



# Optimisation Topologique de Formes Évolutionnaires

Marc Schoenauer\*

Équipe-projet TAO – INRIA Saclay – Île-de-France

<http://www.lri.fr/~marc/>

20 mars 2008

\* Au CMAP, École Polytechnique (UMR CNRS 7641) avant sept. 2001



## Plan

### Première partie : les algorithmes évolutionnaires

- **Contexte** Optimisation
- L'algorithme le paradigme biologique
- Les deux points de vue
  - Moteur d'évolution Darwinisme artificiel
  - Opérateurs de variation Croisement et mutation
- Points-clé

### Deuxième partie : optimisation topologique de formes



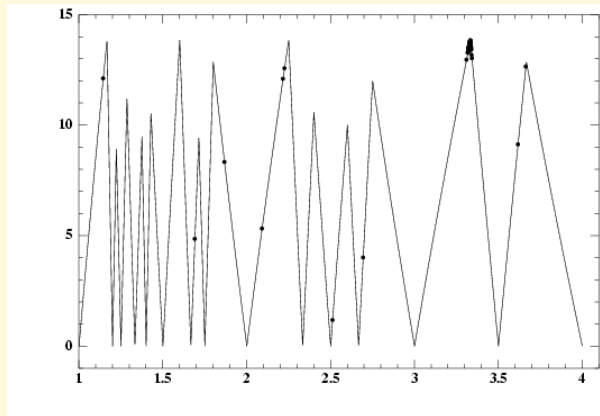
# $\mathcal{F}$ très chahutée

L. Taïeb, CMAP & Thomson

Espace de recherche : Interféromètres

Positionner des antennes

**But** : Maximiser la tolérance en conservant la précision.



Cas de 3 antennes,  $\mathcal{F}$  = Marge d'erreur (position 2ème antenne)

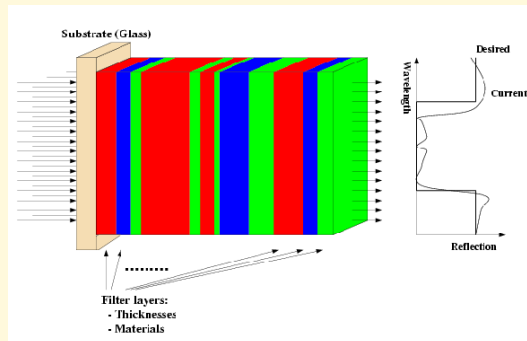


$\Omega$  mixte : discrets  $\times$  réels  
 Schutz & Bäck, ICD, Dortmund.  
 Martin, Rivory & Schoenauer,  
 Optique des Solides Paris VI & CMAP.

**Espace de recherche** : Filtres optiques

(matériau, épaisseur)<sub>1</sub> ... (matériau, épaisseur)<sub>N</sub>

**But** : Répondre au gabarit fixé.





# $\Omega$ = Circuits analogiques

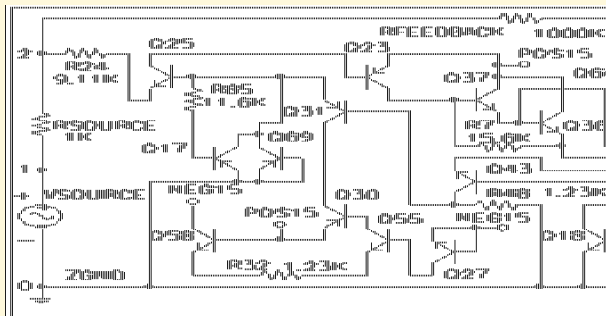
Koza et al., Stanford.

Espace de recherche : Circuits analogiques

Réseau de transistors, diodes, résistances

But : Fonctionnalités fixées

e.g. extraction de racine cubique





$\mathcal{F}$  non calculable  
Herdy & al., Berlin, PPSN96

**Espace de recherche** : Mélanges de café

**But** : Retrouver un arôme

$\mathcal{F}$  = note de l'expert





## Algorithmes d'optimisation

- Algorithmes de gradient
- Hill-Climbing
- Méthodes énumératives
- Méthodes stochastiques (méta-heuristiques)

### Critères de comparaison

- Type d'espace de recherche
- Régularité de la fonction objectif (contraintes)
- Recherche locale – recherche globale



## Plan

### Première partie : les algorithmes évolutionnaires

- Contexte Optimisation
- **L'algorithme** le paradigme biologique
- Les deux points de vue
  - Moteur d'évolution Darwinisme artificiel
  - Opérateurs de variation Croisement et mutation
- Points-clé

### Deuxième partie : optimisation topologique de formes





## Paradigme Darwinien

- Sélection naturelle      avantage aux espèces adaptées à leur environnement
- Variations “aveugles”  
    parents → enfants par petites déviations apparemment non dirigées.
- “Objectif”      capacité de survivre et de se reproduire
- Adaptation résultante      apparition d’espèces (e.g. bactéries résistantes).

### Mais

- Source d’inspiration
- Aide à l’explication
- **Pas justification**



## Algorithmes Évolutionnaires : La Métaphore

**Modèle :** L'évolution darwinienne des populations biologiques.

**Les individus les plus adaptés survivent et se reproduisent**

<b>Vocabulaire :</b>	<b>Individu</b>	Élément $X$ de $\Omega$
	<b>Performance</b>	Valeur de $\mathcal{F}(X)$
	<b>Population</b>	Ensemble de $P$ éléments de $\Omega$
	<b>Génération</b>	Passage de la population $\Pi_i$ à $\Pi_{i+1}$

**Processus :**

- 1) Sous la pression du milieu,
- 2) Les individus se croisent, mutent et se reproduisent.
- 3) Au bout d'un nombre certain de générations, les individus les plus performants apparaissent dans la population.

≡ les **optima** de  $\mathcal{F}$ ...



## Parallèle biologie/algorithmique

### Différences

Environnement changeant mécanismes spécifiques ?	Généralement fixe
Performance inconnue finalité des plumes du paon ?	C'est le point de départ
? ?	Tentation eugénique Lamarckisme possible



## Parallèle biologie/algorithmique

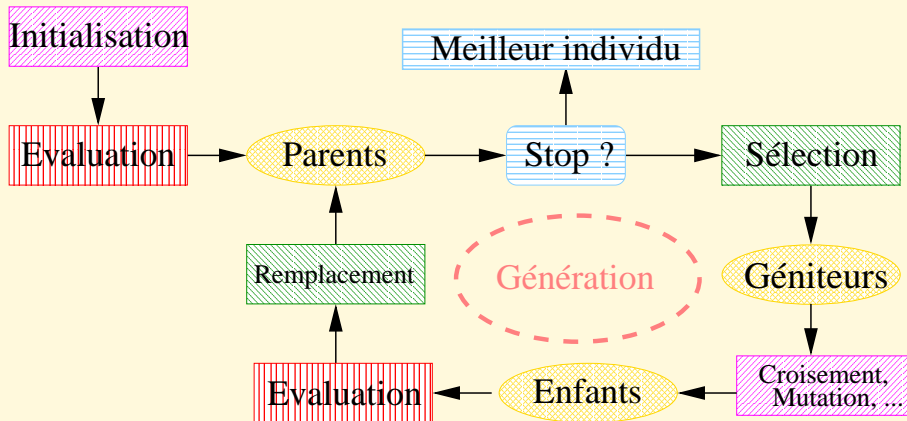
### Points communs

Diversité génétique essentielle	
Maladies fatales	Convergence prématurée
Multi-racial utile	Solutions multiples utiles
Lenteur du processus	
Néanderthal: -150 000 à -35 000	Vous verrez!
≈ 6000 générations	
Cro-Magnon: -30 000 à nous	
≈ 1200 générations	

On est peut-être pas à l'optimum,  
mais on a des solutions assez bonnes :-)



# Algorithmes d'évolution : Le Squelette



- Opérateurs stochastiques: Dépendent de la représentation
- "Darwinisme" (stochastique ou déterministe)
- Coût calcul
- Critère d'arrêt, statistiques, ...



## Plan

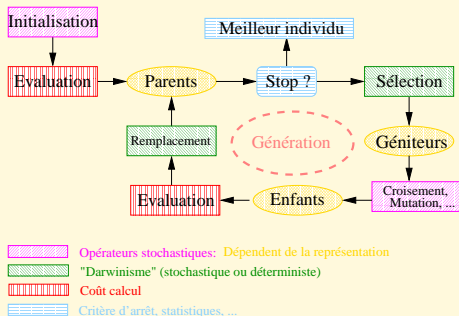
### Première partie : les algorithmes évolutionnaires

- Contexte Optimisation
- L'algorithme le paradigme biologique
- Les deux points de vue
  - Moteur d'évolution Darwinisme artificiel
  - Opérateurs de variation Croisement et mutation
- Points-clé

### Deuxième partie : optimisation topologique de formes



## Deux points de vue orthogonaux



- Le **Darwinisme artificiel** (sélection et remplacement) ne dépend que de la **performance**
- L'**initialisation** et les **opérateurs de variation** (croisement, mutation, ...) ne dépendent que de la **représentation**, i.e. l'espace de recherche.



## Le moteur d'évolution

### Sélection et remplacement

#### Deux étapes de “sélection”

- La **sélection** peut sélectionner plusieurs fois le même parent
- le **remplacement** sélectionne 0 ou 1 fois chaque individu

#### Points communs

- Darwinisme: Biais en faveur des plus adaptés
- Biais trop important: Perte de diversité
- Biais trop petit : pas de convergence

#### Opérateurs d'exploitation





## Le moteur d'évolution (2)

**Sélection** : Choisir ceux qui se reproduisent

- Déterministe, comparaisons de fitness ES historique
- Proportionnelle roulette, GAs historiques
- Stochastique, basée sur des comparaisons de fitness GAs historiques, EP historique

**Remplacement** : Choisir ceux qui survivent

- Choix parmi les enfants seulement, ou conflit de générations
- Peut également être déterministe ou stochastique



# Exemples de sélection stochastique

## Le tournoi

- **Tournoi (déterministe)**

$$ps \approx T$$

- Tournoi de taille  $T \in \mathbb{N}$
- Choix uniforme de  $T$  individus  
Rendre le meilleur

avec ou sans remplacement?

- **Tournoi stochastique (binaire)**

$$ps \approx 2t$$

- Taux  $t \in [0.5, 1]$
- Choix uniforme de 2 individus  
Rendre le meilleur avec probabilité  $t$

- **Avantages**

- Robustesse par rapport aux erreurs sur  $\mathcal{F}$
- Facile à paramétrer  $T$  ou  $t$



## Exemples de remplacement déterministe

### Les Stratégies d'évolution

$(\mu, \lambda)$ -ES : prochains  $\mu$  parents = meilleurs parmi les  $\lambda$  enfants

**Pour**: meilleurs résultats de convergence

**Contre**: on peut perdre les meilleurs

$(\mu + \lambda)$ -ES : prochains  $\mu$  parents =  
meilleurs parmi les  $\mu$  parents + les  $\lambda$  enfants

**Pour**: robustesse pratique

**Contre**: on peut converger vers un opt. local

**Paramètres** :  $\mu$  (taille population),  $\lambda$



## Plan

### Première partie : les algorithmes évolutionnaires

- Contexte Optimisation
- L'algorithme le paradigme biologique
- Les deux points de vue
  - Moteur d'évolution Darwinisme artificiel
  - **Opérateurs de variation** Croisement et mutation
- Points-clé

### Deuxième partie : optimisation topologique de formes



# Représentations

## Exemples usuels

- Représentation “binaire”

$$\Omega = \{0, 1\}^N$$

**Algorithmes génétiques** historiques

- Représentation “réelle”

$$\Omega = [0, 1]^N \text{ ou } \mathbb{R}^N \text{ ou } \dots$$

Algorithmes génétiques – codage réel, **Stratégies d'évolution**

- Représentation “combinatoire”

$$\Omega = \mathcal{S}_N$$

→ Genetic Local Search

- Représentation “par arbres”

Espace d'arbres – **Programmation génétique**

Plusieurs représentations pour le même problème

→ Dynamiques différentes



## Opérateurs de variation (non-dirigée)

**Le croisement:** échange d'information entre parents

- Début d'évolution : exploration

“linéarité” de la fonction objectif ?

- Fin d'évolution : exploitation

... efficacité décroissante

**La mutation:** (ré)introduction de diversité

- Ergodicité

Mais petites variations plus probables

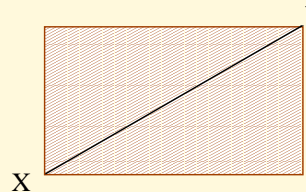
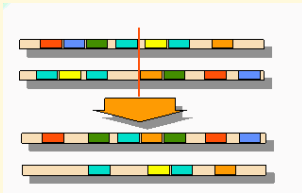
- “Strong causality”

Continuité faible locale



## Opérateurs de variation : Le croisement

### Exemples classiques



Échange de **gènes** Croisement de paramètres réels

### Exemple orgiaque: Cinq parents

La foule subjuguée **boira** ses paroles enflammées  
 Ce plat **exquis** enchantait leurs papilles expertes  
 L'aube aux doigts de roses se leva sur un jour **nouveau**  
**Le cadavre** sanguinolent encombra la police nationale  
 Les coureurs assoiffés se jetèrent sur **le vin** pourtant mauvais  
**pour un enfant surréaliste**



## Croisement (2): les arbres

Représentation de “programmes”

Fonctions analytiques, expressions booléennes, LISP, ...

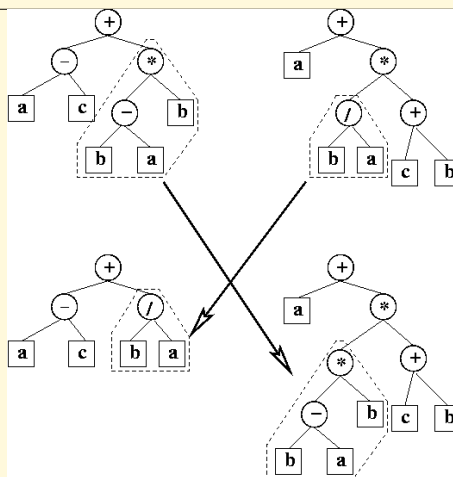
**Arbres construits à partir de**

$\mathcal{N}$  ensemble de noeuds

$\mathcal{T}$  ensemble de feuilles

**Exemple:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N} = \{+, \times\} \\ \mathcal{T} = \{X, \mathcal{R}\} \\ \longrightarrow \text{Polynomes}[X]. \end{array} \right.$$



Fermeture syntaxique

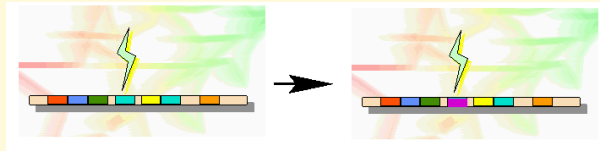




# Opérateurs de variation : La mutation

## Exemples classiques

- Mutation d'un gène



- Ajout de bruit Gaussien aux paramètres réels

Transparent suivant

## Un exemple sans queue ni tête

La terre est comme un orange **bleue**

La terre est **bleue** comme une orange



# Optimisation continue et mutations gaussiennes

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

## Ajout de bruit Gaussien

$$X := X + \sigma \mathcal{N}(0, C)$$

$\sigma > 0$ ,

$C \in \mathcal{M}(n, n)$  symétrique définie positive

pas de la mutation  
matrice de covariance

## Adaptation de $\sigma$ et $C$

- User-defined :  $C = I_n$ ,  $\sigma$  fixe ou décroissant Peu performant
- Auto-adaptatif : par mutation
- CMA-ES : en fonction de l'histoire de l'évolution, par exemple
  - Si plusieurs pas de même direction, augmenter  $\sigma$
  - Ajouter à  $C$  une matrice de rang 1 de vecteur propre la dernière direction de descente



## Plan

### Première partie : les algorithmes évolutionnaires

- Contexte Optimisation
- L'algorithme le paradigme biologique
- Les deux points de vue
  - Moteur d'évolution Darwinisme artificiel
  - Opérateurs de variation Croisement et mutation
- Points-clé

### Deuxième partie : optimisation topologique de formes



## Darwinisme artificiel : Points clé

- Indépendance objectif / moteur d'optimisation

Boîte noire ou connaissances du contexte ?

No Free Lunch Theorem

- Critère de succès : Conception vs Production

Au moins une fois une très bonne solution

En moyenne une solution assez bonne

- Une population, pas un individu

Attention à la perte de diversité génétique

- Exploration de l'espace / Optimisation locale

Le dilemme EVE



## Pragmatisme de rigueur

### Quelques résultats théoriques

- Algorithmes génétiques de base (chaînes de bits)

Convergence globale (G.Rudolph, R.Cerf)

Déceptivité et régularité fractale (E.L.)

- Stratégies d'évolution (vecteurs de paramètres réels)

Estimations d'erreur (G.Rudolph, H.-G. Beyer, A. Auger)

### Des leçons venues d'applications réussies

- Prise en compte du problème
- Trop(?) grande flexibilité



## Plan

### Première partie : les algorithmes évolutionnaires

- Contexte Optimisation
- L'algorithme le paradigme biologique
- Les deux points de vue
  - Moteur d'évolution Darwinisme artificiel
  - Opérateurs de variation Croisement et mutation
- Points-clé

### Deuxième partie : optimisation topologique de formes