization). Ces deux dernières parties seront illustrées par des exemples calculés à l'aide des programmes écrits pour FREEFEM++.

FREEFEM++ (Cf. [4]) est un logiciel qui permet de résoudre numériquement des EDP par des méthodes d'éléments finis. Il permet de simplifier grandement la tâche car :

- il comprend un générateur automatique construisant les maillages par la méthode de Delaunay, ceci à partir d'une frontière définie analytiquement par l'opérateur ;
- il interpole automatiquement toutes les fonctions en éléments finis P_0 , P_1 , P_2 entre autres ;
- l'EDP est définie par sa formulation variationnelle ;
- il permet la représentation des solutions trouvées.

1 L'optimisation de formes

1.1 Présentation du problème

Soit un corps élastique occupant un domaine Ω , ouvert borné de \mathbb{R}^N . Le matériau qui constitue ce corps est supposé élastique, homogène et isotrope, de tenseur d'élasticité :

$$A = 2\mu \text{Id}_4 + \lambda \text{Id}_2 \otimes \text{Id}_2$$

où μ et λ sont les coefficients de Lamé, qui, pour des raisons thermodynamiques vérifient $\mu > 0$ et $2\mu + N\lambda > 0$. On suppose que le bord du domaine est divisé en trois parties disjointes

$$\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D,$$

où Γ est la partie variable de la frontière, Γ_D est une partie fixe de la frontière sur laquelle le corps est fixé, et Γ_N est aussi une partie fixe de la frontière sur laquelle sont appliqués des efforts g . Le solide est soumis sur Ω à une force volumique f .

Dans le cadre du **modèle de l'élasticité linéarisée**, c'est à dire sous l'hypothèse de petites déformations et de petits déplacements, le champ de déplacement $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ est solution du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} -\text{div}(Ae(u)) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ (Ae(u)) \cdot n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ (Ae(u)) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

où $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ est le tenseur des déformations. On appelle aussi tenseur des contraintes la quantité $\sigma = Ae(u) = 2\mu e(u) + \lambda \text{tr}(e(u)) \text{Id}_2$.

On ajoute une contrainte portant sur le volume de Ω . **L'ensemble des formes admissibles** est alors

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ tel que } \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } \int_{\Omega} dx = V_0 \right\}$$

Venons-en au **critère**. On peut traiter un grand nombre de fonction coût, mais celles qui nous intéresseront seront :

- un critère de compliance qui traduit une minimisation du travail des forces exercées sur le corps :

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, dx + \int_{\Omega} f \cdot u \, dx$$

– un critère pour obtenir un déplacement cible $u_0(x)$:

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx$$

Le problème d'optimisation de formes est alors :

$$\text{Trouver } \Omega_{opt} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ qui réalise } \inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega).$$

1.2 Résolution du système de l'élasticité

Au repos, le solide occupe un domaine Ω . Sous l'action de la force volumique f sur Ω et de la force surfacique g sur Γ_N il se déforme, chaque point x se trouvant alors en $x + u(x)$, u étant solution du problème (1).

Théorème 1.1 Soient Ω un ouvert borné connexe régulier de \mathbb{R}^N , $f \in L^2(\Omega)^N$ et $g \in L^2(\Gamma_N)^N$. On définit l'espace $V = \{v \in H^1(\Omega)^N \text{ t.q. } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^N}$.

Alors il existe une solution (faible) unique $u \in V$ de (1) qui dépend linéairement et continûment des données f et g .

Démonstration On utilise la formulation variationnelle équivalente à (1) :

$$\forall v \in V \quad \underbrace{\int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(v) dx}_{=a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v ds}_{=L(v)}$$

qui vérifie les hypothèses permettant d'appliquer le théorème de Lax-Milgram : a est une forme bilinéaire continue et coercive, L une forme linéaire continue et V une espace de Hilbert. Contentons nous ici d'expliquer l'hypothèse la plus délicate : la coercivité de a .

On montre tout d'abord que

$$\int_{\Omega} 2\mu |e(v)|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |\operatorname{div} v|^2 dx \geq \nu \int_{\Omega} |e(v)|^2 dx$$

avec $\nu = \min(2\mu, 2\mu + N\lambda) > 0$. Pour cela, on utilise une inégalité algébrique : on munit l'ensemble des matrices $N \times N$ du produit scalaire usuel $X \cdot Y = \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, N\}^2} X_{ij} Y_{ij}$. On décompose la matrice symétrique réelle X sous la forme $X = X^d + X^h$ avec $X^d = X - 1/N \operatorname{tr} X \operatorname{Id}$ et $X^h = 1/N \operatorname{tr} X \operatorname{Id}$ de sorte que $X^d \cdot X^h = 0$ et $|X|^2 = |X^d|^2 + |X^h|^2$. On trouve donc :

$$2\mu |X|^2 + \lambda (\operatorname{tr} X)^2 = 2\mu |X^d|^2 + (2\mu + N\lambda) |X^h|^2 \geq \nu |X|^2$$

Puis on utilise l'**inégalité de Korn** :

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . On suppose que la mesure superficielle de Γ_D est non-nulle. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in V$, on a

$$\|v\|_{H^1(\Omega)^N} \leq C \|e(v)\|_{L^2(\Omega)^{N^2}}$$

Ainsi est-on assuré de l'existence et de l'unicité de la solution $u \in V$. Plus encore, la solution u réalise l'unique minimum sur V de l'énergie potentielle mécanique

$$\mathcal{J}(v) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (2\mu|e(v)|^2 + \lambda|\operatorname{div}v|^2) dx}_{\text{énergie de déformation}} - \underbrace{\left(\int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v ds \right)}_{\text{énergie potentielle des forces extérieures}}$$

1.3 Approches possibles

- **optimisation paramétrique** : la forme est représentée par un petit nombre de paramètres qui seront les variables d'optimisation. Ici, nous nous limiterons à des problèmes où le domaine de référence Ω ne varie pas, la variation de forme étant prise en compte à travers un paramètre d'épaisseur qui intervient dans les coefficients de l'équation.
- **optimisation géométrique** : on recherche la frontière $\partial\Omega$ dans une classe de courbes. Le principe est alors de travailler sur une frontière discrétisée en segments ou courbes élémentaires (splines, courbes polynomiales par exemple), dépendant donc d'un nombre de paramètres beaucoup plus important que dans l'approche paramétrique. On fait alors varier, dans la mesure du possible, la position de la frontière dans le sens d'une minimisation du critère. Nous ne traiterons pas cette méthode dans ce mémoire mais ses principaux inconvénients seront énumérés en introduction du chapitre 3. Pour plus de détails, voyez [2].
- **optimisation topologique** : les structures mécaniques classiques s'inspirent bien souvent des "treillis" (treillis de Michell), et ont donc un certain nombre de "trous" définissant une certaine topologie. Ainsi, il s'agit ici d'optimiser aussi bien la topologie de Ω que la forme de sa frontière, contrairement à ce qui est fait en optimisation géométrique.

2 Optimisation paramétrique

2.1 Introduction

Nous traiterons ici le cas où le domaine de travail Ω ne varie pas, on fait seulement varier la forme en modifiant l'épaisseur θ qui va jouer le rôle de paramètre d'optimisation intervenant dans le tenseur d'élasticité θA .

On s'intéresse donc à une plaque élastique occupant un domaine Ω , d'épaisseur variable $\theta(x)$, soumise à des contraintes uniquement sur Γ_N ($f = 0$).

Le champ de déplacement $u(x)$ est alors solution de problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma \cdot n = g & \text{sur } \Gamma_N \quad (= 0 \text{ sur } \Gamma) \\ \sigma = \theta A e(u) \end{cases} \quad (2)$$

La formulation variationnelle équivalente étant

$$u \in V = \{v \in H^1(\Omega)^N \text{ t.q. } v|_{\Gamma_D} = 0\}$$

$$\forall v \in V \quad \int_{\Omega} \theta A e(u) \cdot e(v) \, dx = \int_{\Gamma_N} g \cdot v \, ds \quad (3)$$

On note $u(\theta)$ la solution de (2) pour θ donné (qui est unique d'après le Théorème 1.1), et on cherche à minimiser une fonction coût $J(\theta) = \int_{\Omega} j(u(\theta)) \, dx$ où j est une fonction de classe C^1 de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} , telle que $|j(u)| \leq C(|u|^2 + 1)$ et $|j'(u)| \leq C(|u| + 1) \, \forall u \in \mathbb{R}^N$

Ici,

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \theta \in L^\infty(\Omega), \forall x \in \Omega, 0 < \theta_{min} \leq \theta(x) \leq \theta_{max}, \int_{\Omega} \theta(x) \, dx = \theta_{moy} |\Omega| \right\}$$

2.2 Méthode du gradient

Afin de minimiser $J(\theta)$, nous allons chercher à utiliser une méthode de gradient, il nous faut donc calculer $J'(\theta)$. Par composition des dérivations, sous réserve que l'intégrale ait bien un sens, on a :

$$\forall \phi \in L^\infty(\Omega) \quad \langle J'(\theta), \phi \rangle = \int_{\Omega} j'(u(\theta)) \cdot \langle u'(\theta), \phi \rangle \, dx \quad (4)$$

Que vaut $\langle u'(\theta), \phi \rangle$?

Pour le savoir, on va travailler non pas sur \mathcal{U}_{ad} mais sur un espace un peu plus grand : $\mathcal{U} = \{\theta \in L^\infty(\Omega), \exists \theta_0 > 0 \text{ t.q. } h(x) \geq h_0 \text{ dans } \Omega\}$.

Soit un point $\theta \in \mathcal{U}$, une direction $\phi \in L^\infty(\Omega)$ et soit $t \in \mathbb{R}^+$ suffisamment petit pour que $\theta + t\phi \in \mathcal{U}$, alors on a :

$$\forall v \in V \int_{\Omega} (\theta + t\phi) Ae(u(\theta + t\phi)) \cdot e(v) \, dx = \int_{\Gamma_N} g \cdot v \, ds$$

que l'on dérive suivant t , en notant $u'_\phi = \langle u'(\theta), \phi \rangle$ pour obtenir :

$$\int_{\Omega} \phi Ae(u(\theta + t\phi)) \cdot e(v) \, dx + \int_{\Omega} (\theta + t\phi) Ae(u'_\phi) \cdot e(v) \, dx = 0$$

En particulier pour $t = 0$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \phi Ae(u(\theta)) \cdot e(v) \, dx + \int_{\Omega} \theta Ae(u'_\phi) \cdot e(v) \, dx = 0 \quad \forall v \in V \quad (5)$$

$u'_\phi \in V$ est donc solution la formulation variationnelle précédente, ou de manière équivalente, de

$$-\operatorname{div}(\theta Ae(u'_\phi)) = \operatorname{div}(\phi Ae(u(\theta)))$$

On vérifie bien que $j'(u(\theta)) \cdot \langle u'(\theta), \phi \rangle \in L^2(\Omega)$ pour justifier la dérivation qui mène à (4).

Cependant, la formule (4) n'est pas explicite et il faut recalculer $\langle u'(\theta), \phi \rangle$ pour chaque direction ϕ considérée (avec d'autant plus de directions à considérer que l'espace discretisé est grand), c'est pourquoi on va définir un **état adjoint**.

2.3 Etat adjoint

Soit $p(\theta)$ l'état adjoint défini comme l'unique solution dans V de :

$$-\operatorname{div}(\theta Ae(p)) = -j'(u(\theta)) \text{ dans } \Omega$$

ou de la formulation variationnelle suivante équivalente :

$$\forall v \in V \int_{\Omega} \theta Ae(p) \cdot e(v) = - \int_{\Omega} j'(u(\theta)) \cdot v \quad (6)$$

Il s'agit maintenant d'éliminer u'_ϕ dans l'expression de $\langle J'(\theta), \phi \rangle$. On va prendre $v = p(\theta)$ dans (5), et $v = u'_\phi$ dans (6). On trouve alors immédiatement :

$$\langle J'(\theta), \phi \rangle = \int_{\Omega} j'(u(\theta)) \cdot u'_\phi = \int_{\Omega} \phi Ae(u(\theta)) \cdot e(p(\theta))$$

ceci pour toute direction ϕ , donc finalement :

$$J'(\theta) = Ae(u(\theta)) \cdot e(p(\theta))$$

2.4 Algorithme

Excepté dans le cas de la compliance, où l'état adjoint n'est rien d'autre que $-u$, ce qui permet de simplifier la tâche, il faut en général utiliser une méthode de gradient pour minimiser la fonction-coût

$$J(\theta) = \int_{\Omega} j(u(\theta)) dx$$

L'algorithme est le suivant :

1. Initialisation de l'épaisseur $\theta_0 \in \mathcal{U}_{ad}$
2. Itérations jusqu'à convergence pour $n \geq 0$, suivant une méthode de gradient avec un pas μ assurant la descente.

$$\theta_{n+1} = P_{\mathcal{U}_{ad}}(\theta_n - \mu J'(\theta_n))$$

où $P_{\mathcal{U}_{ad}}$ est l'opérateur de projection sur le convexe fermé \mathcal{U}_{ad} :

$$P_{\mathcal{U}_{ad}}(\theta) = \max(\min(\theta + \ell, \theta_{max}), \theta_{min})$$

ℓ étant déterminé par dichotomie de manière à avoir $\int_{\Omega} \theta(x) dx = \theta_{moy} |\Omega|$. Le gradient est donné par :

$$J'(\theta_n) = Ae(u_n) \cdot e(p_n),$$

où u_n est solution de (3) et p_n de (6).

2.5 Energie complémentaire

Dans le théorème 1.1, nous avons vu que la résolution du système (1) équivalait à la minimisation de l'énergie potentielle mécanique $\mathcal{J}(v)$. De même ici, la résolution du système (2) est équivalente à la minimisation de la quantité :

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta Ae(v) \cdot e(v) dx - \int_{\Gamma_N} g \cdot v ds \text{ pour } v \in V,$$

elle-même équivalente à la minimisation de l'énergie complémentaire (ou duale) : $\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta A)^{-1} \sigma \cdot \sigma dx$ où σ décrit $L^2(\Omega)^{N^2}$ sous les contraintes :

$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{sur } \Omega \\ \sigma \cdot n = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$, qui définissent l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles. Cela est démontré dans [1] 2.2.4 grâce à l'unicité du point selle d'un certain Lagrangien.

3 Optimisation topologique

3.1 Introduction

Dans le cadre de l'optimisation géométrique, que nous n'avons pas traitée ici, la topologie est fixée par la forme initiale puisqu'on s'interdit, pour en rendre la programmation possible, de modifier le nombre de composantes connexes qui composent sa frontière. De plus, les tests montrent que le résultat obtenu dépend grandement de la forme initiale ainsi que du maillage. Cela s'explique par l'existence de nombreux minima locaux, voire l'absence de minimum global. On parle dans ce cas de problèmes "mal posés". En outre, le calcul s'y révèle assez complexe car nécessite de recalculer le maillage à chaque itération (à chaque déplacement de frontière). D'où l'idée d'optimiser non seulement la forme, mais également la topologie, tout cela sur un maillage fixe.

Le principe général de l'optimisation topologique par homogénéisation est d'étendre l'ensemble des formes admissibles à l'ensemble des matériaux composites, de manière à prendre en compte les frontières macroscopiques (celles qui engendrent la topologie de la structure) ainsi que les frontières microscopiques (à une échelle si petite que la densité θ du matériau perforé est moyennée localement et prend alors ses valeurs non plus dans $\{0,1\}$ mais dans $[0,1]$).

Le problème classique sous-jacent à notre étude est le suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_\chi = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma \cdot n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \sigma \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}, \text{ avec } \sigma = \chi A e(u_\chi) \quad (7)$$

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \chi \in L^\infty(\Omega, \{0,1\}), \int_\Omega \chi \, dx = V_0 \right\}$$

$$J(\chi) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u_\chi \, ds + \ell \int_\Omega \chi(x) \, dx$$

$$\text{Trouver } \chi \in \mathcal{U}_{ad} \text{ qui réalise } \inf_{\chi \in \mathcal{U}_{ad}} J(\chi)$$

3.2 Théorie de l'homogénéisation

Nous n'entrerons pas dans les détails des méthodes de développements asymptotiques qui permettent de déterminer les diverses formules homogénéisées. Le lecteur pourra pour cela se reporter à [2], Chapitre 1. Nous évo-

querons ici simplement les résultats utiles à l'implémentation de l'algorithme qui suivra.

3.2.1 Matériaux composites

Un matériau composite peut être vu comme la limite (au sens de l'homogénéisation Cf.[2]) d'une suite de matériaux obtenus par mélange de deux phases A et B, avec, dans les cas non-triviaux, des détails de forme de plus en plus fins. Un tel matériau est caractérisable par deux fonctions : $\theta(x)$, la proportion volumique locale d'une des deux phases, et $A^*(x)$, le tenseur de sa loi de comportement effectif, correspondant à sa microstructure. $\theta \in L^\infty(\Omega)$ et $A^* \in G_\theta$, G_θ n'étant pas connu explicitement mais seulement caractérisé par le principe de Hashin-Shtrikman qui borne les valeurs propres de ses éléments ([2] 2.3.2).

3.2.2 Laminés séquentiels

Les laminés séquentiels, plus facilement représentables et suffisants pour les résultats finaux, sont un cas particulier de matériaux composites, obtenus par laminations successives (une lamination est la répartition des deux phases en couches parallèles orthogonales à une certaine direction e suivant une certaine proportion à mettre en correspondance avec les réels m_i et θ qui suivront). Dans les différentes étapes, on lamine toujours une même phase, la "matrice", avec le laminé précédent ; l'autre phase étant alors appelée "inclusion". La théorie de l'homogénéisation fournit le résultat suivant :

Formule de lamination

Soit A^* un laminé séquentiel de rang p (nombre de laminations) obtenu par mélange de deux matériaux A et B, en proportion respective θ et $(1 - \theta)$, de directions de laminations $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ et de paramètres de lamination $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$ qui vérifient $0 \leq m_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^p m_i = 1$. Alors A^* est donné par

$$(1 - \theta)(A^{*-1} - A^{-1})^{-1} = (B^{-1} - A^{-1})^{-1} + \theta \sum_{i=1}^p m_i f_A^c(e_i) \quad (8)$$

où $f_A^c(e_i)$ est un tenseur d'ordre 4 défini, pour toute matrice 2×2 symétrique ξ par la forme quadratique

$$f_A^c(e)\xi \cdot \xi = A\xi \cdot \xi - \frac{1}{\mu_A} |A\xi e|^2 + \frac{\mu_A + \lambda_A}{\mu_A(2\mu_A + \lambda_A)} ((A\xi e) \cdot e)^2$$

3.2.3 Formulation homogénéisée de l'optimisation

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma \cdot n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \sigma \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}, \text{ avec } \sigma = A^* e(u) \quad (9)$$

Le problème d'optimisation homogénéisé est

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^*} J(\theta, A^*)$$

où l'ensemble admissible homogénéisé est

$$\mathcal{U}_{\text{ad}}^* = \left\{ (\theta, A^*) \in L^\infty \left(\Omega; [0, 1] \times \mathbb{R}^{N^2} \right), A^*(x) \in G_{\theta(x)} \forall x \in \Omega, \int_{\Omega} \theta(x) dx = V_0 \right\}$$

et avec

$$\begin{aligned} J(\theta, A^*) &= \int_{\Gamma_N} g \cdot u ds + \ell \int_{\Omega} \theta(x) dx \\ &= \int_{\Omega} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma dx + \ell \int_{\Omega} \theta(x) dx \\ &= \min_{\operatorname{div} \sigma = 0; \sigma \cdot n = g} \int_{\Omega} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma dx + \ell \int_{\Omega} \theta(x) dx \end{aligned}$$

la dernière ligne étant obtenue grâce à un principe d'énergie complémentaire (Cf 2.5).

Théorème 3.1 *La formulation homogénéisée*

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^*} J(\theta, A^*)$$

est la relaxation du problème d'optimisation de formes classique (7) au sens où :

- il existe au moins une forme optimale composite (θ, A^*) qui minimise $J(\theta, A^*)$
- toute suite minimisante de formes classiques χ converge, au sens de l'homogénéisation, vers une solution optimale (θ, A^*) .
- toute solution optimale (θ, A^*) est la limite d'une suite minimisante χ .

En particulier, les quantités minimisées coïncident :

$$\inf_{\chi \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(\chi) = \min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}^*} J(\theta, A^*)$$

Principe d'alignement :

Soit G_θ l'ensemble des tenseurs d'élasticité homogénéisés obtenus par mélange des phases A et B en proportion θ et $(1 - \theta)$. Soit L_θ le sous-ensemble de G_θ constitué des matériaux composites laminés. Pour tout tenseur de contrainte σ ,

$$\min_{A^* \in G_\theta} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma = \min_{A^* \in L_\theta} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma = A_\sigma^{*-1} \sigma \cdot \sigma$$

où A_σ^* est le laminé séquentiel de rang N dont les directions de laminations coïncident avec les vecteurs propres de σ (les "lignes de contraintes"). C'est le matériau composite le plus rigide possible sous la contrainte σ dans l'ensemble G_θ , obtenu en prenant dans (8) $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ respectivement égaux aux valeurs et aux vecteurs propres orthonormalisés de la matrice σ et
en dimension 2 :

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|} \quad (10)$$

La minimisation en θ est alors obtenue pour :

$$\theta_{opt} = \min \left(1, \sqrt{\frac{\kappa + \mu}{4\mu\kappa\ell}} (|\sigma_1| + |\sigma_2|) \right) \quad (11)$$

3.3 Algorithme

Le problème homogénéisé est une double minimisation par rapport aux paramètres de forme (θ, A^*) et aux tenseurs des contraintes statiquement admissibles σ . L'algorithme suivant, dit des **directions alternées**, se propose de minimiser alternativement et itérativement dans chacune de des variables :

- initialisation de la forme (θ_0, A_0^*) . On peut par exemple prendre (θ_{moy}, A)
- itérations $k \geq 1$ jusqu'à convergence
 - connaissant $(\theta_{k-1}, A_{k-1}^*)$, on calcule σ_k par résolution du problème d'élasticité linéaire (9)
 - connaissant σ_k , on calcule les nouveaux paramètres de forme (θ_k, A_k^*) avec les formules explicites d'optimalité (10) et (11).
- après convergence vers la forme composite optimale : **pénalisation** des densités intermédiaires pour contraindre θ à valoir 0 ou 1, on substitue

$$\theta_{pen} = \frac{1 - \cos \pi \theta_{opt}}{2}$$

à θ_{opt} pour le calcul de A^* pendant quelques itérations. La pénalisation permet de reproduire, au moins partiellement, la microstructure à l'échelle du maillage, donc, en quelque sorte de projeter la forme composite sur l'ensemble des formes classiques.

Le critère de convergence considéré est basé sur l'évolution de la fonction-coût entre deux itérations successives.

$$\eta_n = \left| 1 - \frac{J(\theta_n, A_n^*)}{J(\theta_{n-1}, A_{n-1}^*)} \right|$$

Dès que η_n est plus petit qu'un certain η fixé, on considère que l'algorithme a convergé.

Détails de programmation

En pratique, au lieu d'utiliser un matériau inclusion B vide, ce qui ferait apparaître des matrices singulières, on approche le vide par un matériau "mou" ϵA ($\epsilon \ll 1$), cette substitution peut être justifiée mathématiquement.

Aussi, on utilise de préférence dans le code une notation dite "ingénieur" pour exprimer les matrices 2×2 symétriques en terme de vecteur à trois composantes, tout en conservant leur norme, et ainsi rendre l'inversion des tenseurs d'ordre 4, alors exprimé sous forme de matrice 3×3 , plus aisée.

On note par exemple σ sous la forme

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^* = \begin{bmatrix} A_{1111}^* & A_{1122}^* & \sqrt{2}A_{1112}^* \\ A_{1122}^* & A_{2222}^* & \sqrt{2}A_{1222}^* \\ \sqrt{2}A_{1112}^* & \sqrt{2}A_{1222}^* & 2A_{1212}^* \end{bmatrix}$$

On a alors toujours :

$$A^* \sigma \cdot \sigma = \sum_{(i,j,k,l) \in \{1,2\}^4} A_{ijkl}^* \sigma_{ij} \sigma_{kl},$$

puisque l'on déduit des propriétés de symétries de σ et de la forme quadratique A^* les égalités suivantes :

$$\forall (i, j, k, l) \in \{1, 2\}^4 \quad \begin{cases} A_{ijkl}^* = A_{jikl}^* \\ A_{ijkl}^* = A_{ijlk}^* \\ A_{ijkl}^* = A_{klij}^* \end{cases}$$

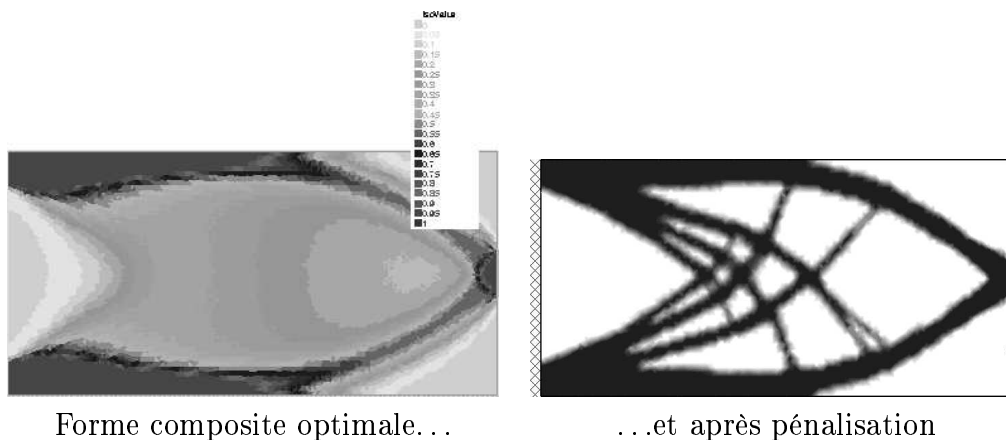
Ainsi la matrice 3×3 représentant l'inverse de la forme quadratique A^* (au sens où $(A^* A^{*-1}) \sigma \cdot \sigma = |\sigma|^2$, pour tout tenseur σ symétrique d'ordre 2) est l'inverse de la matrice 3×3 représentant A^* .

3.4 Résultats

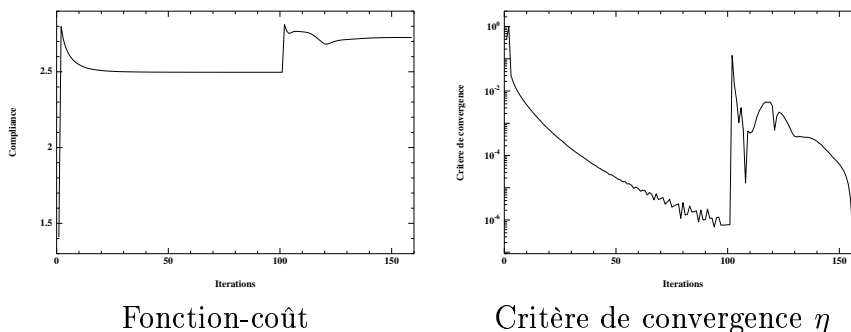
Les programmes que j'ai écrit pour FREEFEM++ m'ont permis d'obtenir les résultats suivants, conformes à la théorie comme à l'intuition.

3.4.1 La console

Le problème de la console (cantilever) est un grand classique en optimisation de formes. Les conditions aux limites sont figurées sur les schémas.

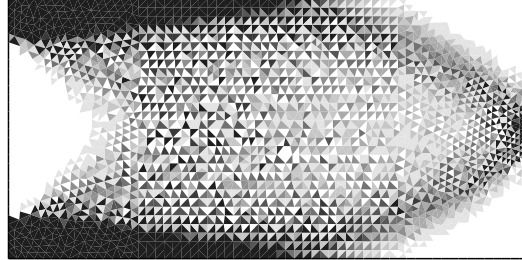


Voici les courbes figurant l'évolution de la fonction-coût et du critère de convergence. On repère nettement le début de la pénalisation qui fait naturellement remonter la compliance.



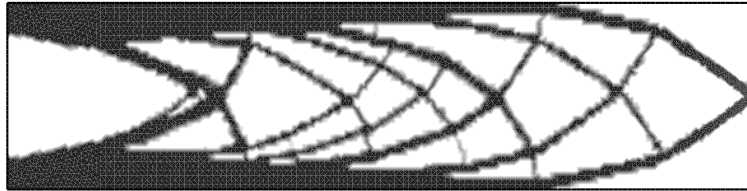
Ici, il y a eu 100 itérations puis 60 étapes de pénalisation, on a cherché à obtenir 40% du volume occupé. En ce qui concerne le maillage, il y a 11775 triangles, et les interpolations en éléments finis sont constantes par morceaux (P0) pour θ et pour A^* , et de degré 2 par morceaux (P2) pour u . On peut envisager d'alléger les calculs en u (P1) pour favoriser la résolution en θ en P1,

mais alors apparaîtraient des instabilités en "damier". Il faudrait alors adjoindre à l'algorithme une étape de régularisation, (en utilisant par exemple une deuxième base pour évaluer θ , ce qui permettrait de "moyenner" les damiers, par une convolution).



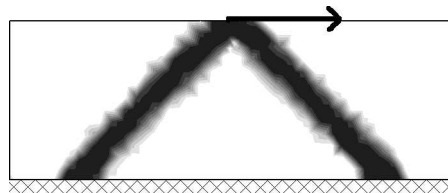
Instabilités en damier

Voici une console occupant un domaine plus allongé. On voit apparaître une structure assez complexe d'entrecroisement de barres. A noter que plus on raffine le maillage, plus on obtient a priori, de détails fins, puisque l'on "projette" la forme composite optimale sur un espace plus grand. Cependant déjà dans cet exemple, le calcul est relativement long (de l'ordre de 30min sur un P4 2.4GHz).



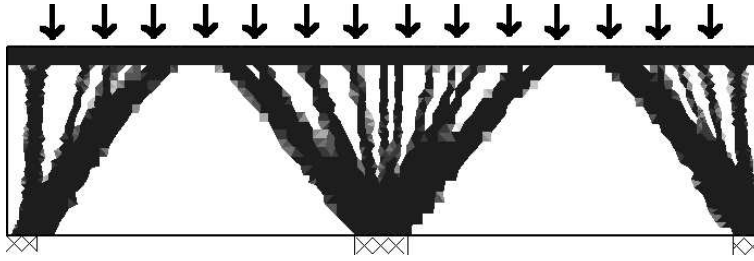
Console longue (100+60 itérations, 14713 triangles, 40% du volume)

Maintenant, le problème de la console courte, dont le résultat est connu comme étant un assemblage de deux barres se joignant à angle droit (théorie de treillis de Michell). A noter ici que le choix d'un ϵ trop faible ne donne pas un résultat conforme à la théorie puisque l'on obtient un angle plus faible que 90° . Ce problème semble assez spécifique aux maillages triangulaires que FREEFEM++ peut créer, car ne se pose pas dans le cas des maillages rectangulaires qui sont généralement utilisés.

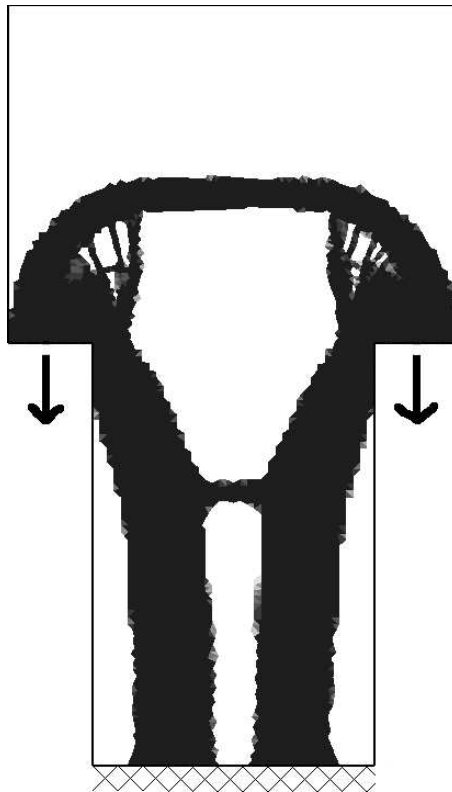


Console courte pour $\epsilon = 10^{-2}$

3.4.2 Autres exemples



Un pont à deux arches



Un pylône

4 Méthode de convexification

4.1 Principe de la méthode

Dans la partie précédente, la pénalisation permettait de "projeter" la forme composite optimale sur les formes classiques, en reproduisant en partie la microstructure à l'échelle du maillage. L'idée est ici d'oublier la microstructure introduite par le tenseur A^* pour ne plus introduire qu'un seul paramètre de forme : la densité de matière $\theta \in [0, 1]$. La méthode de convexification, aussi appelée méthode des "matériaux fictifs" consiste donc à étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} \sigma = \theta(x)Ae(u) & e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t) \\ \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \cdot n = f & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

où $\theta(x)$ est une fonction de densité de matière prenant ses valeurs entre 0 et 1. Ce problème de minimisation est une **convexification** du problème original de minimisation sur les fonctions caractéristiques $\chi(x) \in \{0, 1\}$, car l'ensemble des fonctions de densité $0 \leq \theta(x) \leq 1$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des fonctions caractéristiques.

4.2 La méthode SIMP

La méthode SIMP (Simplified Isotropic Material with Penalization) est une variante de la méthode de convexification, très utilisée en pratique. Elle consiste à pénaliser différemment de ce qu'on a vu jusqu'alors. On va en effet remplacer le tenseur d'élasticité $\theta(x)A$ par $\theta(x)^p A$, avec $p \geq 1$. On recrée ainsi une pénalisation, mais il faut prendre garde à ne pas démarrer l'algorithme itératif avec une valeur trop importante de p , qui pourrait entraîner une convergence prématurée dans un minimum local. Toute l'astuce consiste donc à augmenter progressivement la valeur de p , tout en partant de $p = 1$ qui correspond au cas de la convexification.

4.2.1 Minimisation de la compliance

Le critère à minimiser est une somme pondérée de la compliance et du poids :

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot u + \ell \int_{\Omega} \theta(x), \quad (\ell \geq 0) \text{ où la compliance vaut aussi } \int_{\Omega} (\theta(x)A)^{-1} \sigma \cdot \sigma$$

En utilisant le principe de minimisation de l'énergie complémentaire et en

remarquant que l'ordre des minimisations peut être changé, on obtient :

$$\min_{\substack{\text{div}\tau=0 \text{ dans } \Omega \\ \tau \cdot n=f \text{ sur } \partial\Omega}} \inf_{0 \leq \theta(x) \leq 1} \int_{\Omega} ((\theta(x)A)^{-1}\tau \cdot \tau + \ell \theta(x)) dx. \quad (13)$$

D'où le résultat suivant :

Théorème 4.1 *Il existe au moins une solution au problème de minimisation (13) dans l'espace $(\theta, \tau) \in L^\infty(\Omega, [0, 1]) \times L^2(\Omega, \mathcal{M}_N^s)$, où \mathcal{M}_N^s est l'ensemble des matrices symétriques d'ordre N . C'est à dire qu'il existe une forme "convexifiée" optimale.*

Démonstration

$$\begin{aligned} \text{Soit } \phi : \mathbb{R}^{*+} \times \mathcal{M}_N^s &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, \sigma) &\longmapsto a^{-1}A^{-1}\sigma \cdot \sigma \end{aligned}$$

ϕ est convexe et vérifie

$$\phi(a, \sigma) = \phi(a_0, \sigma_0) + D\phi(a_0, \sigma_0) \cdot (a - a_0, \sigma - \sigma_0) + \phi(a, \sigma - aa_0^{-1}\sigma_0),$$

où la dérivée $D\phi$ est donnée par

$$D\phi(a_0, \sigma_0) \cdot (b, \tau) = -\frac{b}{a_0^2}A^{-1}\sigma_0 \cdot \sigma_0 + 2a_0^{-1}A^{-1}\sigma_0 \cdot \tau$$

La convexité de ϕ ainsi que la propriété d'"infinie à l'infini" nous assure alors de l'existence d'un minimum global. Si on minimise en τ à θ fixé, on retrouve bien sûr le problème (12). Mieux : à τ fixé, la minimisation en θ donne une valeur unique :

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } A^{-1}\tau \cdot \tau \geq \ell \\ \sqrt{\ell^{-1}A^{-1}\tau \cdot \tau} & \text{si } A^{-1}\tau \cdot \tau \leq \ell \end{cases} \quad (14)$$

Cela permet de construire un algorithme de directions alternées :

- Initialisation de la forme θ_0
- Itérations $k \geq 1$ jusqu'à convergence :
 - étant donnée une forme θ_{k-1} , on calcule les contraintes σ_k par résolution du problème (12)
 - étant donné un tenseur des contraintes σ_k , on calcule la nouvelle densité de forme θ_k avec la formule explicite (14), en ajustant ℓ afin de conserver $\int_{\Omega} \theta$ par exemple.
- il faut encore adjoindre à cela une phase de pénalisation après convergence, qui permettra de "projeter" la forme convexifiée sur une forme classique, en favorisant les valeurs de θ proches de 0 ou 1.

Cependant pendant la phase de pénalisation, on ne change θ en θ^p que dans l'équation d'élasticité. Il nous faut donc recalculer une formule explicite analogue à (14). En prenant a^{-p} dans l'expression de ϕ , au lieu de a^{-1} , on trouve pour sa dérivée suivant a : $-pa^{-(p+1)}A^{-1}\sigma \cdot \sigma$, d'où

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } pA^{-1}\tau \cdot \tau \geq \ell \\ p^{+1}\sqrt{p\ell^{-1}A^{-1}\tau \cdot \tau} & \text{si } pA^{-1}\tau \cdot \tau \leq \ell \end{cases}$$

4.2.2 Cas d'un déplacement cible

On va ici devoir utiliser la notion d'état adjoint, introduite en 2.3, en suivant le procédé décrit en 2.4. Ici $j(u(\theta)) = |u - u_0|^2$, donc $j'(u) = 2(u - u_0)$. On reprend donc le même algorithme, en modifiant toutefois les équations durant la phase de pénalisation.

u_n sera donc solution de :

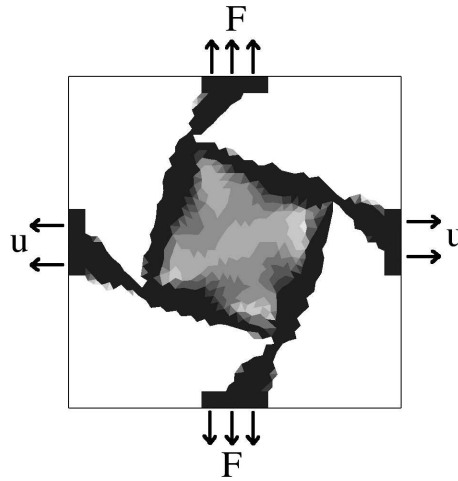
$$\forall v \in V \int_{\Omega} \theta^p Ae(u_n) \cdot e(v) dx = \int_{\Gamma_N} g \cdot v ds$$

et p_n sera solution de :

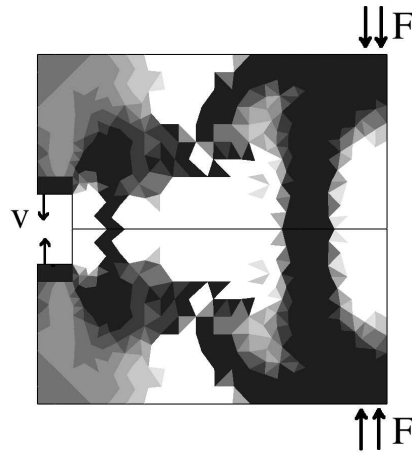
$$\forall v \in V \int_{\Omega} \theta^p Ae(p_n) \cdot e(v) dx = - \int_{\Omega} j'(u_n) \cdot v dx$$

4.3 Résultats

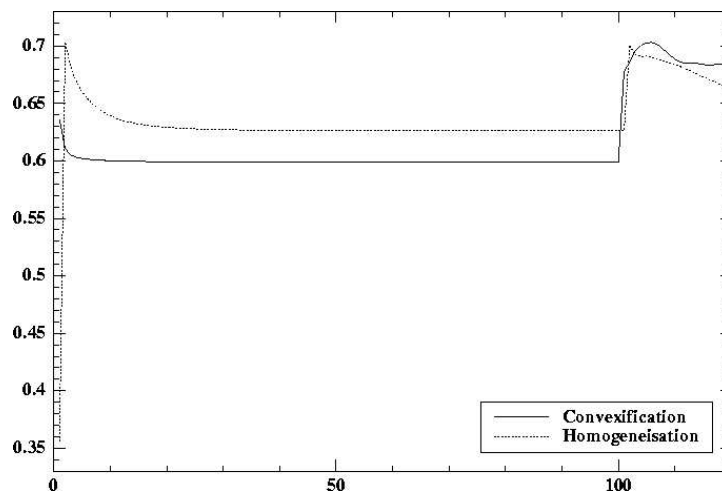
On peut programmer cette méthode dans le cas d'une approche de déplacement cible, par exemple pour créer une structure qui s'étend latéralement lorsqu'on l'étire longitudinalement :



ou bien une structure de pince :



Pour la programmation de ces exemples, on s'aperçoit de toute la difficulté du pilotage du paramètre de pénalisation, aussi n'ai-je pas obtenu de forme pénalisée très satisfaisante, c'est pourquoi je ne figure ici que les formes convexifiées optimales qui donnent déjà un bon aperçu intuitif de ce que l'on peut obtenir après pénalisation. Ce genre de mécanismes sans articulation, qui agissent seulement par déformation d'une forme, sont notamment étudiés dans le but d'en faire des micromécanismes.



Ci-dessus, les courbes comparatives de l'évolution de la fonction-coût dans le cas de la console, pour deux méthodes différentes. On voit que la forme convexifiée optimale est meilleure que la forme homogénéisée optimale, cependant après pénalisation et retour aux formes classiques, la situation s'inverse.

Références

- [1] ALLAIRE G. - *Conception optimale de structures* - Cours de l'École Polytechnique (2004)
- [2] ALLAIRE G. - *Shape Optimisation by the Homogenisation Method* - Springer-Verlag, New York (2001)
- [3] ALLAIRE G., BONNETIER E., FRANCFORT G. et JOUVE F. - *Shape optimisation by the homogenisation method* - *Numerische Mathematik*, 76 :27-68, (1997)
- [4] HECHT F., PIRONNEAU O. et OHTSUKA K. - *FREEFEM++ Manual, version 1.40* - Distribué avec le logiciel sur <http://www.freefem.org>