

# CONCEPTION OPTIMALE DE STRUCTURES

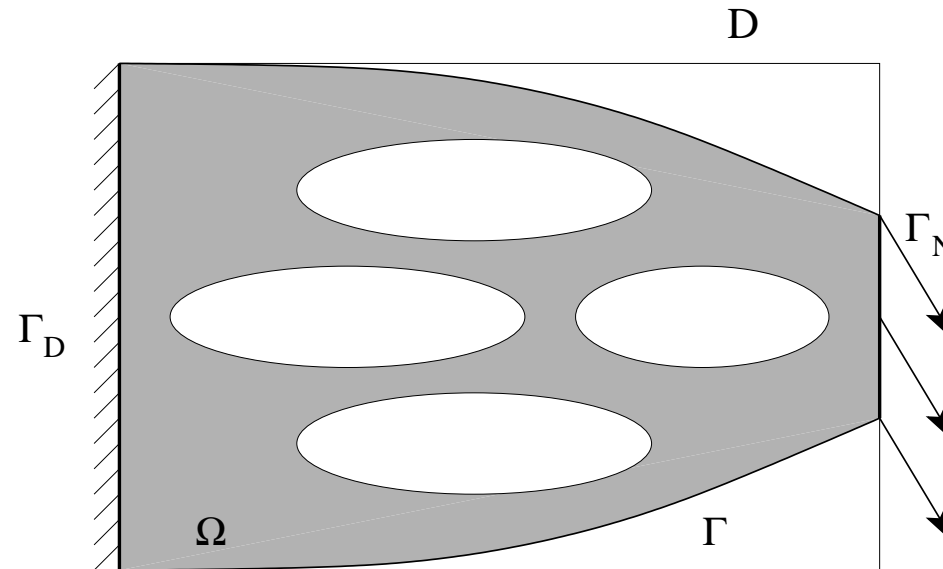
G. ALLAIRE

3 Mars 2010

CHAPITRE VII (FIN)

OPTIMISATION TOPOLOGIQUE PAR  
HOMOGENEISATION

## 7.5 Optimisation de formes en élasticité



Domaine de travail borné  $D \in \mathbb{R}^N$  ( $N = 2, 3$ ).

Matériau élastique, linéaire et isotrope, de loi de Hooke  $A$

$$A = \left(\kappa - \frac{2\mu}{N}\right)I_2 \otimes I_2 + 2\mu I_4, \quad 0 < \kappa, \mu < +\infty$$

Forme admissible = sous-ensemble  $\Omega \subset D$ .

Bord  $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$  avec  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$  fixes.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}\sigma = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma = 2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u)) \operatorname{Id} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

On minimise le poids et on maximise la rigidité. Soit  $\ell > 0$  un multiplicateur de Lagrange, la **fonction objectif** est

$$\inf_{\Omega \subset D} \left\{ J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, ds + \ell \int_{\Omega} dx \right\}.$$

Ce problème d'optimisation de formes peut être vu comme un problème d'optimisation du **mélange de deux phases**: le matériau  $A$  et les trous de rigidité  $B \approx 0$ .

La loi de Hooke du mélange dans  $D$  est

$$\chi_{\Omega}(x)A + (1 - \chi_{\Omega}(x))B = \chi_{\Omega}(x)A$$

Ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \chi \in L^{\infty} (D; \{0, 1\}) \right\}.$$

On peut appliquer la même méthode de relaxation par homogénéisation que pour le problème de conduction/membrane (voir section 7.4).

**La méthode d'homogénéisation se généralise à l'élasticité.**

## Formulation homogénéisée de l'optimisation

On introduit des **structures composites** caractérisées par  $\theta(x)$ , la proportion volumique locale de matériau  $A$  (prenant ses valeurs entre 0 et 1), et  $A^*(x)$ , le tenseur homogénéisé correspondant à sa microstructure.

L'ensemble admissible homogénéisé est

$$\mathcal{U}_{ad}^* = \left\{ (\theta, A^*) \in L^\infty \left( D; [0, 1] \times \mathbb{R}^{N^4} \right), A^*(x) \in G_{\theta(x)} \text{ dans } D \right\}.$$

Le problème homogénéisé est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = A^* e(u) & \text{avec } e(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^t), \\ \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } D, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \partial D \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N). \end{array} \right.$$

La compliance homogénéisée est définie par

$$c(\theta, A^*) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, ds.$$

Le problème d'optimisation **relaxé ou homogénéisé** s'écrit donc

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{ad}^*} \left\{ J(\theta, A^*) = c(\theta, A^*) + \ell \int_D \theta(x) \, dx \right\}.$$

**Inconvénient majeur:** on ne connaît pas de caractérisation explicite de l'ensemble  $G_\theta$  dans le cadre de l'élasticité !

**Heureusement, pour la compliance** on pourra remplacer  $G_\theta$  par son sous-ensemble explicite des composites laminés.

Le point crucial pour **se passer de la connaissance** de  $G_\theta$  est que l'on peut réécrire, grâce au principe de minimisation de l'énergie complémentaire, la compliance comme

$$c(\theta, A^*) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, ds = \min_{\substack{\text{div} \sigma = 0 \text{ dans } D \\ \sigma n = g \text{ sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 \text{ sur } \partial D \setminus \Gamma_N \cup \Gamma_D}} \int_D A^{*-1} \sigma \cdot \sigma \, dx.$$

Le problème d'optimisation de formes devient une **double minimisation** (argument déjà utilisé au chapitre 5).

## Echange de l'ordre des minimisations

Le problème d'optimisation de formes est

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{ad}^*} \left\{ \min_{\substack{\text{div} \sigma = 0 \text{ dans } D \\ \sigma n = g \text{ sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 \text{ sur } \partial D \setminus \Gamma_N \cup \Gamma_D}} \int_D A^{*-1} \sigma \cdot \sigma \, dx + \ell \int_D \theta(x) \, dx \right\}.$$

Comme l'ordre des minimisations est sans importance, on peut le réécrire

$$\min_{\substack{\text{div} \sigma = 0 \text{ dans } D \\ \sigma n = g \text{ sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 \text{ sur } \partial D \setminus \Gamma_N \cup \Gamma_D}} \min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{ad}^*} \left\{ \int_D A^{*-1} \sigma \cdot \sigma \, dx + \ell \int_D \theta(x) \, dx \right\}.$$

La minimisation par rapport aux **paramètres de formes**  $(\theta, A^*)$  est locale, donc

$$\min_{\substack{\text{div} \sigma = 0 \text{ dans } D \\ \sigma n = g \text{ sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 \text{ sur } \partial D \setminus \Gamma_N \cup \Gamma_D}} \int_D \min_{\substack{0 \leq \theta \leq 1 \\ A^* \in G_\theta}} \left( A^{*-1} \sigma \cdot \sigma + \ell \theta \right) (x) \, dx.$$



Pour un tenseur des contraintes fixé  $\sigma$ , la minimisation de l'énergie complémentaire

$$\min_{A^* \in G_\theta} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma$$

est un **problème classique** en homogénéisation, dit de **bornes optimales** sur les propriétés effectives des matériaux composites.

Nous allons voir qu'il suffit de se restreindre aux laminés séquentiels  $L_\theta$ , sous-ensemble de  $G_\theta$ .

Cette simplification est dû au choix particulier de la compliance comme fonction objectif.

## 7.5.2 Laminés séquentiels en élasticité

$$A\xi = 2\mu_A\xi + \lambda_A(\text{tr}\xi)I, \quad B\xi = 2\mu_B\xi + \lambda_B(\text{tr}\xi)I,$$

avec la matrice identité  $I_2$ , et  $\kappa_{A,B} = \lambda_{A,B} + 2\mu_{A,B}/N$ . On suppose que  $B$  est plus faible que  $A$

$$0 \leq \mu_B < \mu_A, \quad 0 \leq \kappa_B < \kappa_A.$$

On travaille en contraintes, donc on utilise les tenseurs d'élasticité inverses.

**Lemme 7.24.** La loi de Hooke d'un laminé simple de  $A$  et  $B$  en proportions  $\theta$  et  $(1 - \theta)$ , respectivement, dans la direction  $e$ , est

$$(1 - \theta) \left( A^{*-1} - A^{-1} \right)^{-1} = \left( B^{-1} - A^{-1} \right)^{-1} + \theta f_A^c(e)$$

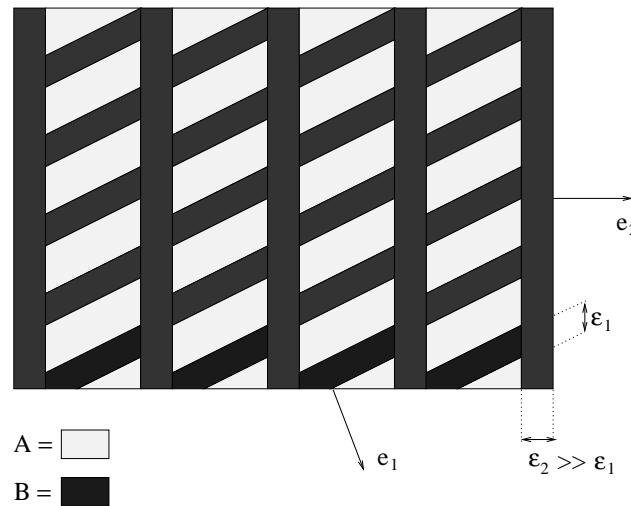
avec  $f_A^c(e)$  le tenseur défini, pour toute matrice symétrique  $\xi$ , par

$$f_A^c(e_i)\xi \cdot \xi = A\xi \cdot \xi - \frac{1}{\mu_A} |A\xi e_i|^2 + \frac{\mu_A + \lambda_A}{\mu_A(2\mu_A + \lambda_A)} ((A\xi)e_i \cdot e_i)^2.$$

## Formule de lamination réitérée

**Proposition 7.25.** Un **laminé séquentiel de rang  $p$**  de matrice  $A$  et d'inclusions  $B$ , en proportions  $\theta$  et  $(1 - \theta)$ , respectivement, dans les directions  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  avec des paramètres  $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$  tels que  $0 \leq m_i \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^p m_i = 1$ , est donné par

$$(1 - \theta) \left( A^{*-1} - A^{-1} \right)^{-1} = (B^{-1} - A^{-1})^{-1} + \theta \sum_{i=1}^p m_i f_A^c(e_i)$$



### 7.5.3 Bornes de Hashin et Shtrikman en élasticité

**Théorème 7.26.** Soit  $A^*$  un tenseur d'élasticité homogénéisé dans  $G_\theta$  que l'on suppose isotrope

$$A^* = 2\mu_* I_4 + \left( \kappa_* - \frac{2\mu_*}{N} \right) I_2 \otimes I_2.$$

Ses modules de compression isotrope  $\kappa_*$  et de cisaillement  $\mu_*$  vérifient

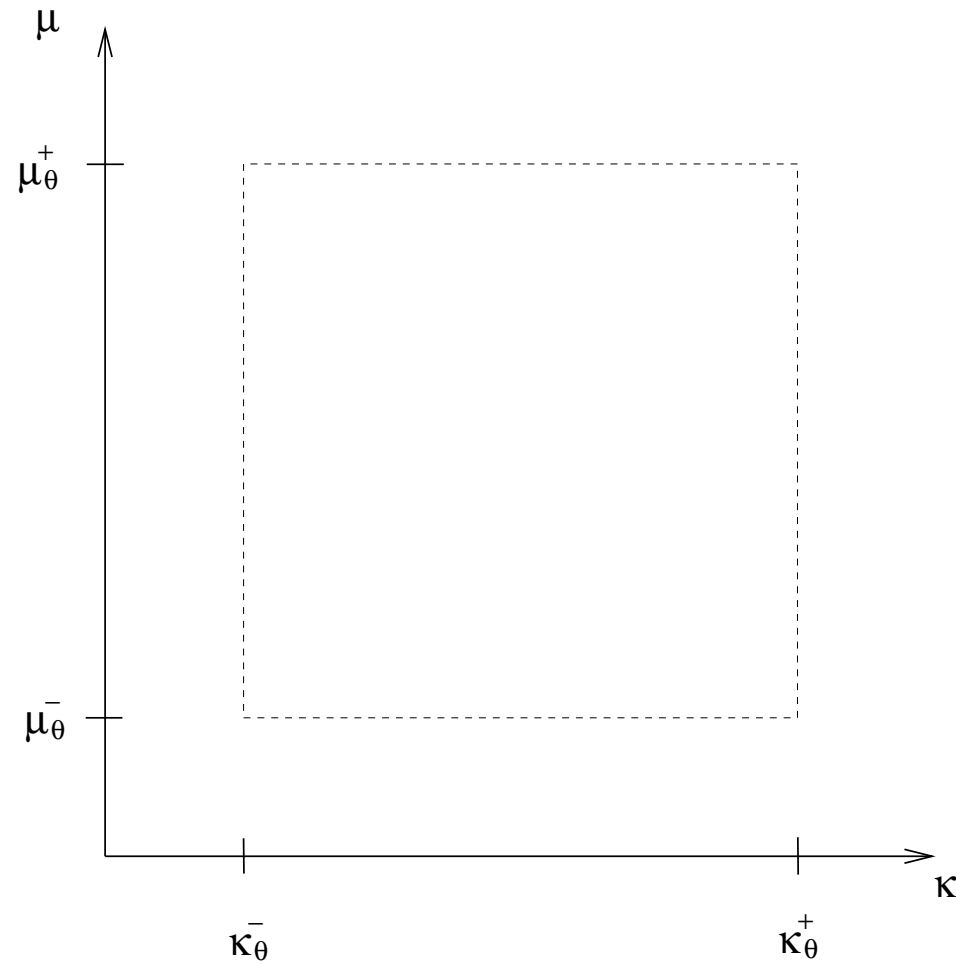
$$\frac{1 - \theta}{\kappa_A - \kappa_*} \leq \frac{1}{\kappa_A - \kappa_B} + \frac{\theta}{2\mu_A + \lambda_A} \quad \text{et} \quad \frac{\theta}{\kappa_* - \kappa_B} \leq \frac{1}{\kappa_A - \kappa_B} + \frac{1 - \theta}{2\mu_B + \lambda_B}$$

$$\frac{1 - \theta}{2(\mu_A - \mu_*)} \leq \frac{1}{2(\mu_A - \mu_B)} + \frac{\theta(N - 1)(\kappa_A + 2\mu_A)}{(N^2 + N - 2)\mu_A(2\mu_A + \lambda_A)}$$

$$\frac{\theta}{2(\mu_* - \mu_B)} \leq \frac{1}{2(\mu_A - \mu_B)} - \frac{(1 - \theta)(N - 1)(\kappa_B + 2\mu_B)}{(N^2 + N - 2)\mu_B(2\mu_B + \lambda_B)}.$$

De plus, les bornes inférieures, de même que les bornes supérieures, sont simultanément atteintes par un laminé séquentiel de rang  $p$  avec  $p = 3$  si  $N = 2$ , et  $p = 6$  si  $N = 3$ .

## Bornes de Hashin et Shtrikman en élasticité



**Proposition 7.27.** Soit  $G_\theta$  l'ensemble des tenseurs d'élasticité homogénéisés obtenus par mélange des phases  $A$  et  $B$  en proportions  $\theta$  et  $(1 - \theta)$ . Soit  $L_\theta$  le sous-ensemble de  $G_\theta$  constitués des matériaux composites laminés. Pour toute contrainte  $\sigma$ ,

$$HS(\sigma) = \min_{A^* \in G_\theta} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma = \min_{A^* \in L_\theta} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma.$$

De plus, le minimum est atteint par un laminé séquentiel de rang  $N$  dont les directions de lamination coïncident avec les vecteurs propres de la matrice  $\sigma$ .

### Remarque.

- ➡ Un tenseur optimal  $A^*$  peut s'interpréter comme le matériau composite le **plus rigide** possible dans  $G_\theta$  pour le champ de contrainte  $\sigma$ .
- ➡ On appelle  $HS(\sigma)$  **borne optimale de Hashin et Shtrikman** sur l'énergie.
- ➡ En conduction il suffisait d'un laminé de rang 1.
- ➡ Conclusion pratique: **on peut remplacer  $G_\theta$  par  $L_\theta$ .**

## Calcul explicite de la borne optimale

Si  $B = 0$  on peut calculer la borne optimale:

$$\min_{A^* \in G_\theta} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma = HS(\sigma) = A^{-1} \sigma \cdot \sigma + \frac{1 - \theta}{\theta} g^*(\sigma)$$

Cas 2-D.

$$g^*(\sigma) = \frac{\kappa + \mu}{4\mu\kappa} (|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2$$

avec  $\sigma_1, \sigma_2$  les valeurs propres de  $\sigma$ . De plus, un laminé séquentiel de rang 2 optimal est donné par les paramètres

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}.$$

Cas 3-D simplifié avec  $\lambda_A = 0$ . On ordonne les valeurs propres de  $\sigma$  comme  $|\sigma_1| \leq |\sigma_2| \leq |\sigma_3|$ .

$$g^*(\sigma) = \frac{1}{4\mu} \begin{cases} (|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|)^2 & \text{si } |\sigma_3| \leq |\sigma_1| + |\sigma_2| \\ 2((|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2 + |\sigma_3|^2) & \text{si } |\sigma_3| \geq |\sigma_1| + |\sigma_2| \end{cases}$$

Dans le premier régime, un laminé séquentiel de rang 3 optimal est donné par

$$m_1 = \frac{|\sigma_3| + |\sigma_2| - |\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|}, \quad m_2 = \frac{|\sigma_1| - |\sigma_2| + |\sigma_3|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|}, \quad m_3 = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2| - |\sigma_3|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|},$$

et dans le deuxième régime, un laminé séquentiel de rang 2 optimal est

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, \quad m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, \quad m_3 = 0.$$

(Cas 3-D général connu mais compliqué.)



## 7.5.4 Formulation homogénéisée de l'optimisation

$$\min_{\substack{\text{div} \sigma = 0 \text{ dans } D \\ \sigma n = g \text{ sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 \text{ sur } \partial D \setminus \Gamma_N \cup \Gamma_D}} \int_D \min_{\substack{0 \leq \theta \leq 1 \\ A^* \in G_\theta}} \left( A^{*-1} \sigma \cdot \sigma + \ell \theta \right) dx.$$

**Conditions d'optimalité.** Si le minimum est atteint en  $(\theta, A^*, \sigma)$ , alors  $A^*$  est un laminé séquentiel de rang  $N$  aligné avec  $\sigma$  et de proportions explicites

$$A^{*-1} = A^{-1} + \frac{1 - \theta}{\theta} \left( \sum_{i=1}^N m_i f_A^c(e_i) \right)^{-1},$$

et  $\theta$  vaut en 2-D (formule similaire en 3-D)

$$\theta_{opt} = \min \left( 1, \sqrt{\frac{\kappa + \mu}{4\mu\kappa\ell}} (|\sigma_1| + |\sigma_2|) \right),$$

et  $\sigma$  est solution de l'équation homogénéisée de l'élasticité.

## Théorie d'existence

Problème d'optimisation de formes d'origine

$$\inf_{\Omega \subset D} J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, ds + \ell \int_{\Omega} dx. \quad (1)$$

Formulation homogénéisée (ou relaxée) du problème

$$\min_{\substack{A^* \in G_\theta \\ 0 \leq \theta \leq 1}} J(\theta, A^*) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, ds + \ell \int_D \theta \, dx. \quad (2)$$

**Théorème 7.30.** La formulation homogénéisée (2) est la **relaxation** du problème d'origine (1) au sens où

1. il existe, au moins, une forme optimale composite  $(\theta, A^*)$  qui minimise (2),
2. toute suite minimisante de formes classiques  $\Omega$  pour (1) converge, au sens de l'homogénéisation, vers un minimiseur  $(\theta, A^*)$  de (2),
3. les valeurs des minima de l'énergie originale et homogénéisée coïncident.

### 7.5.5 Algorithme numérique

Double minimisation “alternée” en  $\sigma$  et en  $(\theta, A^*)$ .

- initialisation de la forme  $(\theta_0, A_0^*)$
- itérations  $n \geq 1$  jusqu'à convergence
  - étant donnée une forme  $(\theta_{n-1}, A_{n-1}^*)$ , on calcule les contraintes  $\sigma_n$  par résolution d'un problème d'élasticité linéaire (par une méthode d'éléments finis)
  - étant donné ce tenseur des contraintes  $\sigma_n$ , on calcule les nouveaux paramètres de forme  $(\theta_n, A_n^*)$  avec les formules explicites d'optimalité faisant intervenir  $\sigma_n$ .

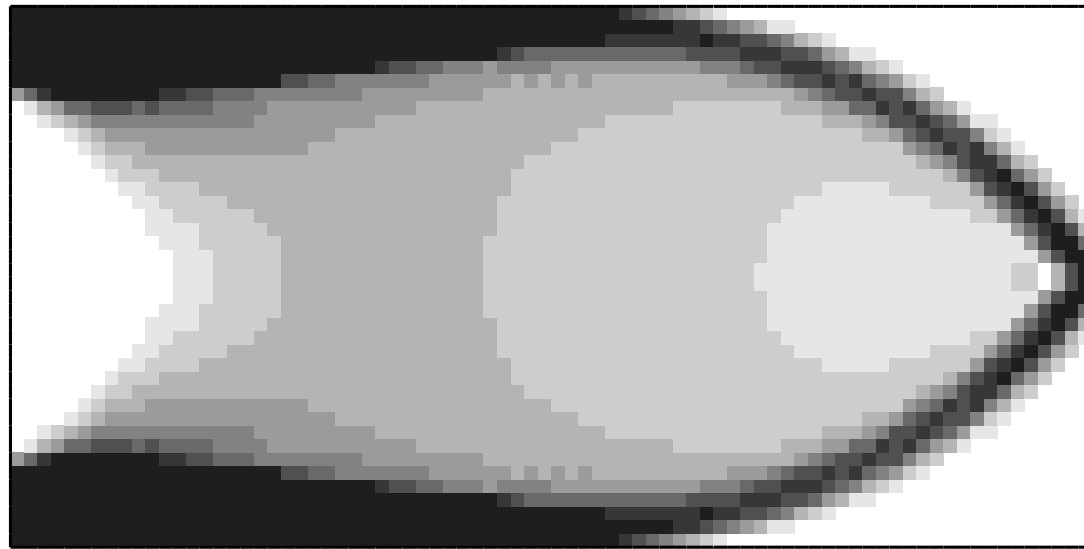
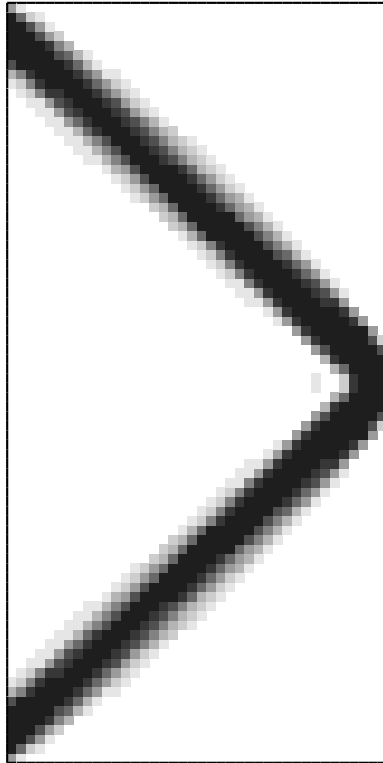
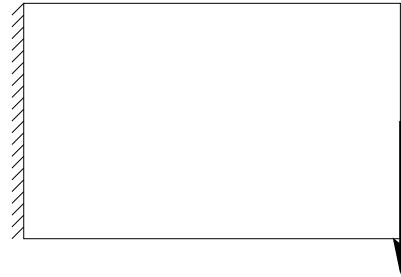
#### Remarques.

- ☞ Pour la compliance, le problème est **auto-adjoint**.
- ☞ Méthode **micro-macro** (microstructure locale / densité globale).

## Remarques

- ➡ La fonction objectif décroît toujours.
- ➡ Algorithme du type “critère d’optimalité”.
- ➡ Algorithme de “capture de formes” sur un maillage fixe de  $\Omega$ .
- ➡ On remplace le vide par un matériau mou, ou bien on impose  $\theta \geq 10^{-3}$  pour avoir une matrice de rigidité inversible.
- ➡ Quelques dizaines d’itérations suffisent pour converger.

# Exemple: console optimale



## Pénalisation

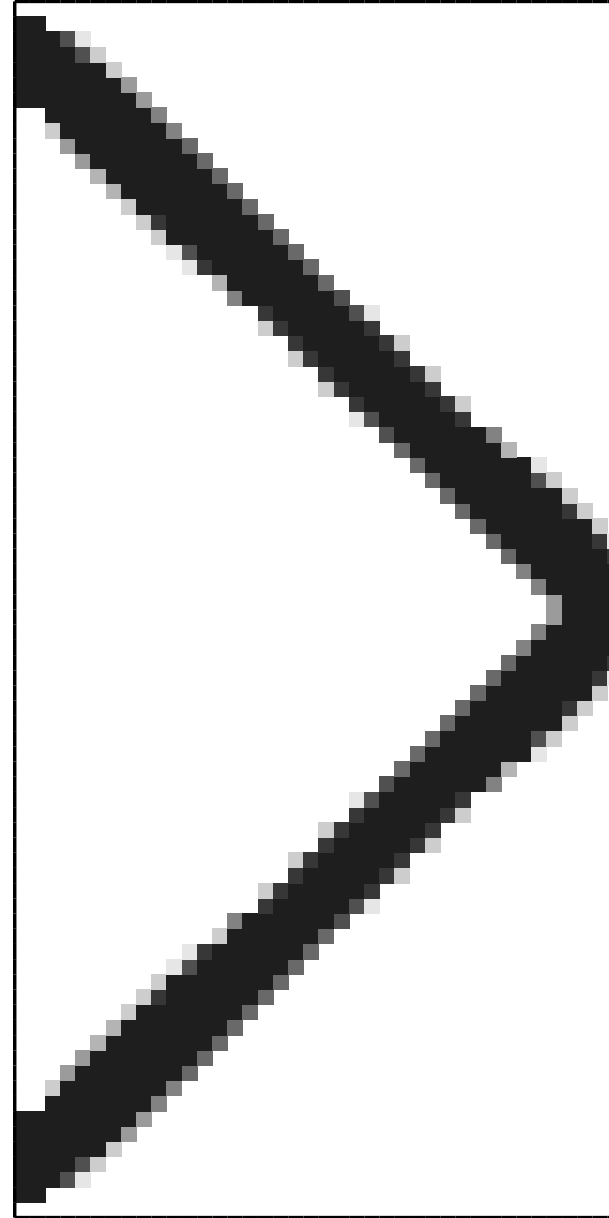
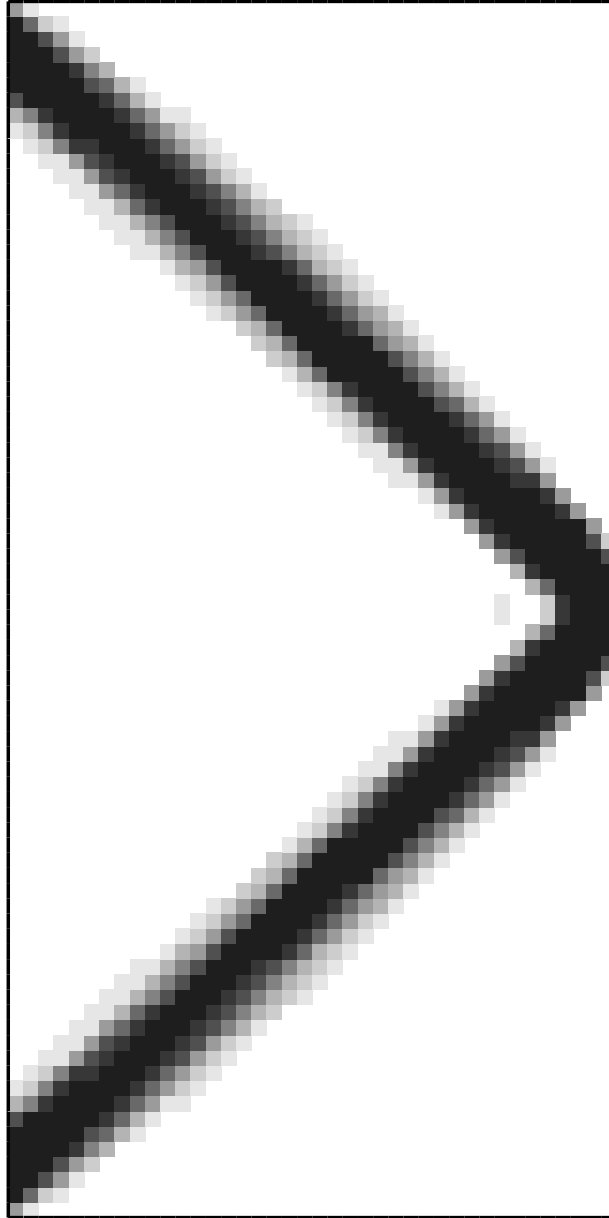
L'algorithme précédent calcule des formes **composites** alors qu'on veut plutôt des formes **classiques**.

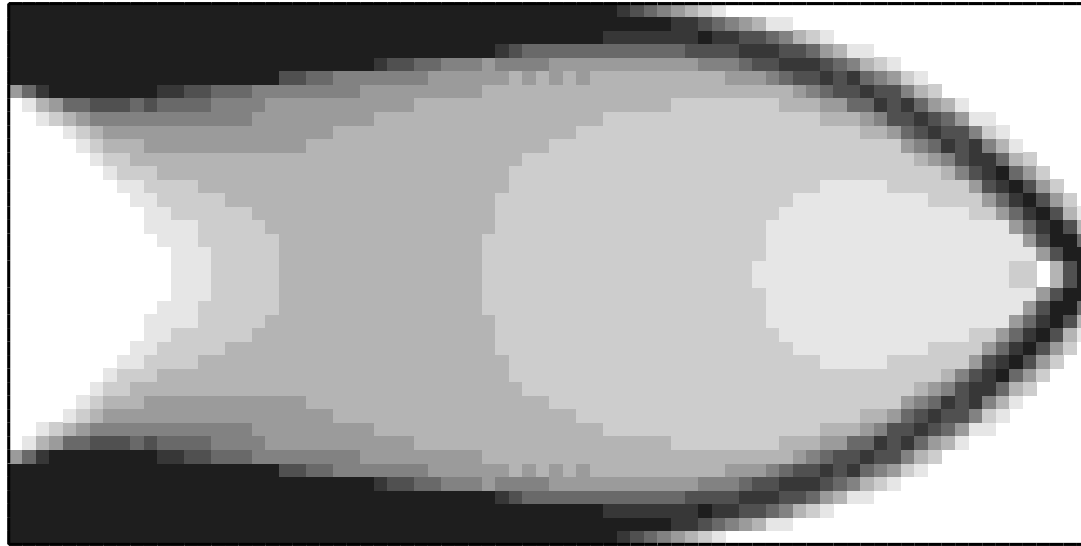
On utilise une technique de pénalisation pour forcer la densité à ne prendre que les valeurs 0 ou 1.

**Algorithme:** après convergence vers une forme composite, on refait quelques itérations en utilisant une densité pénalisée

$$\theta_{pen} = \frac{1 - \cos(\pi\theta_{opt})}{2}.$$

Si  $0 < \theta_{opt} < 1/2$ , alors  $\theta_{pen} < \theta_{opt}$ , tandis que, si  $1/2 < \theta_{opt} < 1$ , alors  $\theta_{pen} > \theta_{opt}$ .

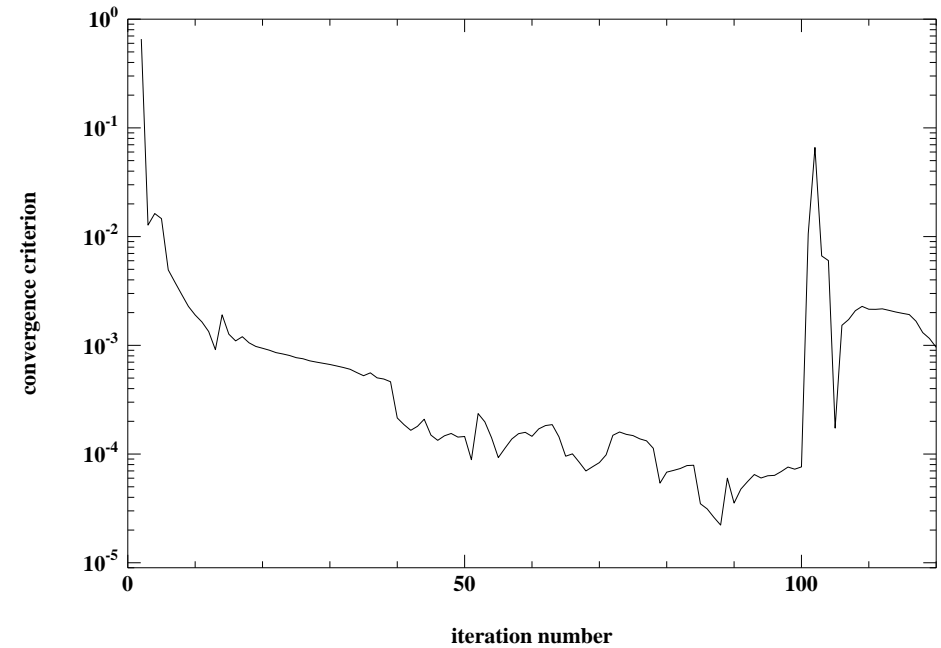
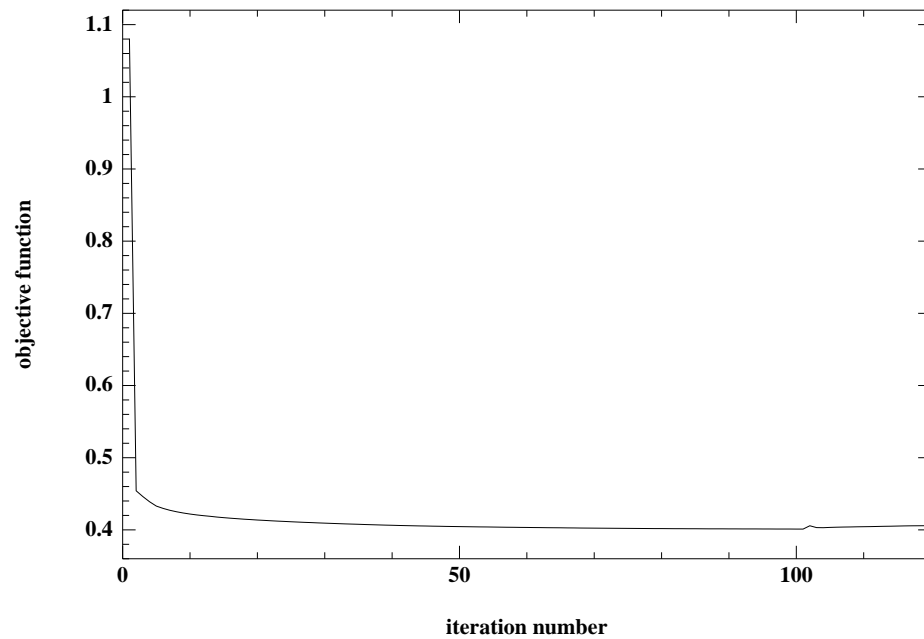




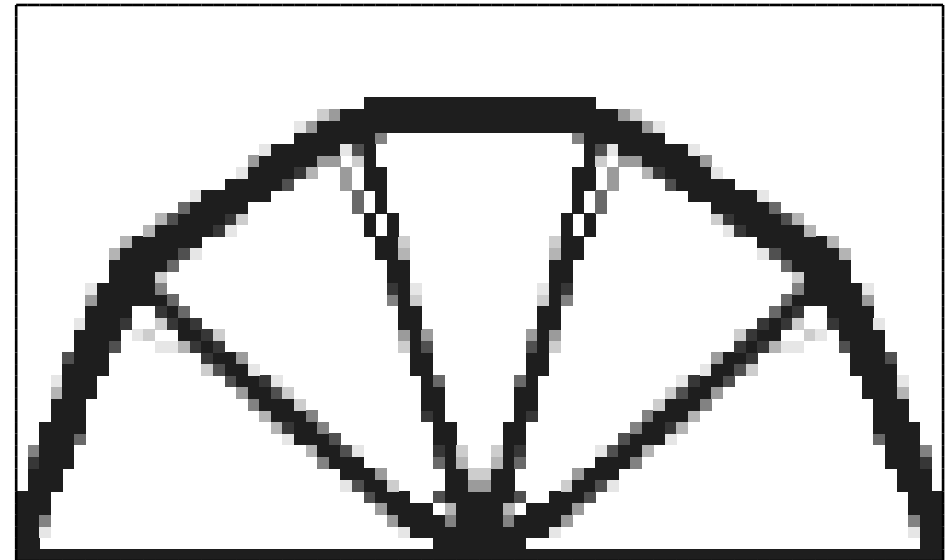
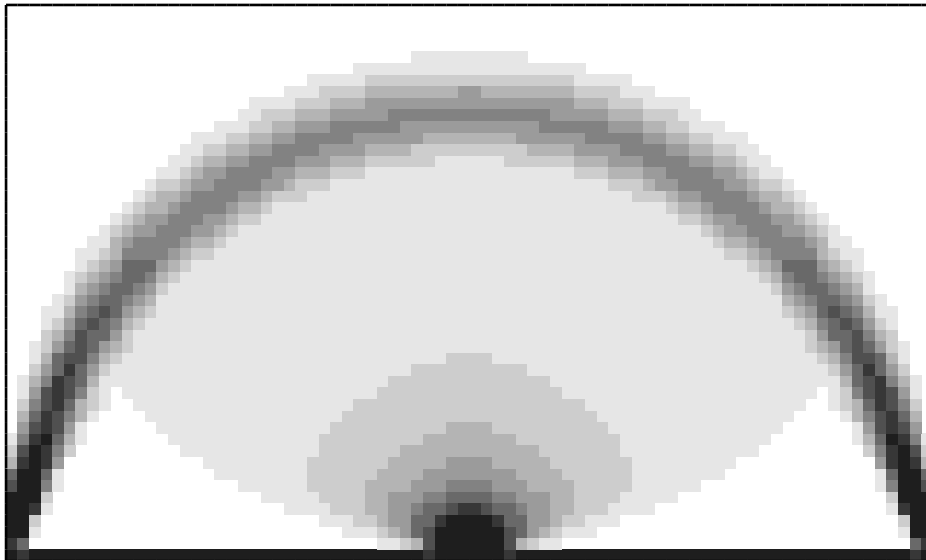
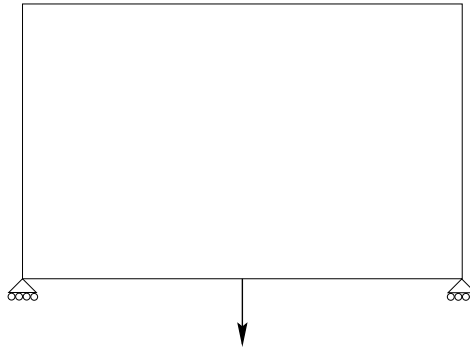


## Historique de convergence:

fonction objectif (gauche), et résidu (droite),  
en fonction du nombre d'itérations.



Exemple: pont optimal



### 7.5.6. Convexification et “matériaux fictifs”

**Idée.** Dans la méthode d’homogénéisation on introduit des matériaux composites dont on se débarrasse à la fin par pénalisation. **Peut-on simplifier l’approche en introduisant seulement une densité  $\theta$  ?**

Une forme classique est représentée par  $\chi(x) \in \{0, 1\}$ .

Si on **convexifie** cet ensemble admissible, on obtient  $\theta(x) \in [0, 1]$ .

La loi de Hooke qui était  $\chi(x)A$  devient  $\theta(x)A$ . On parle aussi de **matériaux fictifs** car non réalisable par homogénéisation (en général). Combinée avec une pénalisation la méthode est connue sous le nom de **SIMP** (Solid Isotropic Material with Penalization).

Formulation convexifiée avec  $0 \leq \theta(x) \leq 1$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = \theta(x) A e(u) & \text{avec } e(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^t), \\ \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } D, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \partial D \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N). \end{array} \right.$$

Minimisation de la compliance

$$\min_{0 \leq \theta(x) \leq 1} \left( c(\theta) + \ell \int_D \theta(x) \right).$$

avec

$$c(\theta) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u = \int_D (\theta(x) A)^{-1} \sigma \cdot \sigma = \min_{\substack{\operatorname{div} \tau = 0 \text{ dans } D \\ \tau n = g \text{ sur } \Gamma_N \\ \tau n = 0 \text{ sur } \partial D \setminus \Gamma_N \cup \Gamma_D}} \int_D (\theta(x) A)^{-1} \tau \cdot \tau dx.$$

Il n'y a plus **qu'un seul** paramètre de forme: la densité de matière  $\theta$  (la microstructure  $A^*$  a disparu).

## Existence de solutions

**Théorème 7.33.** La formulation convexifiée

$$\min_{0 \leq \theta(x) \leq 1} \min_{\substack{\text{div} \tau = 0 \text{ dans } D \\ \tau n = g \text{ sur } \Gamma_N \\ \tau n = 0 \text{ sur } \partial D \setminus \Gamma_N \cup \Gamma_D}} \int_D (\theta(x)A)^{-1} \tau \cdot \tau \, dx + \ell \int_D \theta \, dx$$

admet au moins une solution.

**Preuve.** La fonction, définie sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{M}_n^s$ ,

$$\phi(a, \sigma) = a^{-1} A^{-1} \sigma \cdot \sigma,$$

est **convexe** car

$$\phi(a, \sigma) = \phi(a_0, \sigma_0) + D\phi(a_0, \sigma_0) \cdot (a - a_0, \sigma - \sigma_0) + \phi(a, \sigma - a a_0^{-1} \sigma_0),$$

où la dérivée  $D\phi$  est donnée par

$$D\phi(a_0, \sigma_0) \cdot (b, \tau) = -\frac{b}{a_0^2} A^{-1} \sigma_0 \cdot \sigma_0 + 2a_0^{-1} A^{-1} \sigma_0 \cdot \tau.$$

### Condition d'optimalité

Si on échange les minimisations en  $\tau$  et en  $\theta$ , on peut calculer le minimum en  $\theta$  qui vaut

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } A^{-1}\tau \cdot \tau \geq \ell \\ \sqrt{\ell^{-1}A^{-1}\tau \cdot \tau} & \text{si } A^{-1}\tau \cdot \tau \leq \ell \end{cases}$$

On peut donc construire à nouveau un algorithme de **double minimisation** “alternée”.

## Algorithme numérique

- initialisation de la forme  $\theta_0$
- itérations  $k \geq 1$  jusqu'à convergence
  - étant donnée une forme  $\theta_{k-1}$ , on calcule les contraintes  $\sigma_k$  par résolution d'un problème d'élasticité linéaire (par une méthode d'éléments finis)
  - étant donné ce tenseur des contraintes  $\sigma_k$ , on calcule la nouvelle densité de matière  $\theta_k$  avec les formules explicites d'optimalité faisant intervenir  $\sigma_k$ .

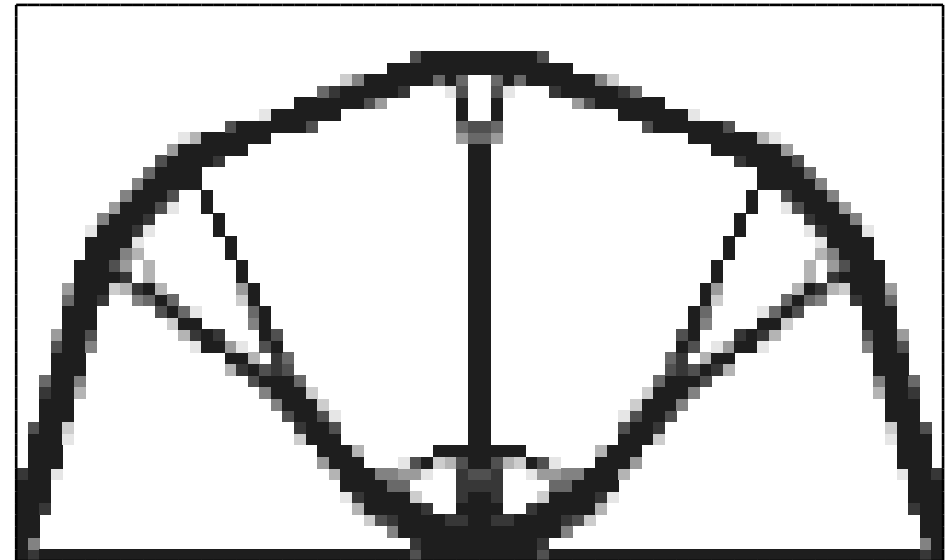
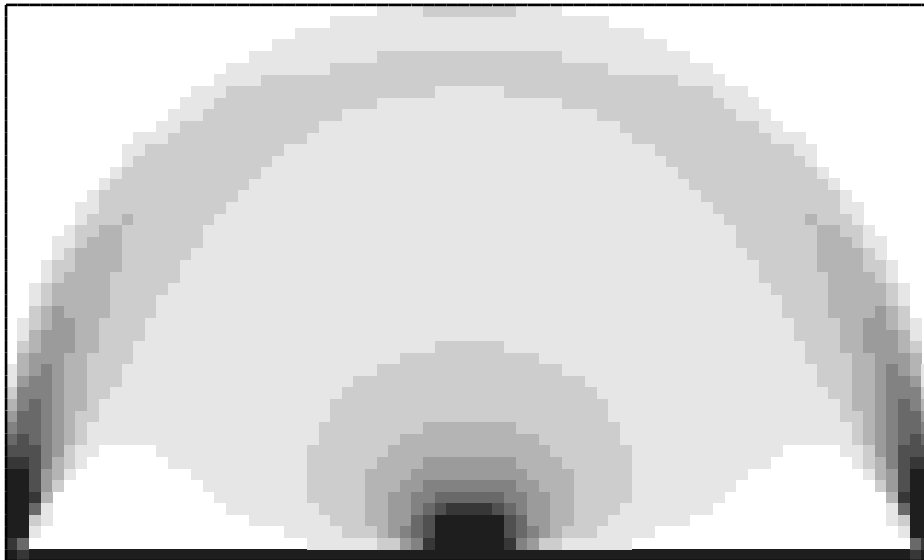
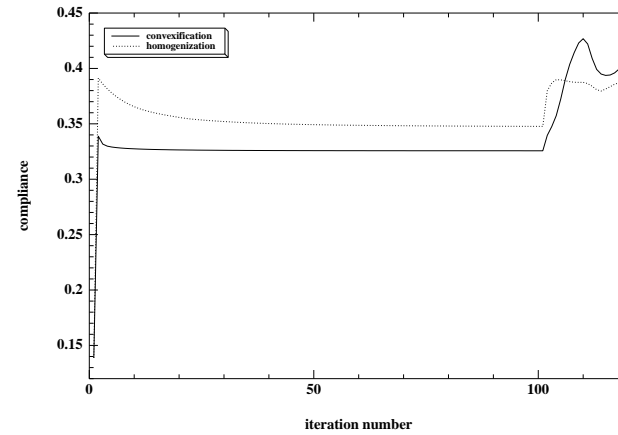
**Pénalisation:** on utilise une densité pénalisée

$$\theta_{pen} = \frac{1 - \cos(\pi\theta_{opt})}{2} \quad \text{ou bien (SIMP)} \quad \theta_{pen} = \theta^p \quad p > 1.$$

**En pratique:** c'est très simple ! Mais les résultats sont moins bons ! Ce qui s'explique par l'absence d'un théorème de relaxation.

**Attention** au pilotage délicat de la pénalisation...

## Pont optimal par méthode de convexification





## Généralisations

- ➔ multi-chargement
- ➔ fréquence propre de vibration
- ➔ critère général de type moindre carré

Les deux premiers cas sont **auto-adjoints** et on sait les résoudre complètement. Par contre, le troisième ne l'est pas et on dispose seulement d'une **relaxation partielle**.

## Multi-chargements

Pour  $n$  chargements  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ , la formulation homogénéisée est

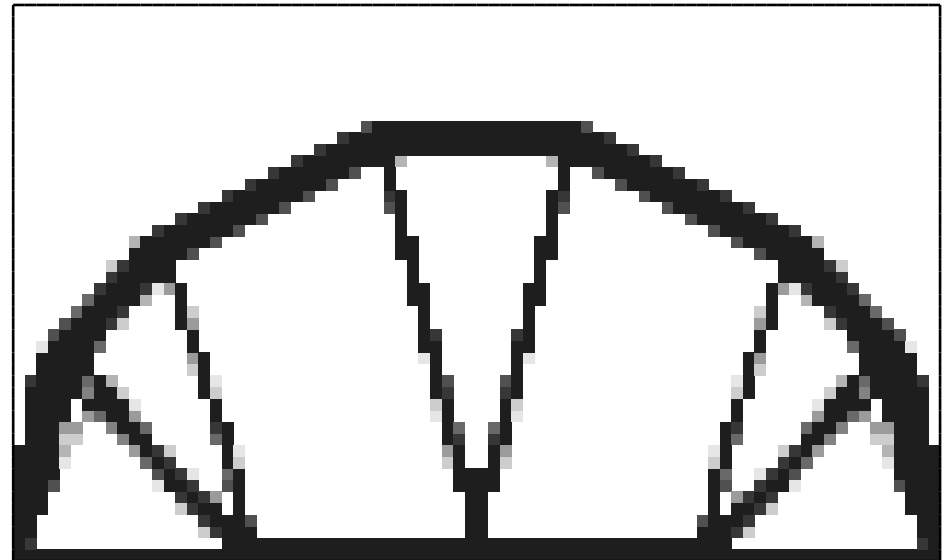
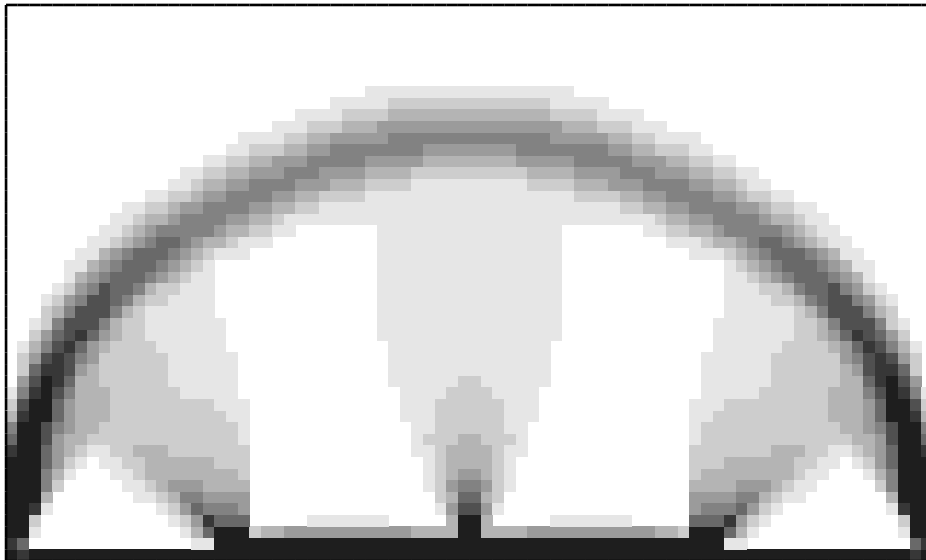
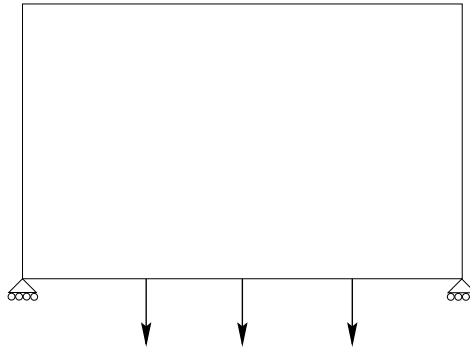
$$\min_{\substack{\text{div} \sigma_i = 0 \text{ dans } D \\ \sigma_i n = g_i \text{ sur } \Gamma_N}} \int_D \min_{0 \leq \theta \leq 1} \min_{A^* \in L_\theta} \left( \sum_{i=1}^n A^{*-1} \sigma_i \cdot \sigma_i + \ell \theta \right) dx$$

avec  $A^* \in L_\theta$  si

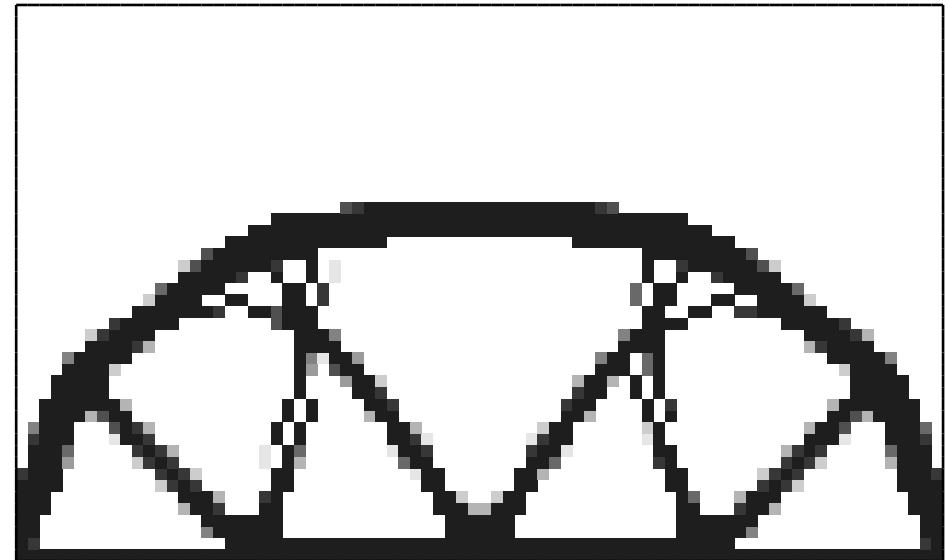
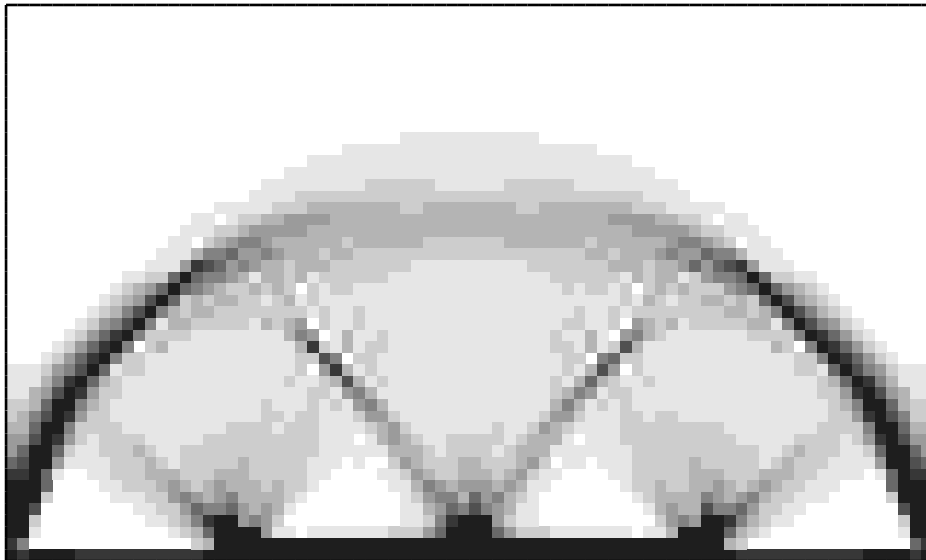
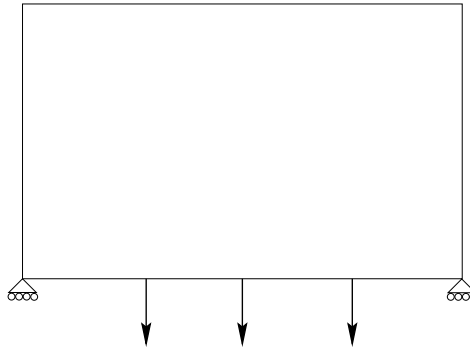
$$(1 - \theta) \left( A^{*-1} - A^{-1} \right)^{-1} = \left( B^{-1} - A^{-1} \right)^{-1} + \theta \sum_{i=1}^p m_i f_A^c(e_i)$$

Le laminé optimal n'est plus de rang  $N$ . L'optimisation des  $m_i$  se fait numériquement désormais (on se donne suffisamment de directions de lamination fixes).

Pont optimal avec 3 forces appliquées **simultanément**



Pont optimal avec 3 forces appliquées *séparément*



## Fréquence propre de vibration

On veut maximiser la première fréquence propre de vibration

$$\omega_1^2(\theta, A^*) = \min_{u \in \mathcal{H}} \frac{\int_D A^* e(u) \cdot e(u) dx}{\int_D \bar{\rho} |u|^2 dx}.$$

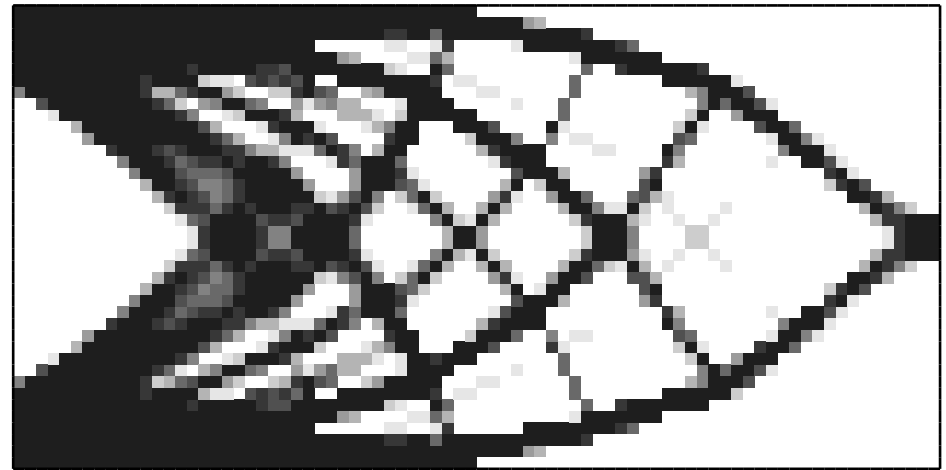
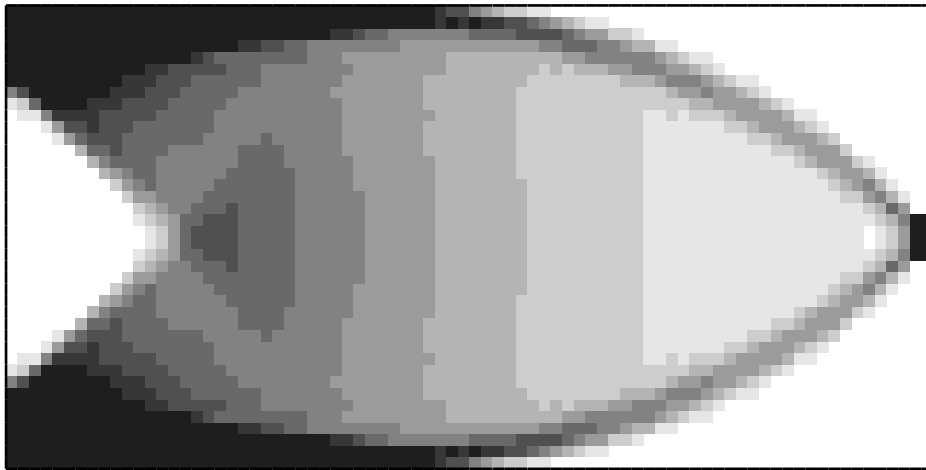
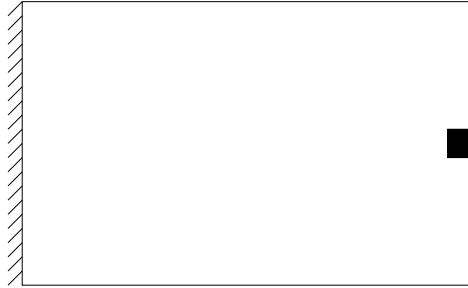
avec la densité  $\bar{\rho} = \theta \rho_A + (1 - \theta) \rho_B$ , et l'espace des déplacements admissibles  $\mathcal{H} = \{u \in H^1(D)^N \text{ tel que } u = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$ .

La formulation homogénéisée est

$$\max_{0 \leq \theta \leq 1} \left\{ \min_{u \in \mathcal{H}} \frac{\int_D \left( \max_{A^* \in L_\theta} A^* e(u) \cdot e(u) \right) dx}{\int_D \bar{\rho} |u|^2 dx} + \ell \int_D \theta(x) dx \right\},$$

avec  $L_\theta$  l'ensemble des laminés séquentiels.

**Attention:** il y a un max-min que l'on ne peut pas échanger...



## Fonctions objectifs de type moindre carré

Formulation d'origine avec deux phases:

$$\inf_{\chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})} J(\chi) = \int_{\Omega} k(x) |u_\chi(x) - u_0(x)|^2 dx + \ell \int_{\Omega} \chi(x) dx$$

où  $u_\chi$  est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\chi e(u_\chi)) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec une loi de Hooke  $A_\chi = \chi A + (1 - \chi)B$ .

## Formulation homogénéisée:

$$\min_{(\theta, A^*)} J^*(\theta, A^*) = \int_{\Omega} \left( k|u - u_0|^2 + \ell\theta \right) dx$$

avec  $u$  solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* e(u)) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

**Difficulté:** on ne connaît pas  $G_\theta$  et on ne peut pas le remplacer par  $L_\theta$ .

Autrement dit, on ne sait pas quelles microstructures sont optimales...

**Relaxation partielle:** on remplace quand même  $G_\theta$  par  $L_\theta$ . On perd l'existence d'une solution optimale mais on garde le lien avec le problème d'origine.



## Relaxation partielle

On se restreint aux laminés séquentiels  $A^*$  de matrice  $A$  et d'inclusions  $B$ . On fixe le nombre de laminations et leurs directions. On optimise seulement par rapport à  $\theta$  et aux  $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$

$$(1 - \theta) (A - A^*)^{-1} = (A - B)^{-1} - \theta \sum_{i=1}^q m_i f_A(e_i),$$

avec  $\forall e \in \mathbb{R}^N$ ,  $|e| = 1$ ,  $\forall \xi$  matrice symétrique

$$f_A(e)\xi \cdot \xi = \frac{1}{\mu_A} (|\xi e|^2 - (\xi e \cdot e)^2) + \frac{1}{\lambda_A + 2\mu_A} (\xi e \cdot e)^2.$$

Par conséquent, la fonction objectif est

$$J^*(\theta, A^*) \equiv J^*(\theta, m_i)$$

avec les contraintes  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $m_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^p m_i = 1$ .

On calcule un gradient à l'aide d'un état adjoint.

Etat adjoint

Exemple de fonction objectif

$$J^*(\theta, A^*) = \int_{\Omega} k(x) |u(x) - u_0(x)|^2 dx + \ell \int_{\Omega} \theta dx$$

Etat adjoint

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(A^* e(p)) & = 2k(x)(u(x) - u_0(x)) \quad \text{dans } \Omega \\ p & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Gradient

$$\nabla_{\theta} J^*(x) = \ell + \frac{\partial A^*}{\partial \theta} e(u) \cdot e(p),$$

$$\nabla_{m_i} J^*(x) = \frac{\partial A^*}{\partial m_i}(x) e(u) \cdot e(p),$$

et

$$\frac{\partial A^*}{\partial \theta}(x) = T^{-1} \left( (A - B)^{-1} - \sum_{i=1}^q m_i f_A(e_i) \right) T^{-1},$$

$$\frac{\partial A^*}{\partial m_i}(x) = -\theta(1 - \theta) T^{-1} f_A(e_i) T^{-1},$$

$$T = (A - B)^{-1} - \theta \sum_{i=1}^q m_i f_A(e_i).$$

## Algorithme numérique de type gradient

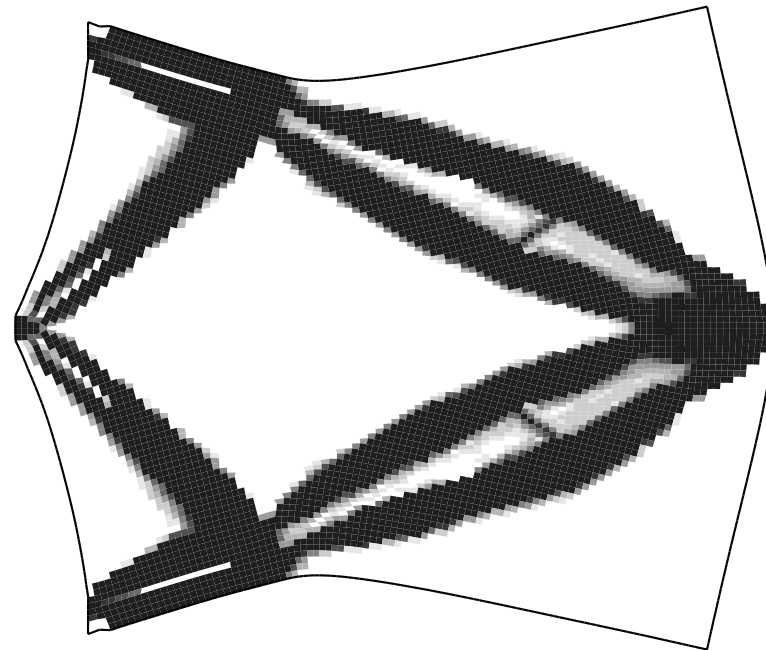
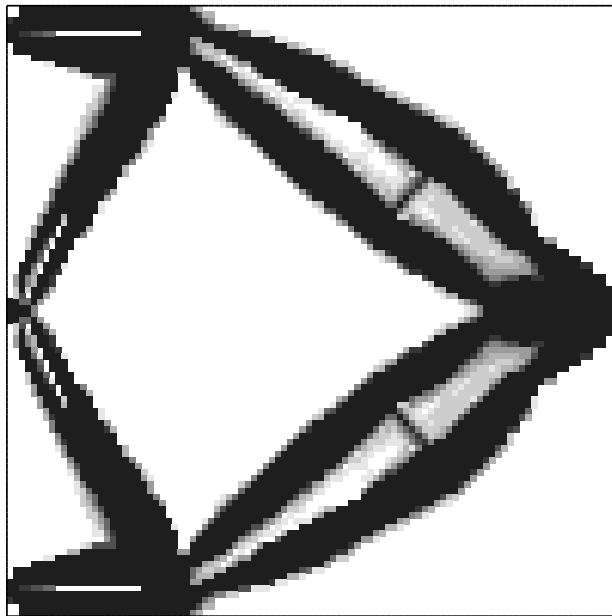
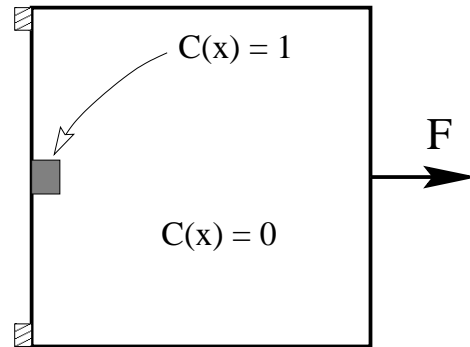
### Gradient projeté à pas variable:

1. Initialisation des paramètres de forme  $\theta_0, m_{i,0}$  (par exemple, des constantes satisfaisant les contraintes).
2. Itérations jusqu'à convergence, pour  $k \geq 0$ :
  - (a) Calcul de l'état  $u_k$  et de l'état adjoint  $p_k$ , à l'aide des précédents paramètres de forme  $\theta_k, m_{i,k}$ .
  - (b) Mise à jour des paramètres de forme :

$$\begin{aligned}\theta_{k+1} &= \max(0, \min(1, \theta_k - t_k \nabla_{\theta} J_k^*)), \\ m_{i,k+1} &= \max(0, m_{i,k} - t_k \nabla_{m_i} J_k^* + \ell_k),\end{aligned}$$

où  $\ell_k$  est un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte  $\sum_{i=1}^q m_{i,k} = 1$ , ajusté itérativement, et  $t_k > 0$  est un pas de descente tel que  $J^*(\theta_{k+1}, m_{k+1}) < J^*(\theta_k, m_k)$ .

# Exemple: inverseur de force



## Logiciels commerciaux et applications industrielles

Voir la page web:

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/links.html>

