

CONCEPTION OPTIMALE DE STRUCTURES

G. ALLAIRE

6 Janvier 2010

CHAPITRE I

INTRODUCTION A L'OPTIMISATION DE STRUCTURES

GENERALITES

Un problème d'optimisation de structures (ou de formes) est défini par trois données:

- ➡ un **modèle** (typiquement une équation aux dérivées partielles) qui permet d'évaluer (on dit aussi d'analyser) le comportement mécanique d'une structure,
- ➡ un **critère** que l'on cherche à minimiser ou maximiser, et éventuellement plusieurs critères (on parle aussi de fonction objectif ou coût),
- ➡ un **ensemble admissible** de variables d'optimisation qui tient compte d'éventuelles contraintes que l'on impose aux variables.

Parmi les problèmes d'optimisation de formes on peut distinguer trois grandes catégories, du plus “facile” au plus “difficile” :

- ➡ l'optimisation de formes **paramétrique** où les formes sont paramétrées par un nombre réduit de variables (par exemple, une épaisseur, un diamètre, des dimensions), ce qui limite considérablement la variété des formes possibles (ou admissibles),
- ➡ l'optimisation de formes **géométrique** où, à partir d'une forme initiale, on varie la position des frontières de la forme (sans toutefois changer la topologie de la forme, c'est-à-dire le nombre de trous en 2-d),
- ➡ l'optimisation de formes **topologique** où l'on cherche, sans aucune restriction explicite ou implicite, la meilleure forme possible quitte à changer de topologie.

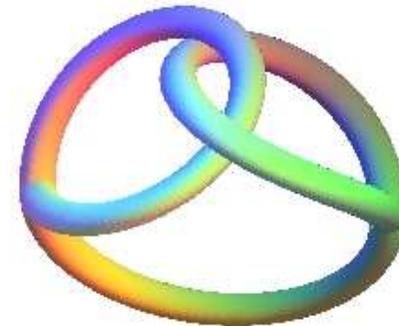
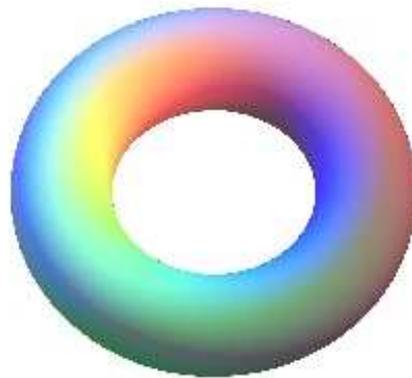
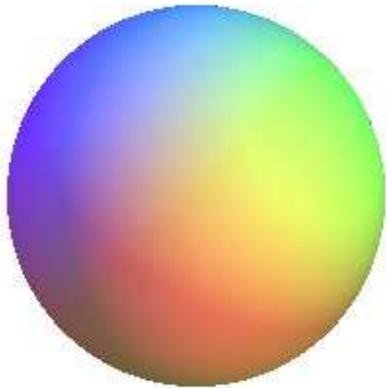
Définition de la topologie

Deux formes ont la même topologie si on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue.

En dimension 2 la topologie est caractérisée par le nombre de composantes connexes du bord ou de trous.

En dimension 3 c'est plus compliqué ! Il faut tenir compte du nombre de composantes connexes du bord mais aussi du nombre "d'anses" ou de "boucles".

(une boule \neq une boule creuse \neq un tore \neq un bretzel)



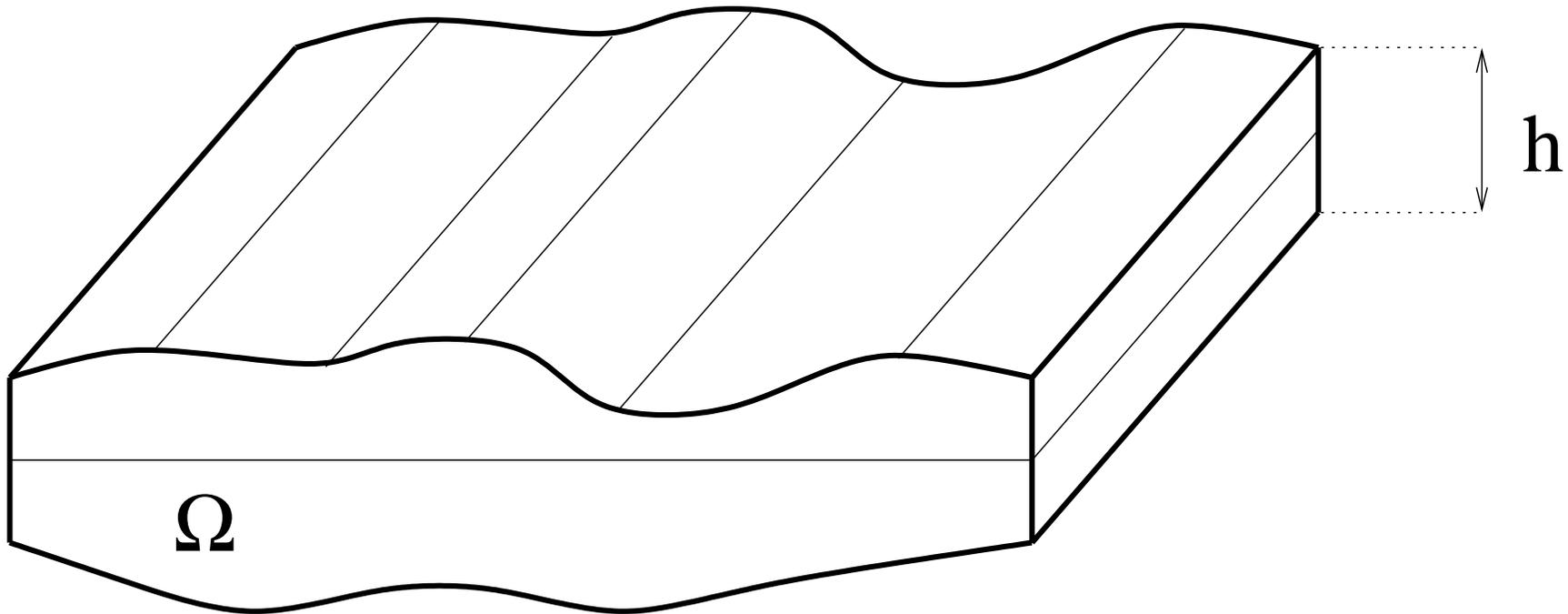
BUTS DU COURS

1. calcul numérique de structures ou formes optimales (approche **“automatique”** et non par **“essais et erreurs”**).
2. conditions d’optimalité (nécessaires et/ou suffisantes) qui sont très importantes pour la théorie (caractérisation des formes optimales) et pour le numérique (elles sont à la base **d’algorithmes** du type méthode de gradient).
3. survol des questions théoriques sur l’existence, l’unicité, ou les propriétés qualitatives des solutions ; nous n’en parlerons que lorsque cela a des implications directes sur les questions de calcul numérique.

On privilégie une approche **continue** des problèmes d’optimisation de formes, au détriment d’une approche **discrète**.

Exemple d'optimisation paramétrique

Optimisation de l'épaisseur d'une membrane



⇒ Ω = surface moyenne (plane) de la membrane

⇒ h = épaisseur dans la direction orthogonale à la surface moyenne

La déformation de la membrane est modélisée par son déplacement vertical $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, solution de l'équation aux dérivées partielles suivante, dite **modèle de membrane**,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec h , l'épaisseur limitée par des valeurs minimale et maximale

$$0 < h_{min} \leq h(x) \leq h_{max} < +\infty.$$

L'épaisseur h sera notre variable d'optimisation.

Il s'agit d'**optimisation paramétrique** car le domaine Ω ne change pas.

L'ensemble des épaisseurs admissibles est

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ h(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } 0 < h_{min} \leq h(x) \leq h_{max} \text{ et } \int_{\Omega} h(x) dx = h_0 |\Omega| \right\},$$

où h_0 est une épaisseur moyenne imposée.

Contraintes supplémentaires possibles: selon le procédé de fabrication de la membrane, on peut autoriser des épaisseurs $h(x)$ discontinues, ou au contraire exiger que la pente $h'(x)$ soit bornée, voire que le rayon de courbure (lié à la dérivée seconde $h''(x)$) soit minoré (pour éviter d'avoir à usiner des détails trop petits).

Le **critère d'optimisation** est lié à une propriété mécanique de la membrane, évaluée à l'aide du déplacement u , solution du modèle

$$J(h) = \int_{\Omega} j(u) dx,$$

où u dépend bien sûr de h à travers l'équation. Par exemple, la rigidité d'une structure est souvent mesurée par la **compliance**, ou travail des forces extérieures: **moins la structure travaille, plus elle est rigide** (attention ! compliance = - rigidité). Dans ce cas on a

$$j(u) = fu.$$

Un autre exemple consiste à obtenir (ou du moins s'approcher) d'un **déplacement cible** $u_0(x)$, auquel cas

$$j(u) = |u - u_0|^2.$$

Ce seront les deux critères principaux étudiés dans ce cours.

Autres exemples de critère

☞ On introduit le vecteur des contraintes $\sigma(x) = \mu h(x) \nabla u(x)$, et on pose

$$J(h) = \sup_{x \in \Omega} |\sigma(x)|$$

ou plus généralement, pour $p \geq 1$,

$$J(h) = \left(\int_{\Omega} |\sigma|^p dx \right)^{1/p}.$$

☞ On introduit la première fréquence propre de vibration ω , définie par

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h \nabla u) = \omega^2 u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et on pose $J(h) = -\omega$ pour maximiser cette fréquence propre de vibration.

Autres exemples de critère (suite)

➡ Optimisation multi-chargements: pour n forces données $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ on a les déplacements u_i

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u_i) = f_i & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec le critère

$$J(h) = \sum_{i=1}^n c_i \int_{\Omega} j(u_i) dx,$$

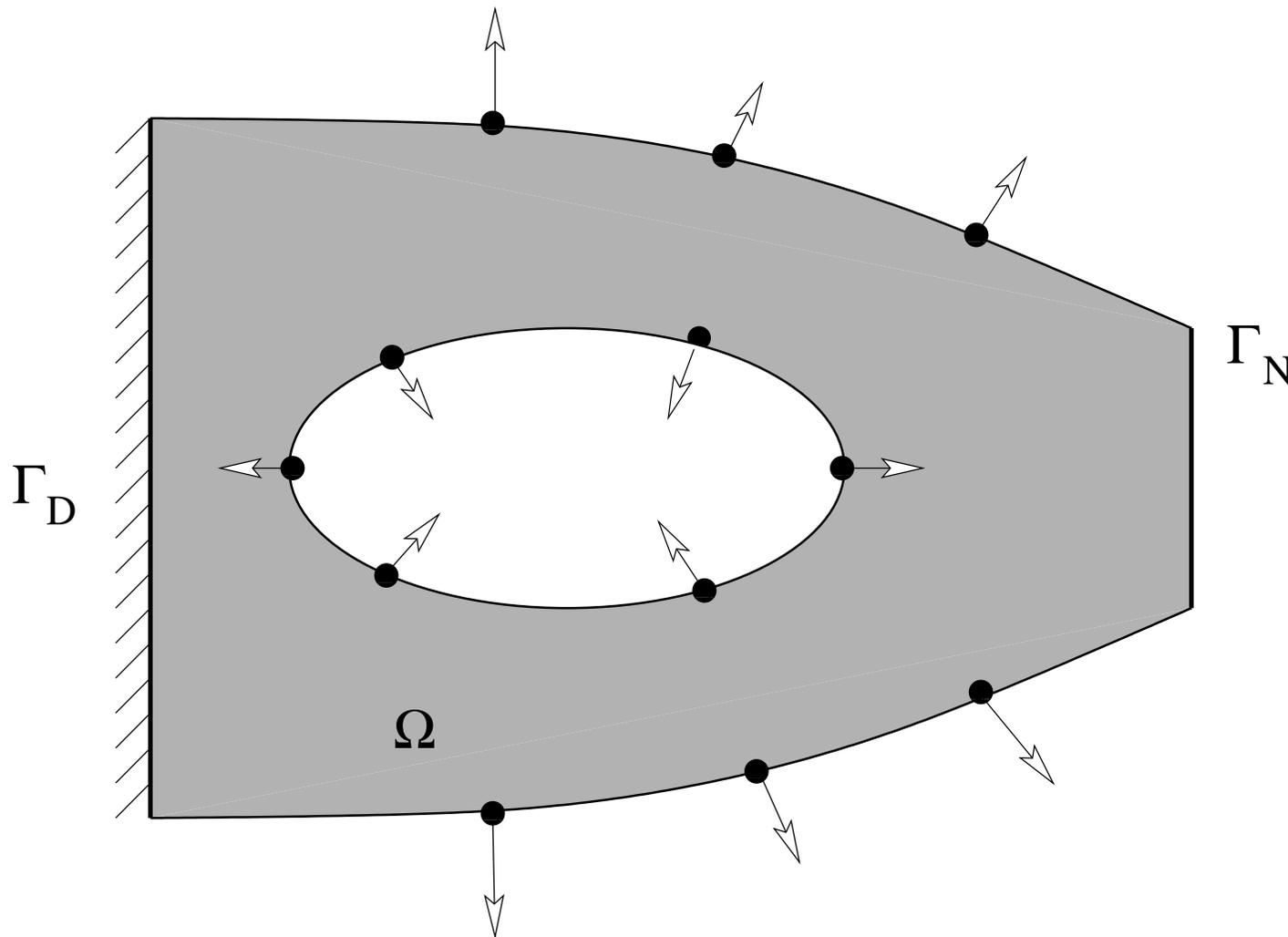
avec c_i , des coefficients fixés, ou

$$J(h) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\int_{\Omega} j(u_i) dx \right).$$

➡ Optimisation multi-critères: somme pondérée des critères, ou front de Paréto.

Exemple d'optimisation géométrique

Optimisation de la forme d'une membrane



Un domaine de référence de la membrane est noté Ω , et son bord est divisé en trois parties disjointes

$$\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D,$$

où Γ est la partie **variable** de la frontière, Γ_D est une partie fixe de la frontière sur laquelle la membrane est fixée, et Γ_N est aussi une partie fixe de la frontière sur laquelle sont appliqués les efforts g .

Le déplacement vertical u est solution du **modèle de membrane**

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Désormais l'épaisseur de la membrane est fixe, égale à 1.

L'ensemble des formes admissibles est donc

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ tel que } \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } \int_{\Omega} dx = V_0 \right\},$$

où V_0 est un volume imposé. Le problème d'optimisation géométrique de la forme d'une membrane s'écrit

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega),$$

avec comme **critère**, la compliance

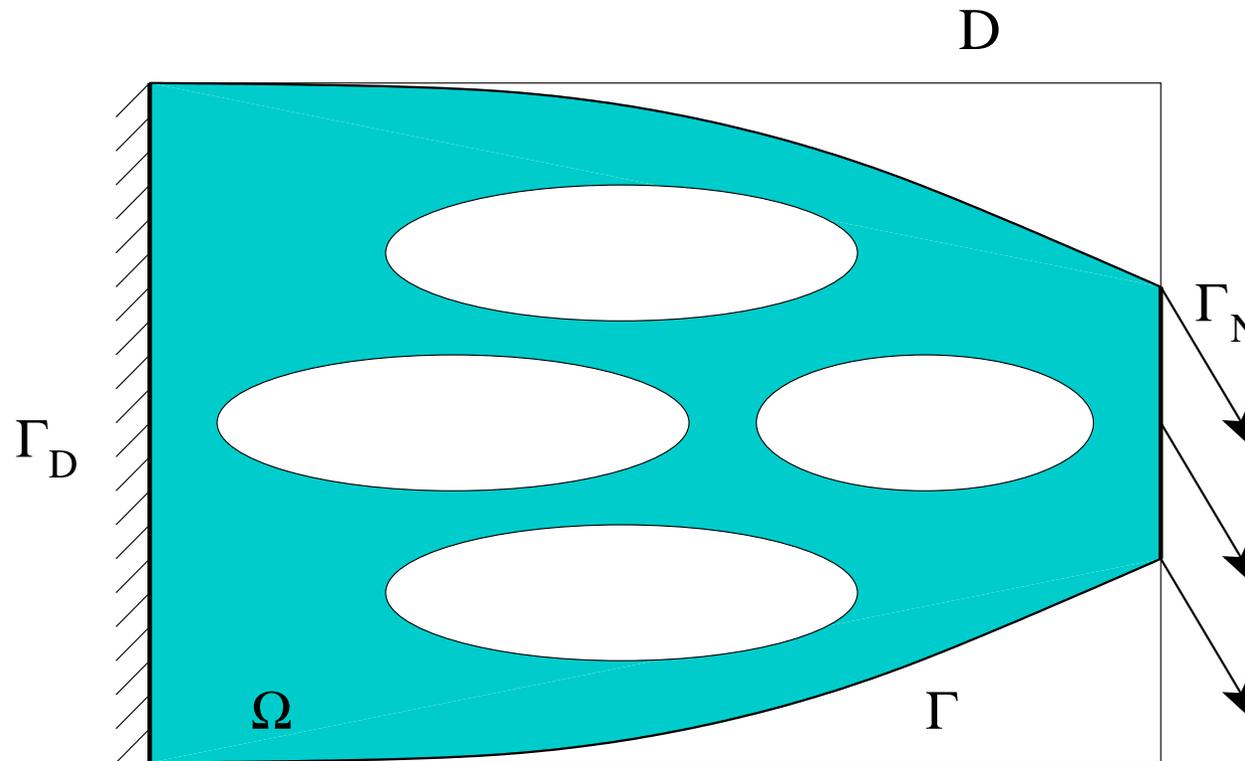
$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} gu \, dx,$$

ou un critère de moindre carré pour atteindre un déplacement cible $u_0(x)$

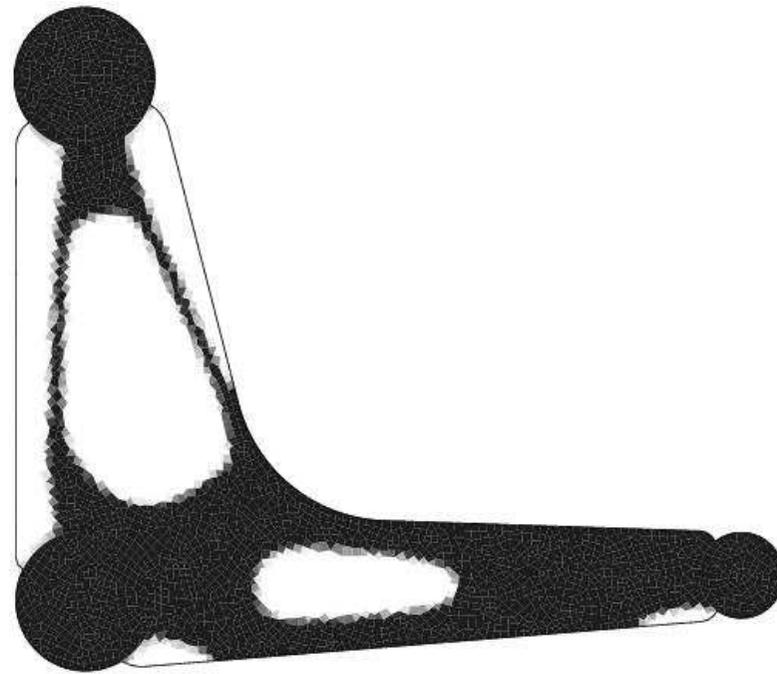
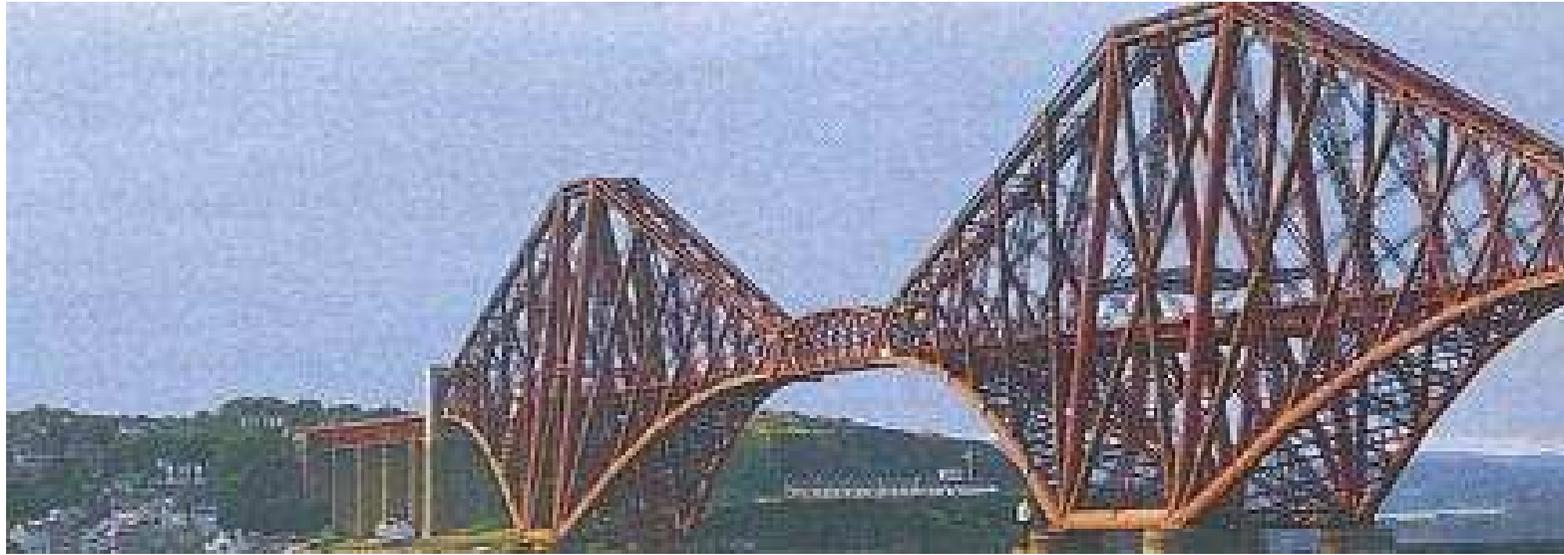
$$J(\Omega) = \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx.$$

La vraie variable d'optimisation est le bord libre Γ .

Exemple d'optimisation topologique



Il ne s'agit plus seulement de faire varier la position d'une frontière Γ mais aussi de créer ou faire disparaître des nouvelles frontières. **On optimise la topologie.**



Optimisation de forme en élasticité

Le **modèle de l'élasticité linéarisée** donne le champ de déplacement $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ comme la solution du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(A e(u)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ (A e(u))n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ (A e(u))n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

avec $e(u) = (\nabla u + (\nabla u)^t)/2$, et $A\xi = 2\mu\xi + \lambda(\operatorname{tr}\xi)\operatorname{Id}$, où μ et λ sont les coefficients de Lamé.

Le bord du domaine est encore divisé en trois parties disjointes

$$\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D,$$

où Γ est la partie variable ou **optimisable** de la frontière.

L'ensemble des formes admissibles est encore

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ tel que } \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } \int_{\Omega} dx = V_0 \right\},$$

où V_0 est un volume imposé. Le **critère** est soit la **compliance**

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, dx,$$

où un **déplacement cible** $u_0(x)$

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} |u - u_0|^2 \, dx.$$

Comme précédemment, le problème d'optimisation de forme s'écrit

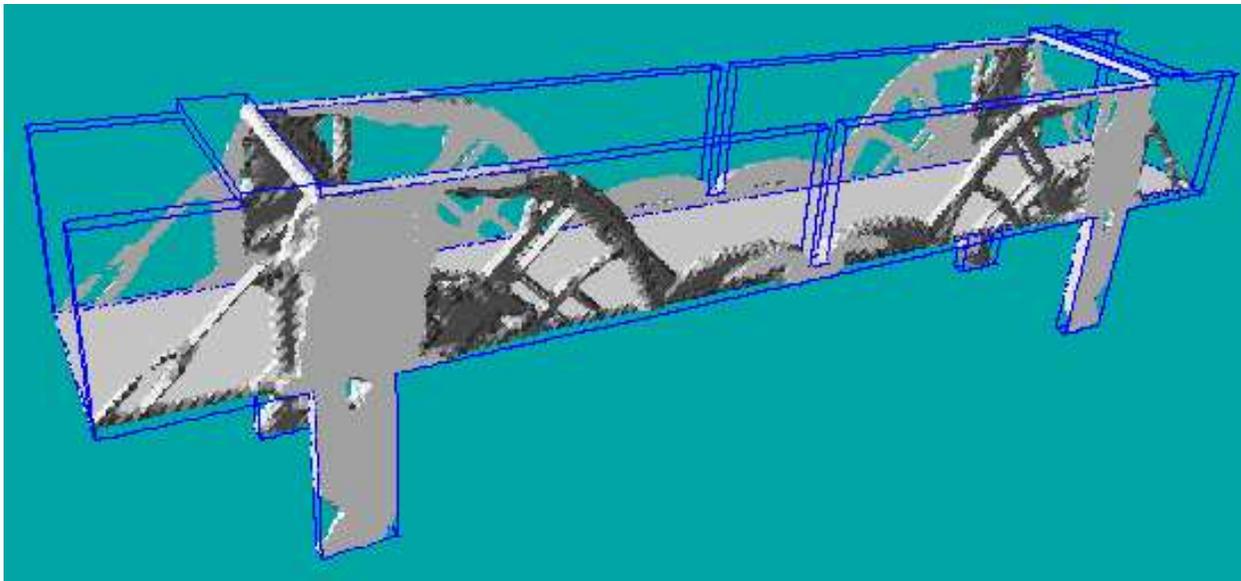
$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega).$$

Approches possibles: **paramétrique, géométrique, topologique.**

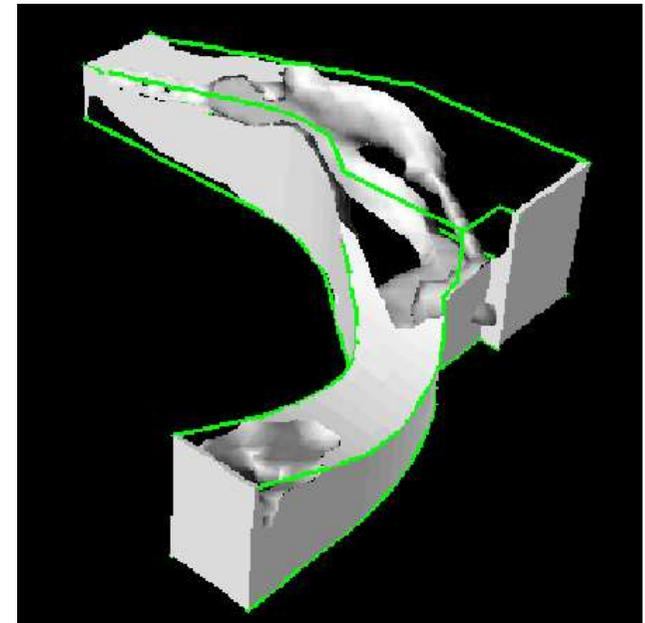
Applications

Voir le site web <http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo> (et ses liens).

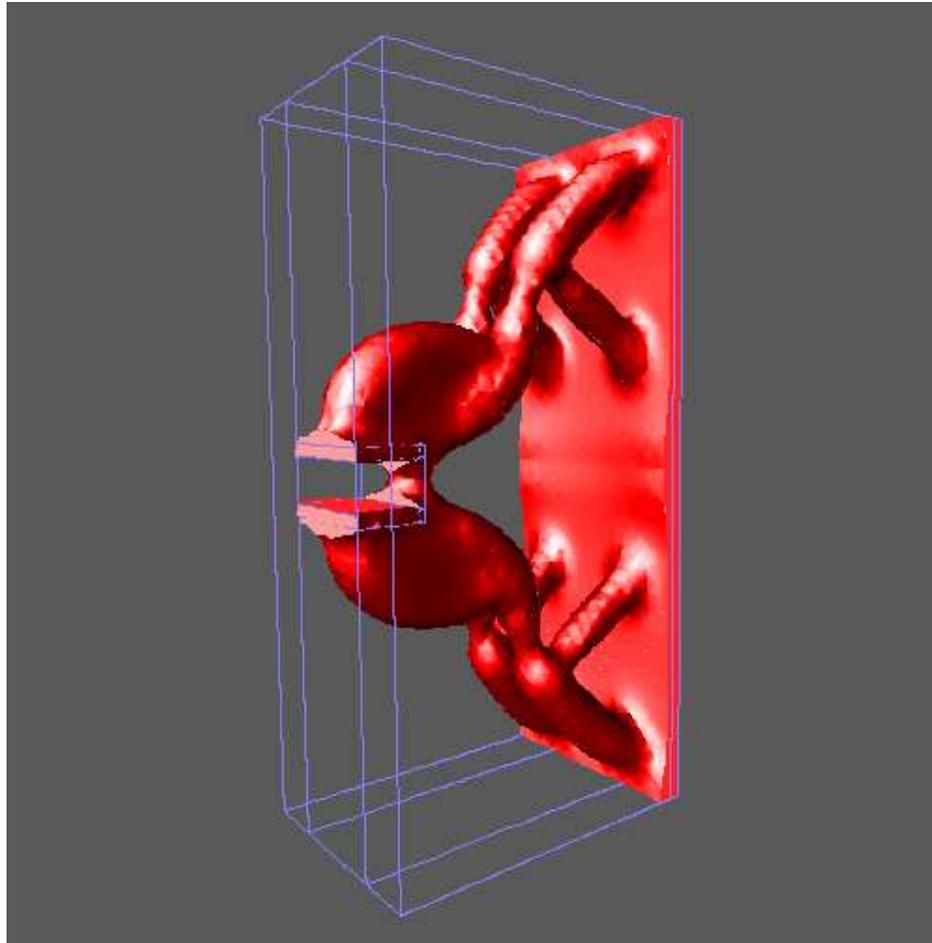
Génie civil



Construction mécanique



Micromécanique (MEMS)



Aéronautique

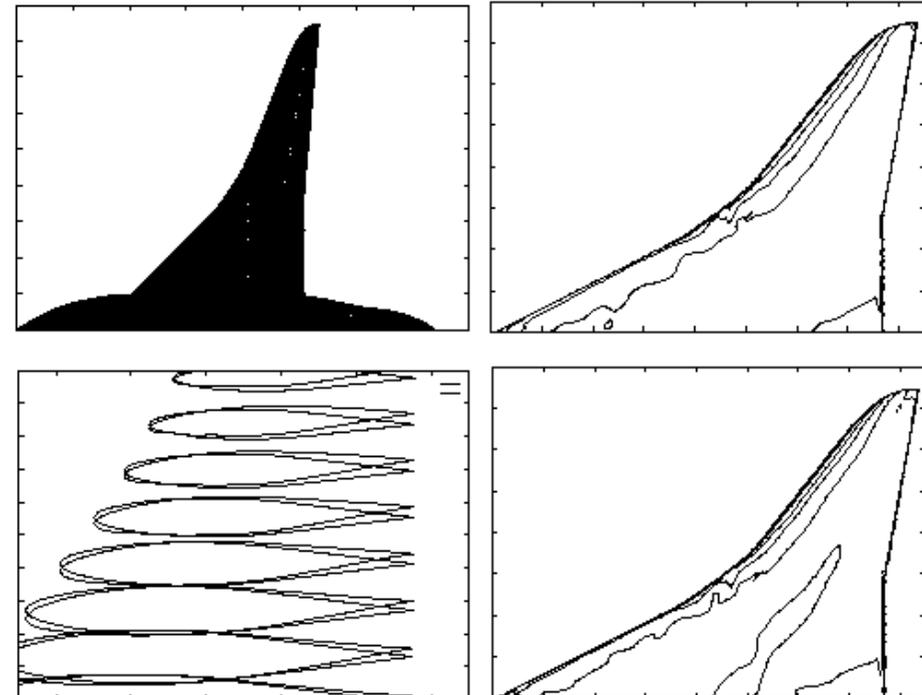


Figure 1: 3D optimization for a supersonic civil transport: top left: a view from above of the airplane with the trace of the mesh. Top right: Mach lines after optimization (minimal drag) and bottom right shows the same before optimization. Finally the bottom left figure shows cross sections of the initial (fouled) wings and optimized wings.

Un exemple industriel chez Airbus







Logiciels industriels

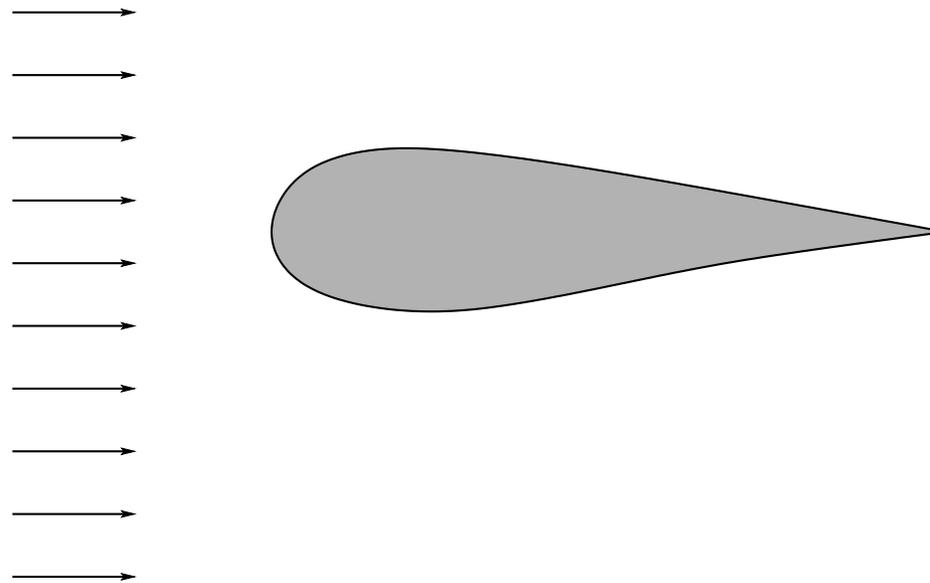
Optistruct, Ansys DesignSpace, Genesis, MSC-Nastran, Tosca, devDept...



Exemple en mécanique des fluides

Optimisation d'un profil d'aile

Minimisation de la traînée et maximisation de la portance.



Vitesse constante à l'infini U_0 .

Écoulement potentiel: simplification des équations de Navier-Stokes pour un fluide parfait incompressible et irrotationnel en régime stationnaire. La vitesse U dérive d'un potentiel scalaire ϕ

$$U = \nabla\phi.$$

Loi de Bernoulli pour la pression

$$p = p_0 - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\phi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\phi(x) - U_0 \cdot x) = 0 & \text{à l'infini} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial P, \end{array} \right.$$

Paradoxe de d'Alembert: **traînée nulle !**

On choisit un critère de distribution de pression “cible”

$$J(P) = \int_{\partial P} j(p) ds ,$$

où la fonction j est typiquement un critère de moindre carré pour obtenir une “pression cible” sur le profil

$$j(p) = |p - p_{cible}|^2 .$$

Le problème **d'optimisation de forme géométrique** s'écrit

$$\inf_{P \in \mathcal{U}_{ad}} J(P) .$$

A priori, il n'y a pas de problème d'optimisation **topologique** pour un profil d'aile...

Optimisation paramétrique d'un profil mince

Exemple de réduction d'optimisation de forme géométrique en optimisation de forme paramétrique.

Profil mince P dont les bords (extrados et intrados) sont définis par

$$y = f^+(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L, \quad y = f^-(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L,$$

où L est la longueur de la corde du profil. On suppose aussi que la vitesse à l'infini U_0 est alignée dans la direction de l'axe des x . La condition aux limites de Neumann pour le potentiel

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{df^\pm}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial P$$

devient en première approximation

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = U_0 \frac{df^\pm}{dx} \quad \text{sur le segment} \quad [0, L].$$

Problème d'optimisation paramétrique avec $\Sigma = [0, L]$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\phi = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Sigma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\phi(x) - U_0 \cdot x) = 0 & \text{à l'infini} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = U_0 \frac{df^+}{dx} & \text{sur } \Sigma^+ \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = U_0 \frac{df^-}{dx} & \text{sur } \Sigma^-. \end{array} \right.$$

$$\inf_{f^\pm \in \mathcal{U}_{ad}} J(f^\pm),$$

avec

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \begin{array}{l} f^+(x) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f^-(x) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^- \end{array} \text{ tel que } f^+(0) = f^-(0) = f^+(L) = f^-(L) = 0 \right\}.$$

Désormais le domaine Ω est **fixe**.

Choix de la modélisation

La modélisation est typiquement un problème pour l'ingénieur.

- ➔ Choix du modèle: **compromis** entre précision et coût de calcul (l'optimisation nécessite de nombreuses résolutions du modèle).
- ➔ Choix du critère: difficulté de **mesurer** une propriété qualitative, difficulté de **combiner** plusieurs critères.
- ➔ Choix de l'ensemble admissible: **sélectionner** les contraintes importantes du point de vue de l'application mais aussi du point de vue numérique.

On en parlera peu en cours. C'est par contre un aspect important dans les travaux pratiques (TMS).

Autres domaines proches de l'optimisation de formes

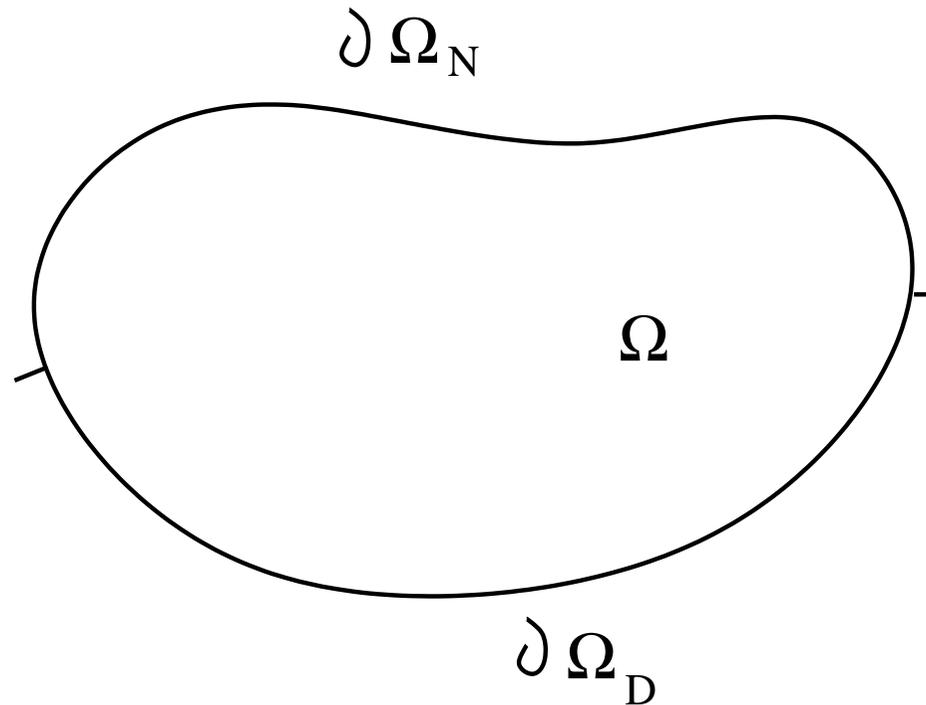
Les techniques du cours sont aussi utiles pour les problèmes suivants.

- ➔ Contrôle optimal.
- ➔ Problèmes inverses.
- ➔ Analyse de sensibilité aux paramètres.

CHAPITRE II

RAPPELS D'ANALYSE NUMERIQUE

Problème aux limites



$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega_N \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} n = \text{normale unité extérieure,} \\ \text{notation: } \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n. \end{array}$$

Modèle de membrane. f = forces volumiques, g = forces surfaciques.

Méthode fondamentale qu'il faut connaître:

L'approche variationnelle

- ➡ Problème aux limites = e.d.p. + conditions aux limites
- ➡ On démontre que le problème aux limites **est équivalent** à une formulation variationnelle.
- ➡ Mécaniquement, la formulation variationnelle est le principe des puissances virtuelles.
- ➡ Une **formulation variationnelle** s'écrit

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

- ➡ Cela permet d'avoir une **théorie d'existence** et de construire des méthodes numériques de calcul (**éléments finis**).
- ➡ C'est aussi l'outil qu'on va utiliser en optimisation de formes.

Ingrédients techniques

Formule de Green:

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) ds$$

Espaces de Sobolev (fonctions d'énergie finie):

$$u \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2) dx < +\infty$$

$$u \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow u \in H^1(\Omega) \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

- ☞ On choisit un espace V du type espace de Sobolev.
- ☞ Pour obtenir a et L , on multiplie l'équation par une **fonction test**.
- ☞ On intègre par parties en utilisant la formule de Green.
- ☞ On utilise les **conditions aux limites** pour les termes de bord.

Recette

Pour se souvenir de la formule de Green: n'apprendre que la formule suivante

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x)n_i ds$$

avec $n_i(x)$ la i -ème composante du vecteur normal unité extérieur à $\partial\Omega$.

Toutes les formules de Green possibles se déduisent de la précédente.

Par exemple, en prenant $w = v \frac{\partial u}{\partial x_i}$ et en sommant en i , on obtient

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) ds$$

Formulation variationnelle

On intègre par parties

$$\int_{\Omega} f v \, dx = - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds$$

☞ On **impose** la C.L. de Dirichlet à la fonction test.

☞ On **ne fait rien** pour la C.L. de Neumann.

Espace de Sobolev adéquat:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}$$

On simplifie pour obtenir: Trouver $u \in V$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega_N} g v \, ds \quad \forall v \in V.$$

formulation variationnelle \Leftrightarrow **problème aux limites.**

Théorème de Lax-Milgram \Rightarrow existence et unicité de $u \in V$

Vérification

Montrons que u solution de la F.V. $\Rightarrow u$ solution du problème aux limites

Soit $u \in V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega_N} g v \, ds \quad \forall v \in V.$$

On intègre par parties

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega_N} g v \, ds \quad \forall v \in V.$$

On prend d'abord v à support compact dans Ω et quelconque, donc

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega.$$

La F.V. devient alors

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\partial\Omega_N} g v \, ds \quad \forall v \in V.$$

On prend ensuite v à trace quelconque sur $\partial\Omega_N$, donc

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega_N.$$

On retrouve la C.L. de Dirichlet $u = 0$ sur $\partial\Omega_D$ car $u \in V$.

Finalement, u est solution (faible) du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega_N. \end{cases}$$

Remarque: si $\partial\Omega_D = \emptyset$ (pas d'encastrement), alors une **condition nécessaire et suffisante d'existence** est l'équilibre des forces:

$$\int_{\Omega} f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, ds = 0$$

De plus, l'unicité est établie à une constante additive près, c'est-à-dire à un **mouvement rigide** près.

Système de l'élasticité linéarisée

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \sigma = f & \text{dans } \Omega \\ \text{avec } \sigma = 2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u)) \operatorname{Id} & \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D \\ \sigma n = g & \text{sur } \partial\Omega_N, \end{array} \right.$$

$$e(u) = \frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^t \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^N \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}$$

Formulation variationnelle: trouver $u \in V$ tel que

$$\int_{\Omega} 2\mu e(u) \cdot e(v) \, dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega_N} g \cdot v \, ds \quad \forall v \in V.$$

METHODE DES ELEMENTS FINIS

Approximation variationnelle interne

Formulation variationnelle **exacte**:

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Formulation variationnelle **approchée**:

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

pour $V_h \subset V$, sous-espace de dimension finie.

La méthode des éléments finis consiste à construire des sous-espaces V_h , simples et liés à un maillage du domaine.

On introduit une **base** $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N_h}$ de V_h . Alors

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j \quad \text{avec} \quad U_h = (u_1, \dots, u_{N_h}) \in \mathbb{R}^{N_h}$$

La formulation variationnelle est équivalente à:

$$\text{Trouver } U_h \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ tel que } a \left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j, \phi_i \right) = L(\phi_i) \quad \forall 1 \leq i \leq N_h,$$

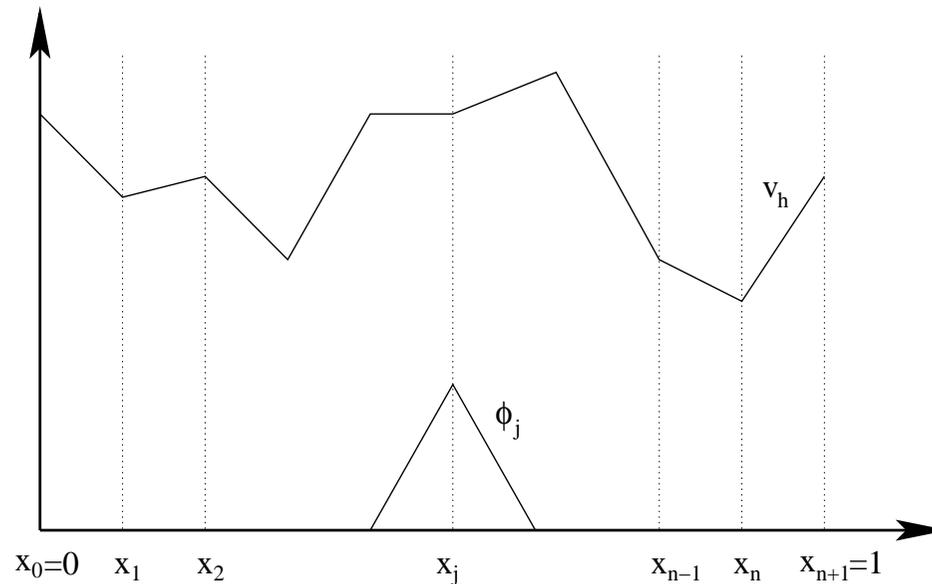
ce qui s'écrit sous la forme d'un **système linéaire**

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h \quad \text{avec} \quad (\mathcal{K}_h)_{ij} = a(\phi_j, \phi_i), \quad (b_h)_i = L(\phi_i).$$

Remarque: la coercivité de $a(u, v)$ entraîne le caractère défini positif de la **matrice de rigidité** \mathcal{K}_h . De même, la symétrie de $a(u, v)$ implique celle de \mathcal{K}_h .

Eléments finis \mathbb{P}_1 en dimension $N = 1$

Maillage uniforme de **sommets** $(x_j = jh)_{0 \leq j \leq n+1}$ avec $h = \frac{1}{n+1}$.



V_h espace de fonctions continues et affines par morceaux de base

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right) \quad \text{avec} \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Résolution pratique

On résout le système linéaire $\mathcal{K}_h U_h = b_h$ (\mathcal{K}_h est la **matrice de rigidité**)

$$\mathcal{K}_h = \left(\int_0^1 \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad b_h = \left(\int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx \right)_{1 \leq i \leq n},$$

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j(x) \quad \text{avec} \quad U_h = (u_1, \dots, u_{N_h}) \in \mathbb{R}^{N_h}$$

Un calcul simple montre que la matrice \mathcal{K}_h est tridiagonale

$$\mathcal{K}_h = h^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Résolution pratique (suite)

Pour obtenir le second membre b_h il faut calculer les intégrales

$$(b_h)_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x) dx \quad \text{si } 1 \leq i \leq n.$$

On utilise des **formules de quadrature** (ou formules d'intégration numérique).

Par exemple, la formule des “trapèzes”

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx \approx \frac{1}{2} (\psi(x_{i+1}) + \psi(x_i)),$$

Convergence de la méthode des E.F.

Théorème. Soit $u \in H_0^1(0, 1)$ et $u_h \in V_{0h}$ les solutions exacte et approchée, respectivement. Alors, la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0.$$

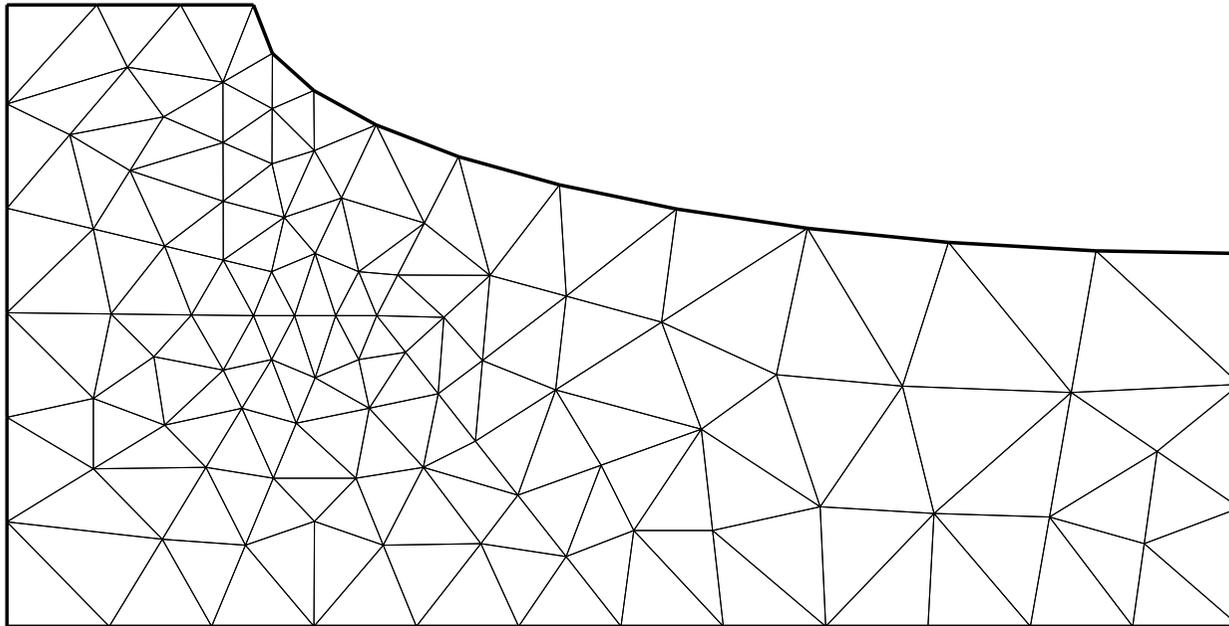
De plus, si $u \in H^2(0, 1)$ (ce qui est vrai si $f \in L^2(0, 1)$), alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)} = Ch \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Remarque. Grâce à la F.V. les fonctions de base des éléments finis ne peuvent être **dérivables qu'une seule fois** (et pas nécessairement deux fois).

ELEMENTS FINIS EN DIMENSION $N \geq 2$

Eléments finis triangulaires \mathbb{P}_1



On couvre le domaine par des **triangles** en dimension $N = 2$ ou des **tétraèdres** en dimension $N = 3$ dont les sommets sont des points $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ de \mathbb{R}^N .

On utilisera FreeFem++ <http://www.freefem.org>

Lemme Soit K un triangle ou un tétraèdre de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$. Tout polynôme $p \in \mathbb{P}_1$ (fonction affine) se met sous la forme

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N+1} p(a_j) \lambda_j(x),$$

où les $(\lambda_j(x))_{1 \leq j \leq N+1}$ sont les coordonnées barycentriques de $x \in \mathbb{R}^N$ définies par

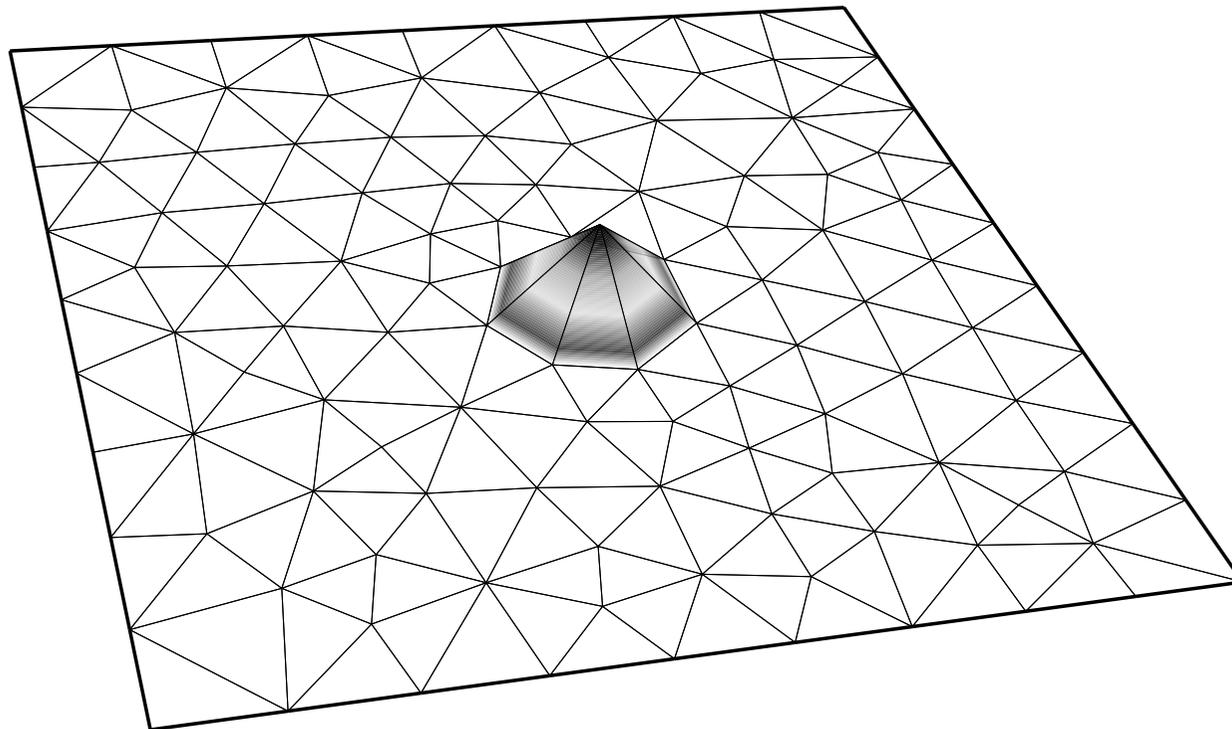
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} a_{i,j} \lambda_j = x_i & \text{pour } 1 \leq i \leq N \\ \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1 \end{cases}$$

Autrement dit, toute fonction de \mathbb{P}_1 est caractérisé de manière unique par ses valeurs aux noeuds du maillage.

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 (**éléments finis triangulaires de Lagrange d'ordre 1**) associée à un maillage \mathcal{T}_h est définie par l'espace discret

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \text{ tel que } v|_{K_i} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h\}.$$

Fonction de base de V_h associée à un sommet (ou noeud, ou degré de liberté) du maillage



Résolution pratique

On résout le système linéaire $\mathcal{K}_h U_h = b_h$ (\mathcal{K}_h est la matrice de **rigidité**)

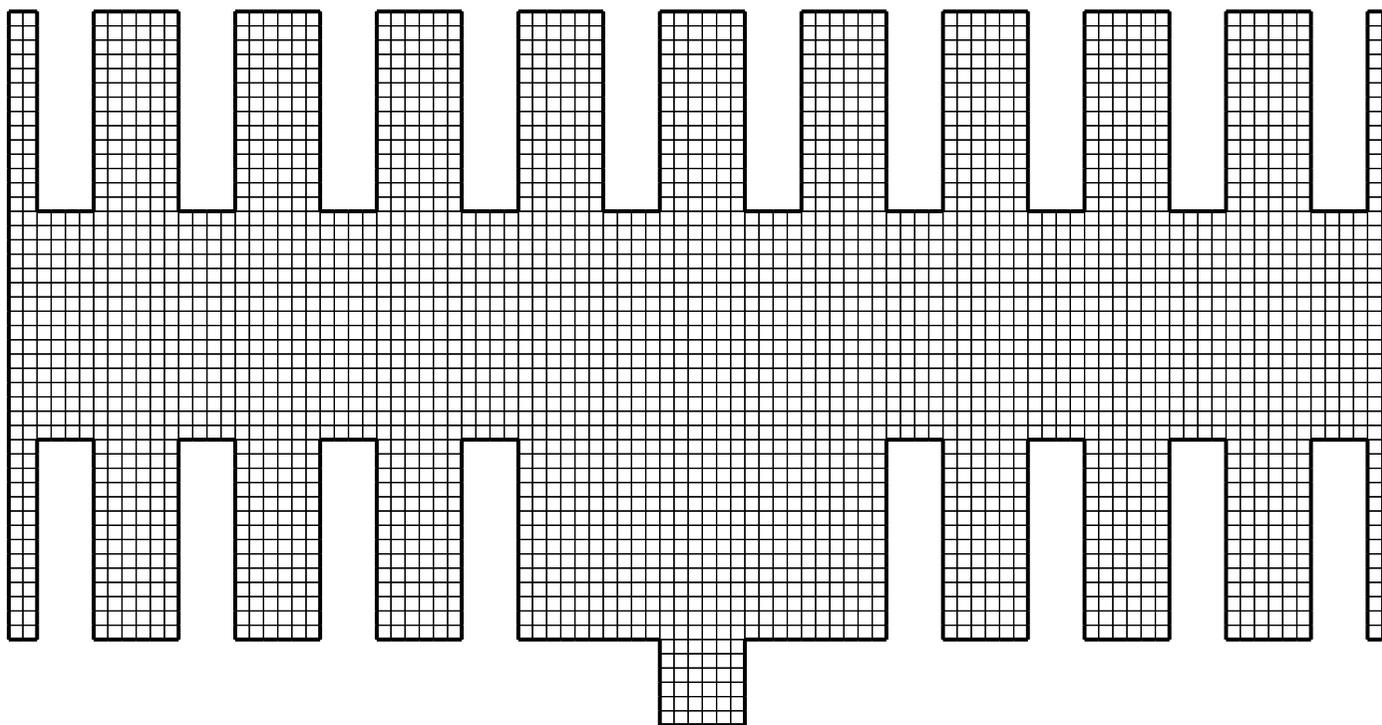
$$\mathcal{K}_h = \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx \right)_{1 \leq i, j \leq n_{dl}}, \quad b_h = \left(\int_{\Omega} f \phi_i \, dx \right)_{1 \leq i \leq n_{dl}},$$

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j(x) \quad \text{avec} \quad U_h = (u_h(\hat{a}_j))_{1 \leq j \leq n_{dl}} \in \mathbb{R}^{n_{dl}}$$

Formule de quadrature approchée

$$\int_K \psi(x) \, dx \approx \frac{\text{Volume}(K)}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \psi(a_i)$$

Eléments finis quadrangulaires Q_1



Un N -rectangle K de \mathbb{R}^N est un pavé (non-dégénéré) $\prod_{i=1}^N [l_i, L_i]$ avec $-\infty < l_i < L_i < +\infty$. On note $(a_j)_{1 \leq j \leq 2^N}$ les sommets de K .

On définit l'ensemble Q_1 des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 **par rapport à chaque variable** ($\neq P_1$)

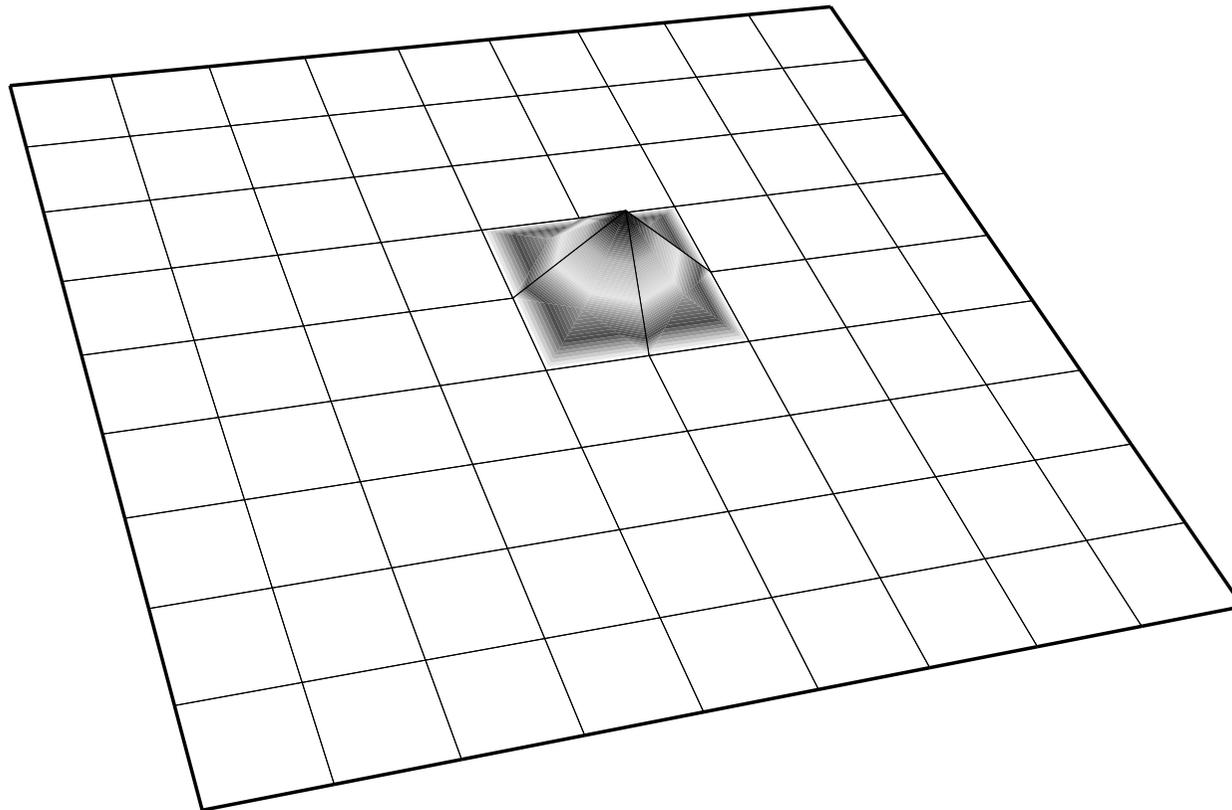
$$Q_1 = \left\{ p(x) = \sum_{0 \leq i_1 \leq 1, \dots, 0 \leq i_N \leq 1} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N} \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_N) \right\}$$

Toute polynôme de Q_1 est **caractérisé de manière unique** par ses valeurs aux sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq 2^N}$ d'un N -rectangle.

La méthode des éléments finis Q_1 (**éléments finis quadrangulaires de Lagrange d'ordre 1**) associée à un maillage \mathcal{T}_h est définie par l'espace discret

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{K_i} \in Q_1 \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h\}.$$

Fonction de base de V_h associée à un sommet (ou noeud, ou degré de liberté) du maillage



Section 2.2.2: [Energie duale ou complémentaire](#)

Très important pour la suite... mais on voit ça la semaine prochaine !