

**Représentations
pour l'optimisation de formes
par évolution artificielle**

Marc Schoenauer*

Equipe-projet TAO – INRIA Saclay – Île-de-France

<http://www.lri.fr/~marc/>

20 mars 2008

* Au CMAP, École Polytechnique (UMR CNRS 7641) avant sept. 2001

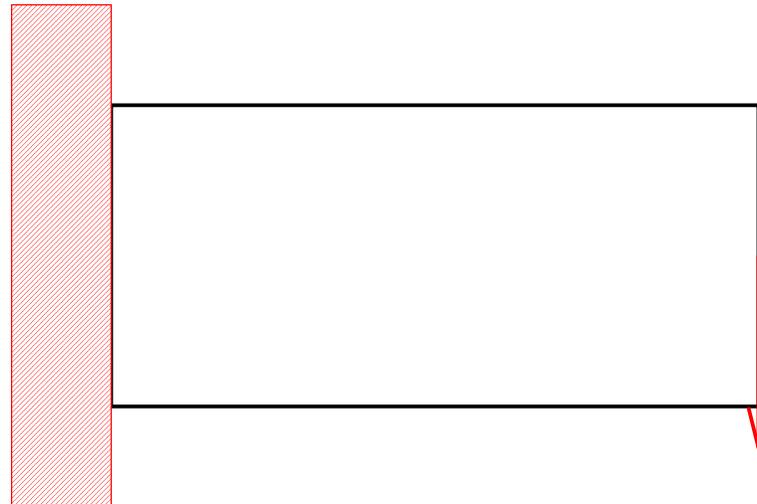
Optimisation topologique de formes

coll. F. Jouve

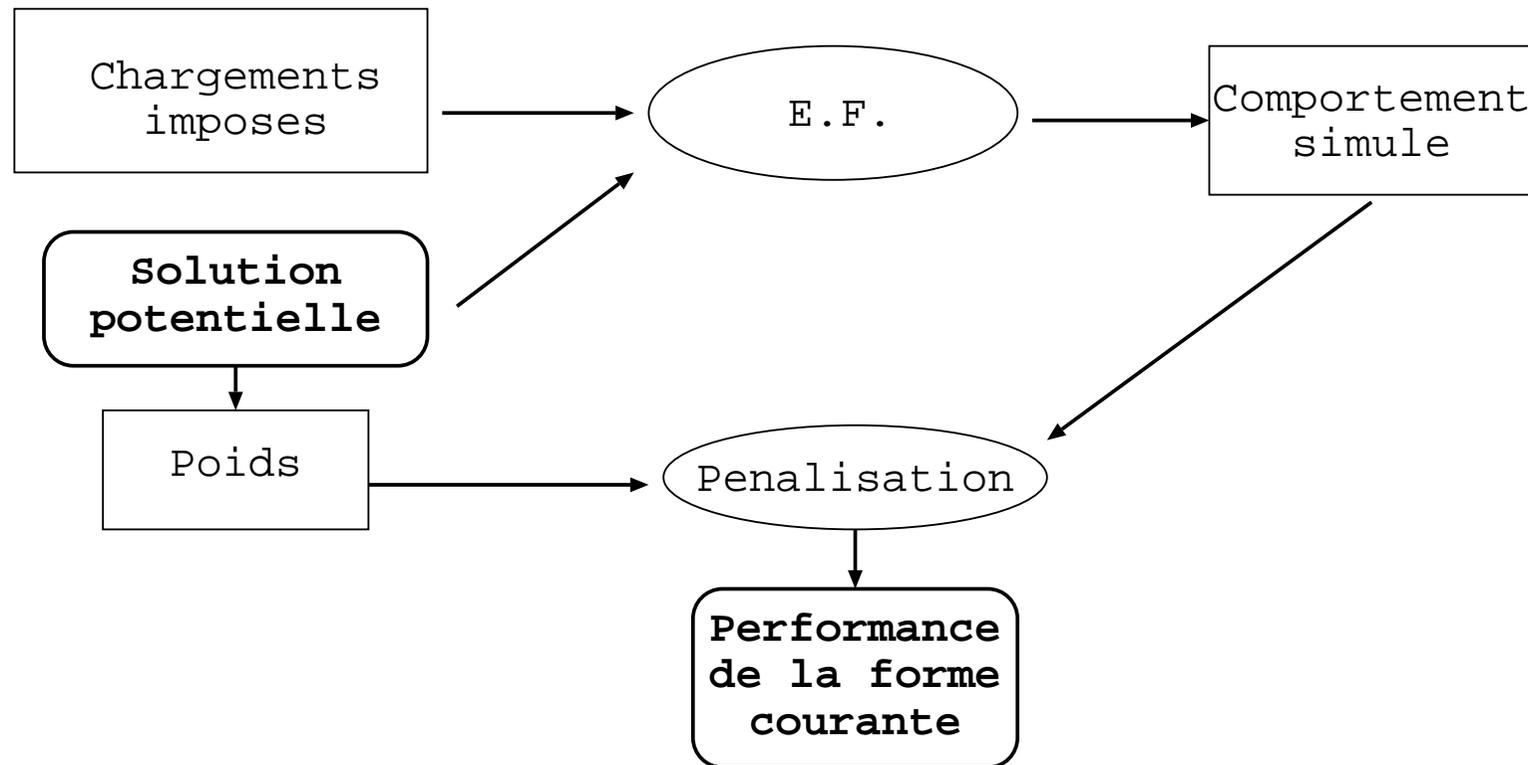
- Trouver une forme d'un domaine donné
- de poids minimal
- avec des contraintes sur le comportement mécanique

Exemple : Optimisation en rigidité

Bornes sur le déplacement maximal (et/ou les contraintes mécaniques) sous des chargements donnés

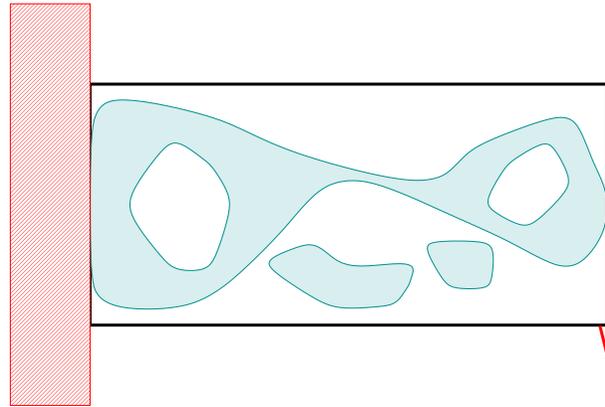


Approche Évolutionnaire de l'Optimum Design



- Fonction performance ?
- Représentation ?

La fonction performance



- Une forme peut être une structure non viable \longrightarrow performance = $+\infty$
- Seuls les parties connectées au(x) point(s) de chargement sont mécaniquement utiles \longrightarrow Pénaliser légèrement les parties inutiles

Problème:

Min $(W_{utile} + \varepsilon W_{inutile})$, avec $D_{max}^i \leq D_{lim}^i$, $i = 1, \dots, NbCharg^t$

D_{max}^i calculé par éléments finis.

Remarque: optimum sans doute proche de la frontière du domaine faisable

Prise en compte des contraintes

Par pénalisation

Minimiser $(W_{utile} + \varepsilon W_{inutile}) + \sum_i \alpha_i (D_{max}^i - D_{lim}^i)^+$

Choix des α_i ?

Pénalités dynamiques

Kane 96

$$\alpha(t) = \alpha_0 + (\alpha_F - \alpha_0) \left(\frac{t}{T} \right)^\beta$$

où T est le nombre maximal de générations

Croissant

Raccourcis dans la région infaisable autorisés au début

La solution donnée est faisable

Prise en compte des contraintes (2)

Pénalités adaptatives (BenHamida 2000)

$$\alpha(t+1) = \begin{cases} \frac{\alpha(t)}{\beta} & \text{if } \tau(t) > \tau_0 \\ \beta\alpha(t) & \text{si } \tau(t) < \tau_0 \\ \alpha(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

τ_0 seuil à définir, et $\beta > 1$ (typiquement 1.01 ... 1.1)

- Basé sur l'état de la population
- Ne garantit pas la faisabilité de la solution
- Recherche au voisinage de la frontière du domaine faisable

Représentations pour l'Optimum Design

Le problème abstrait

- Partition du domaine de définition en 2 sous-ensembles

Pas tout à fait quelconques

- Performance via un solveur Éléments Finis
- Remailler est source d'erreur numérique

Même maillage pour toute la population

- Espace phénotypique = bi-partitions

+ quelques propriétés mécaniques

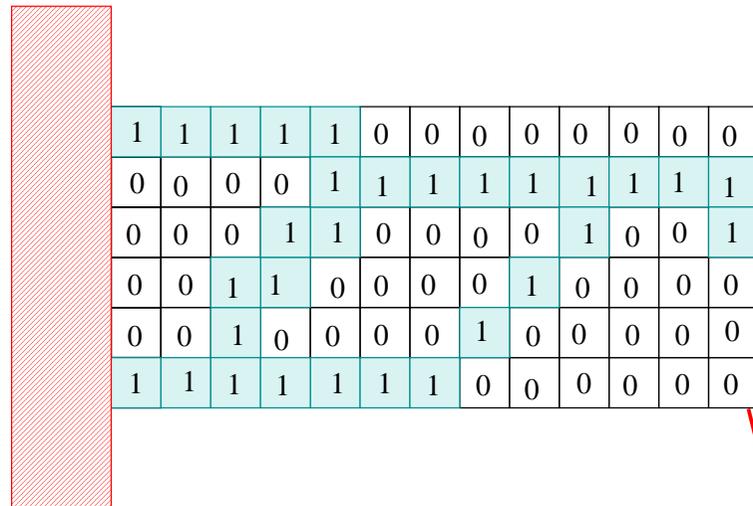
- Espace génotypique ?

et opérateurs de variation ?

Les tableaux de bits

- Partir d'un maillage
- “Naturel” (du point de vue EF)
- Utilisé par tous les pionniers

Jensen 92, Chapman & Jakiela 94-95, Kane 96



1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

La **complexité** de la représentation (nombre de “variables”) est celle du maillage

Les tableaux de bits ne sont pas des chaînes de bits

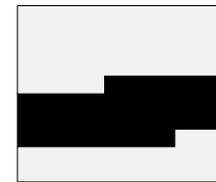
Formellement, tableau de bits $m \times n \equiv$ chaîne de mn bits ...

Mais attention aux opérateurs :

Les croisements standard 1D induisent un *biais horizontal* ...



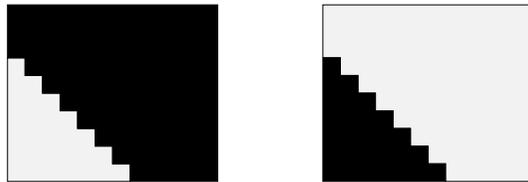
Croisement 1 point



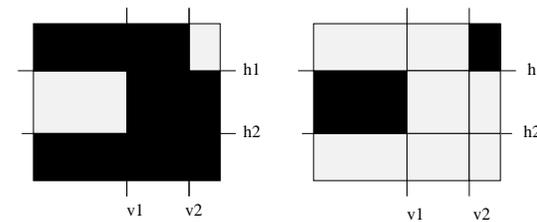
Croisement 2 points

Croisement spécifique 2D

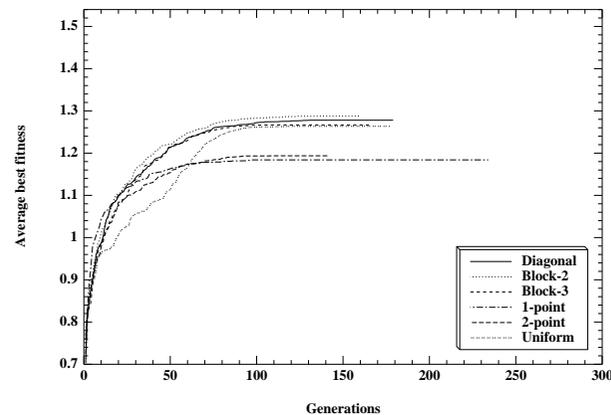
auquel il est facile de remédier :



Croisement “diagonal”



Croisement “par blocs”



Résultats expérimentaux (sans mutation).

Sur le problème de la section maximisant le moment d’inertie

Mutations

- Au début de l'évolution, mutation bit-flip standard

Pas de biais particulier

- En fin d'évolution, plus grande probabilité de muter les pixels de la frontière de la structure

Problem-dépendant!

Accélère la convergence fine

Tableaux de bits : résultats

C. Kane 94-96

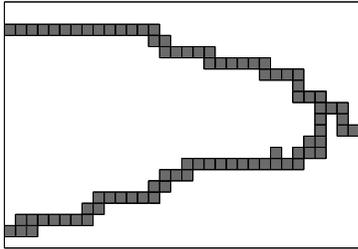
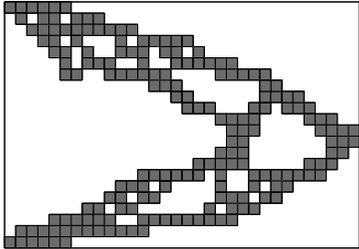
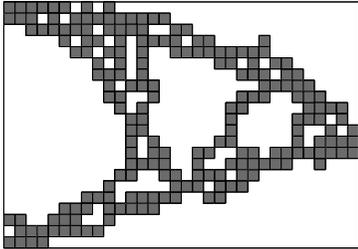
Conditions expérimentales

- Taille population 125
- Croisement par bloc (3) avec probabilité 0.6
- Mutation avec probabilité 0.2
- Stop après 1000 générations
- 80 000 calculs EF environ

6h d'une HP735/100 pour le maillage 22×32

1h d'un Pentium III 800MHz

Élasticité linéaire

			
D_{Lim}	2.463	0.1293	0.133
D_{Max}	2.439	0.129286	0.133
$Area$	0.2075	0.4675	0.49

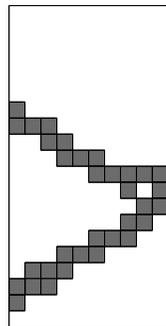
Résultats pour différentes valeurs du déplacement limite D_{Lim}

Optimisation de la compliance

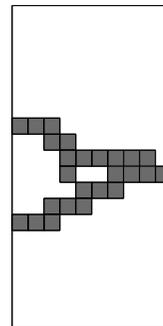
La méthode d'homogénéisation minimise le travail des forces externes, ou

compliance : $\mathcal{C} = \int Fu$,

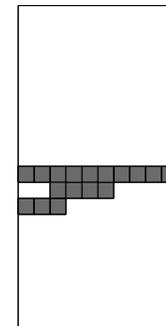
$$Fitness_{compliance} = \frac{1}{Area + \alpha \mathcal{C}}$$



$\alpha = 1$

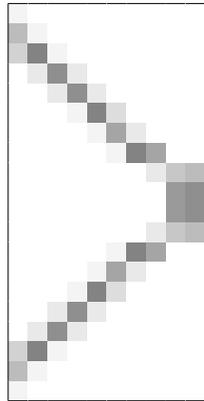
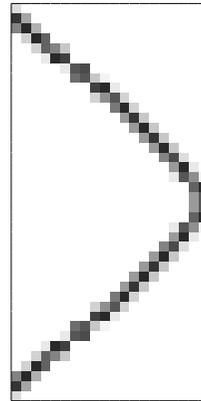
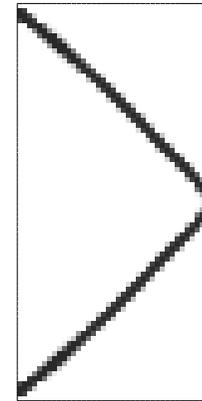


$\alpha = 0.1$



$\alpha = 0.01$

Optimisation évolutive de la compliance pour un maillage 10×20 ,
et différentes valeurs de α

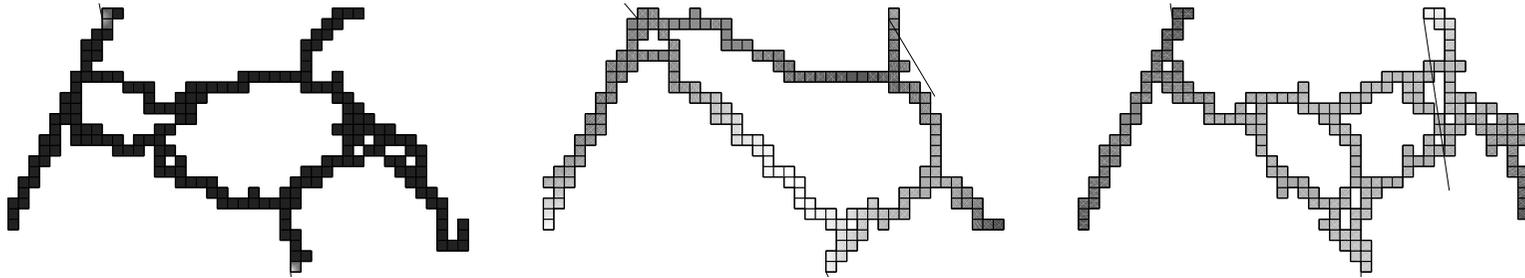
 10×20  20×40  40×80

Optimisation de la compliance par homogénéisation pour $\alpha = 1$, pour différents maillages

EAs plus flexibles à maillage donné

mais temps CPU de 2 ordres de grandeurs plus important

Chargements multiples

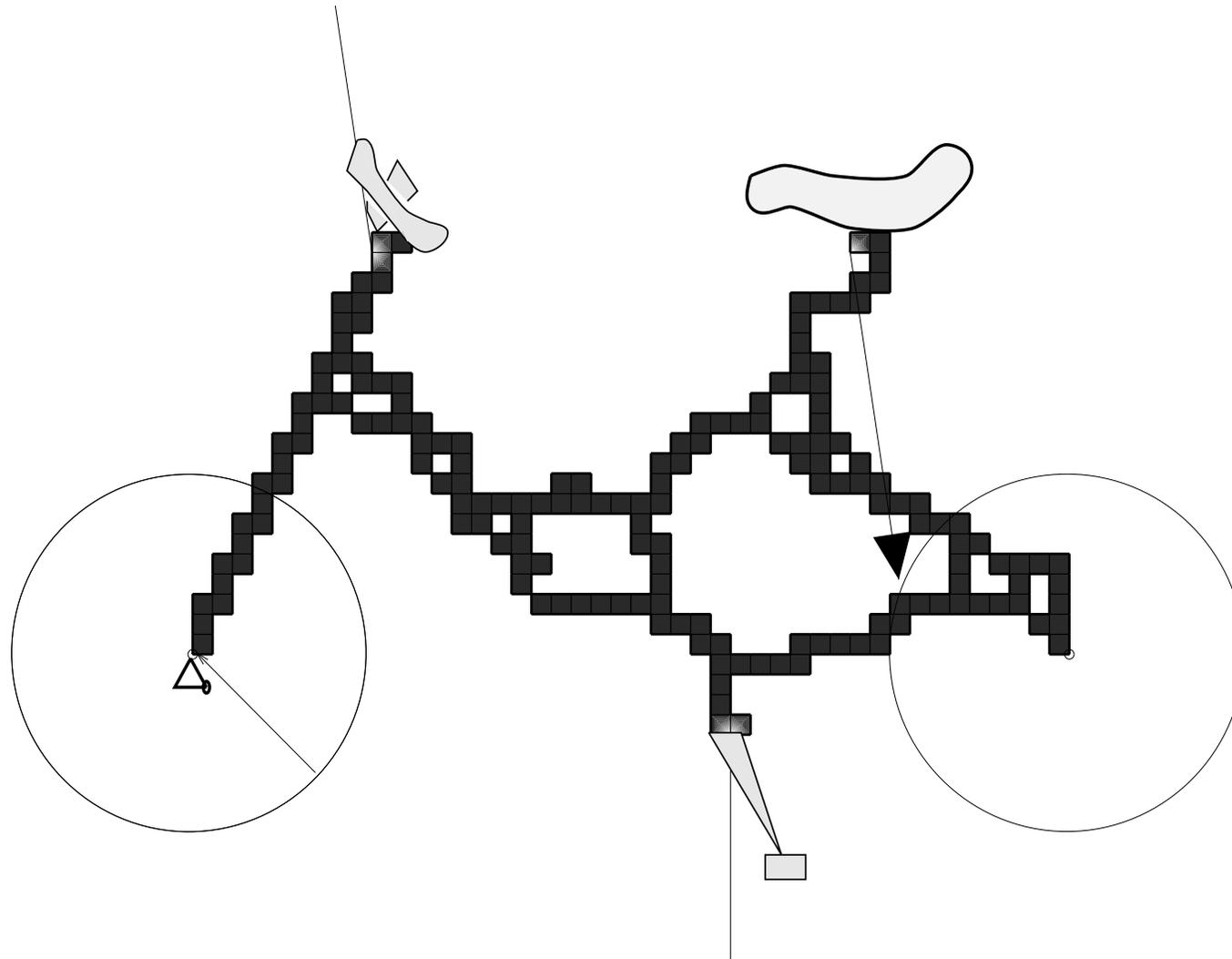


Trois résultats pour trois chargements différents

Optimisation pour les trois chargements simultanés:

$$\text{Fitness} = \text{Aire}_{\text{utile}} + \lambda \text{Aire}_{\text{inutile}} + \alpha \left[\sum_i (D_{\text{Max}}^i - D_{\text{Lim}}^i)^+ \right]$$

→ Trois calculs EF (même matrice) pour chaque calcul de fitness



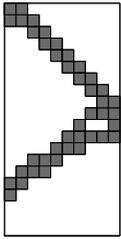
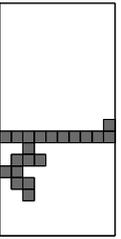
Résultat de l'optimisation multi-chargements

Élasticité non-linéaire

Un AE n'a besoin que du problème direct :

→ peut s'adapter à tout modèle mécanique

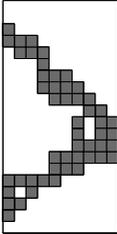
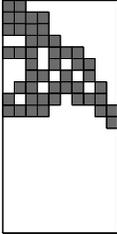
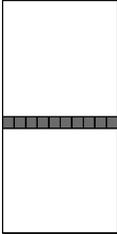
Grands déplacements

		
D_{Max}	0.022607	0.0199
σ_{Max}	0.076	0.77
$Area$	0.41	0.20
	(a): Small strains.	(b): Large strains.

(Désastreuses) formes optimales pour $F = 0.009$ and $D_{Lim} = 0.02285$.

Élasticité non-linéaire revisited

$$\min [Area + \alpha(D_{Max} - D_{Lim})^+ + \beta(\sigma_{Max} - \sigma_{Lim})^+]$$

			
F	0.009	0.018	0.09
D_{Lim}	0.22856	0.457	2.2856
σ_{Lim}	0.53	1.0622	5.3
D_{Max}	0.2143	0.4504	1.687
σ_{Max}	0.550	0.9835	4.379
$Area$	0.21	0.47	0.1

Résultats optimaux pour $\frac{F}{D_{Lim}}$ constant

Tableaux de bits : conclusions

Souplesse de l'approche évolutionnaire

- Tout modèle mécanique e.g. grands déplacements
- Chargement sur la frontière inconnue e.g. dôme sous-marin
- Solutions multiples Quasi-optimales

MAIS

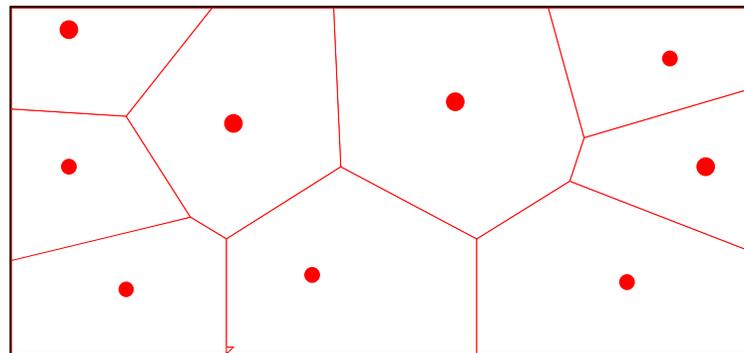
- Complexité de la représentation = taille du maillage
- Des résultats précis demandent des maillages fins sans parler du 3D
- taille pop. \propto nombre de variables Goldberg & al. 92, Cerf 95

Représentations indépendantes de tout maillage ?

Représentation de Voronoï

Diagrammes de Voronoï

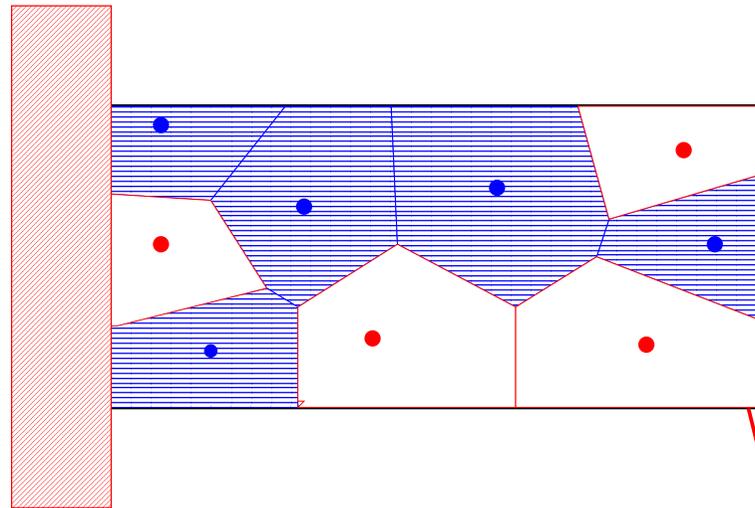
- Ensemble de sites S_1, \dots, S_n in \mathbb{R}^2 .
- Cellule associée à S_i : $Cell(S_i) = \{M; d(M, S_i) = \text{Min}_j d(M, S_j)\}$
- Partition de l'espace en polygones convexes



Représentation des formes

Chaque site est libellé 0/1 (pour vide/matériau)

Chaque cellule a le label de son site :

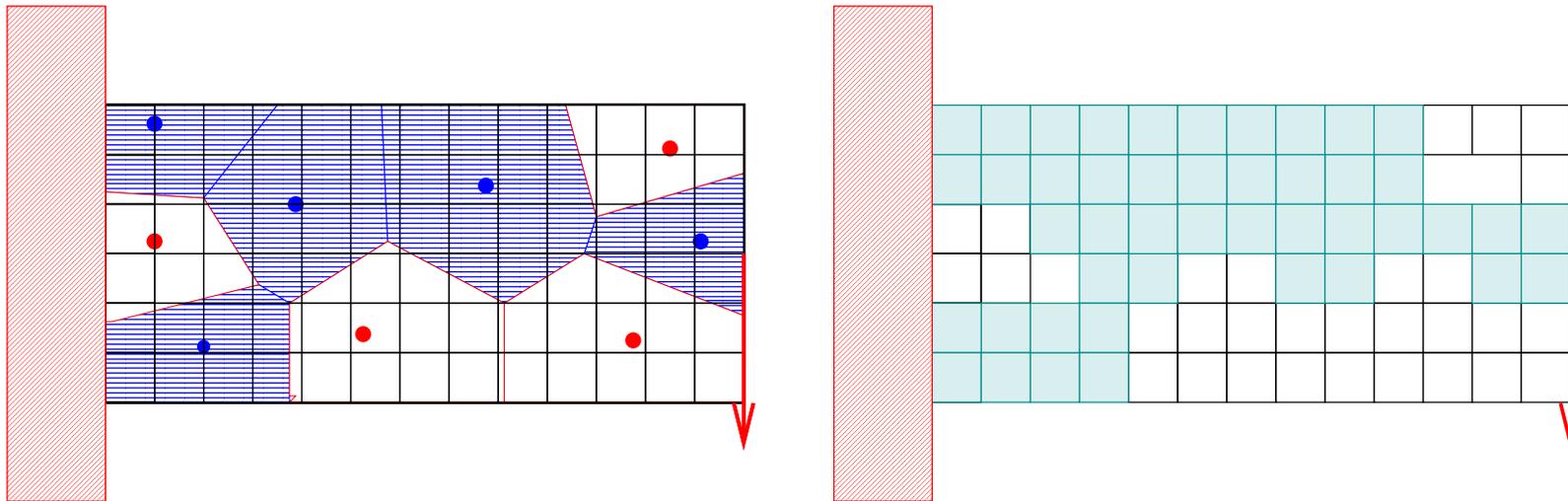


Génotype:

Liste non ordonnée de taille variable de sites (coordonnées)

$$((S_1, c_1), \dots, (S_n, c_n)),$$
$$n \in \mathbb{N}, c_i \in \{0, 1\}$$

Morphogénèse

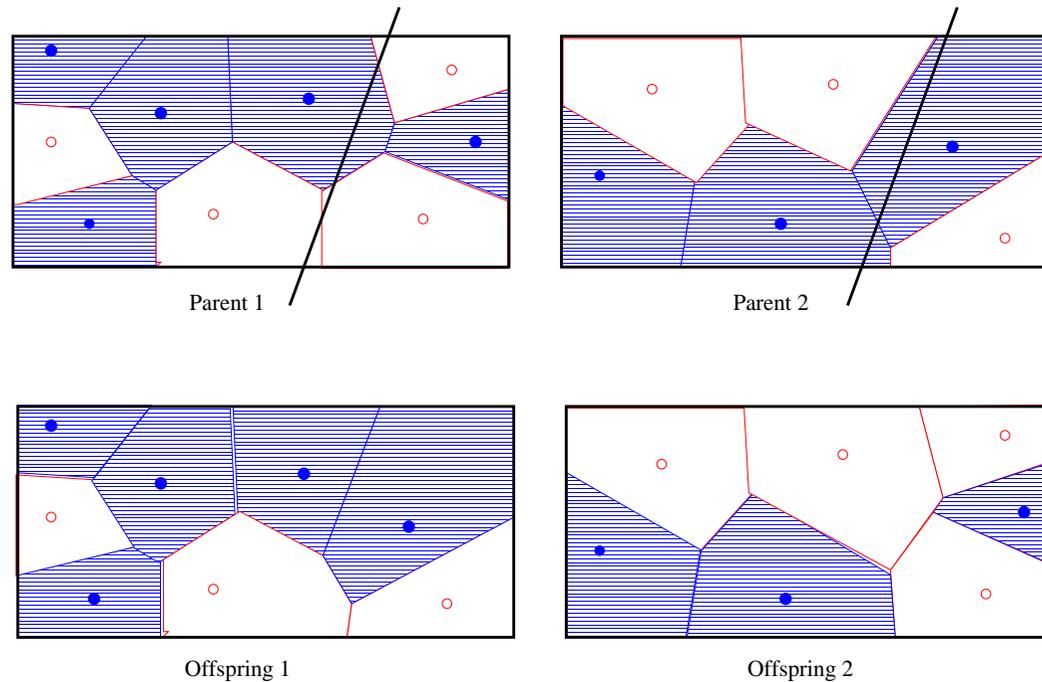


Projection d'un diagramme de Voronoï sur un maillage régulier

Opérateurs de variation

Croisement

Échange **géométrique** de sites



Mutations

- Mutation Gaussienne des positions des sites

Mutation adaptative à *la* ES possible

- Changement de *label* d'un site.

- Création d'un site

Aussi douce que possible

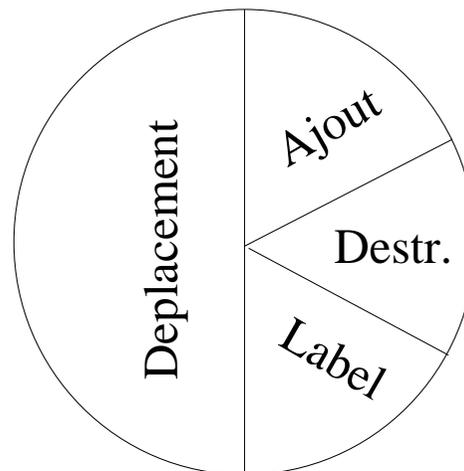
Opérateur d'exploration

- Destruction d'un site

Peut être biaisé vers les sites redondants

Opérateur d'exploitation

Choix aléatoire (poids à définir)



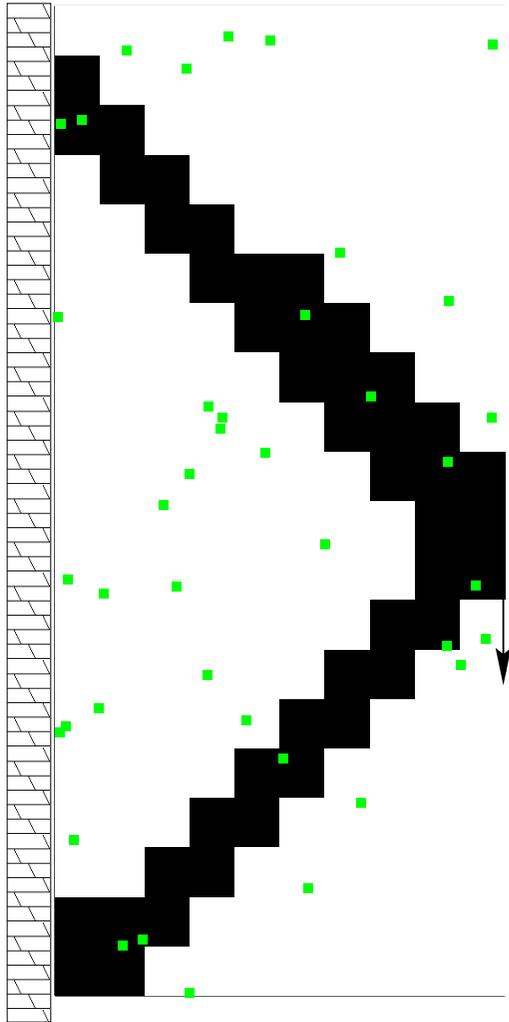
Optimisation en rigidité

H. Hamda

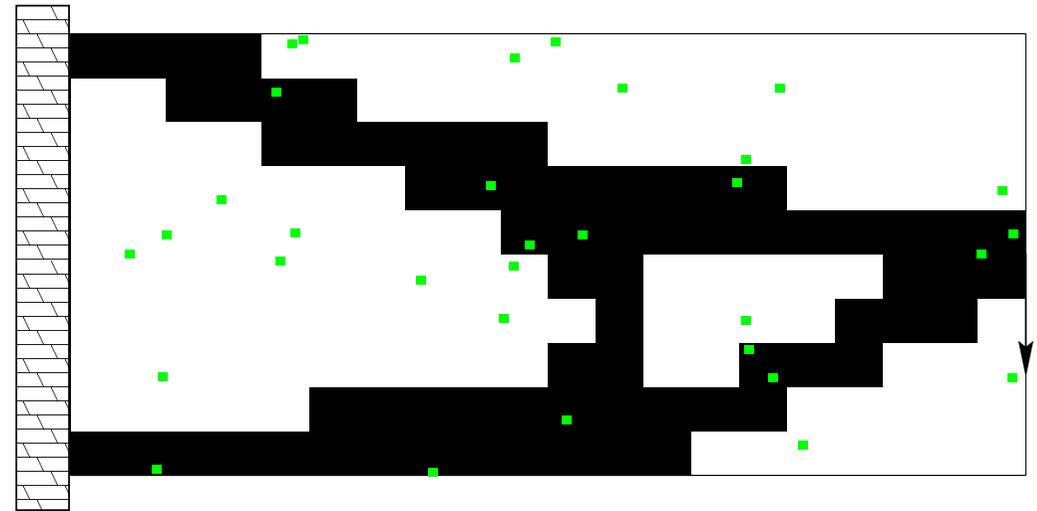
Problèmes test : les plaques consoles 1×2 et 2×1

- 21 essais indépendants pour chaque problème et jeu de paramètres
- Sélection par le rang et remplacement générationnel
- Taille pop.80-120
- Au maximum 200 000 calculs de performance
- (0.6, 0.3, 0.1) poids croisement – mutation – copie
- (1/2, 1/6, 1/6, 1/6) poids des mutations déplacement – label – ajout – destruction
- Meilleurs résultats et moyenne (écart-type)

Exemples de résultats



$D_{Lim} = 20$, poids=0.215, 35 sites



$D_{Lim} = 220$, poids=0.35, 32 sites

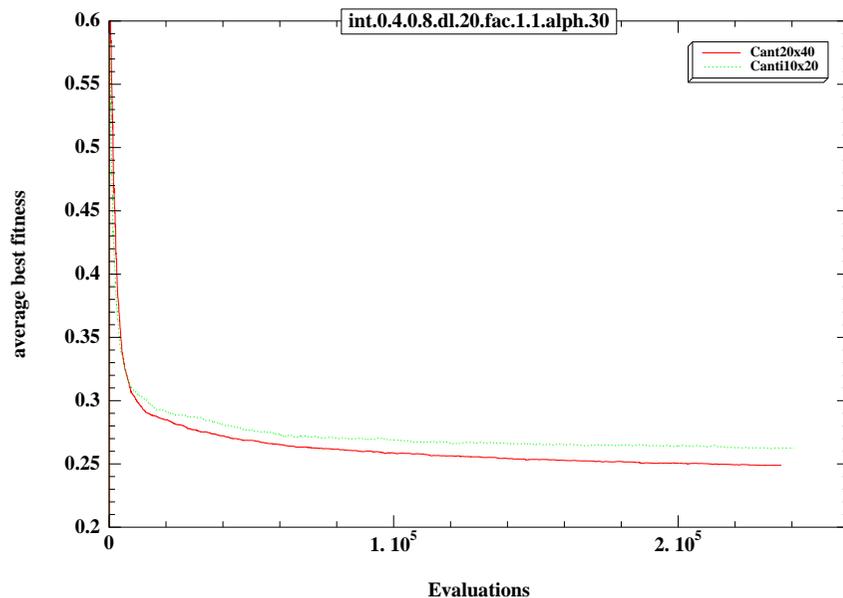
CPU : 2s/gen. (80 ind.), < 1 heure par résultat

Dépendance par rapport au maillage

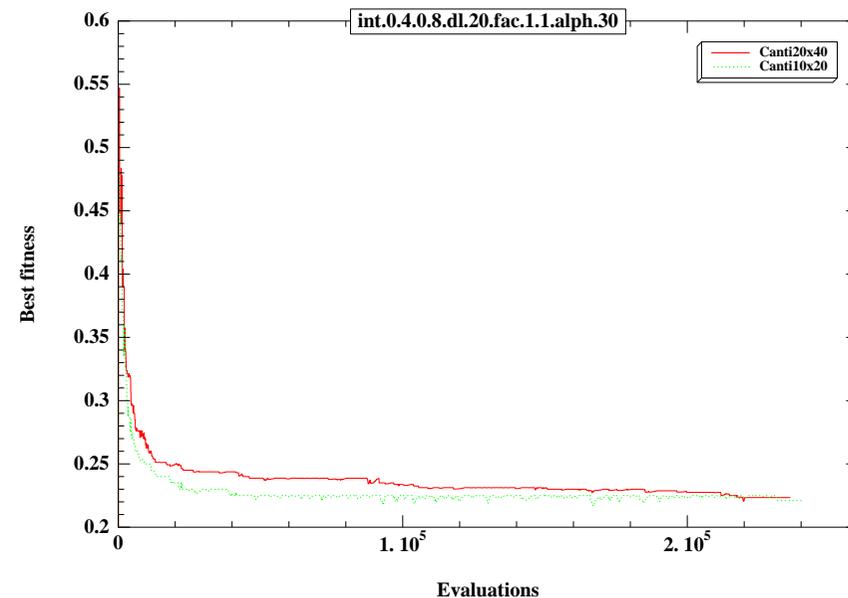
- La plaque 1×2 avec deux maillages réguliers : 10×20 et 20×40
- Coût CPU par évaluation $\times 3.5$

$\times 30$ pour le maillage 40×80

- **Mais** précision fn du # d'évaluations est stable

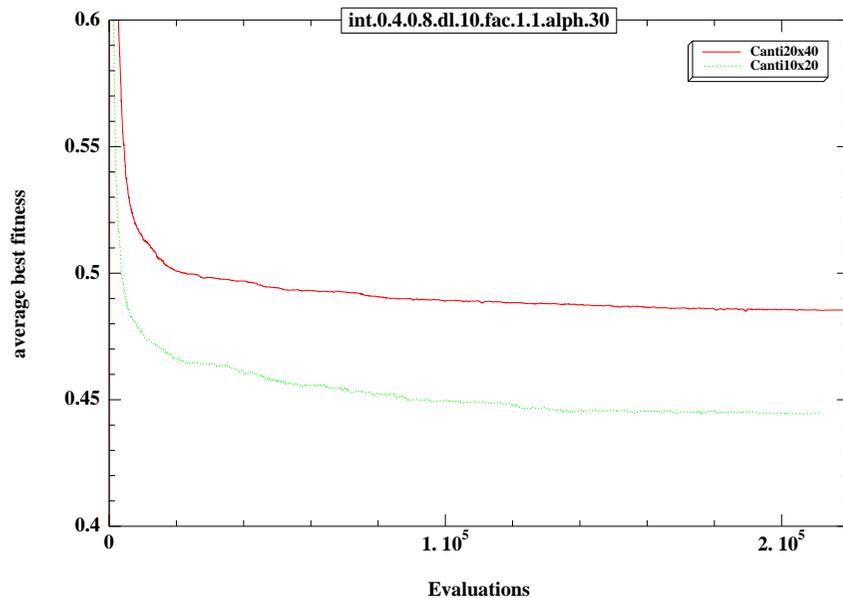


Moyenne des moyennes

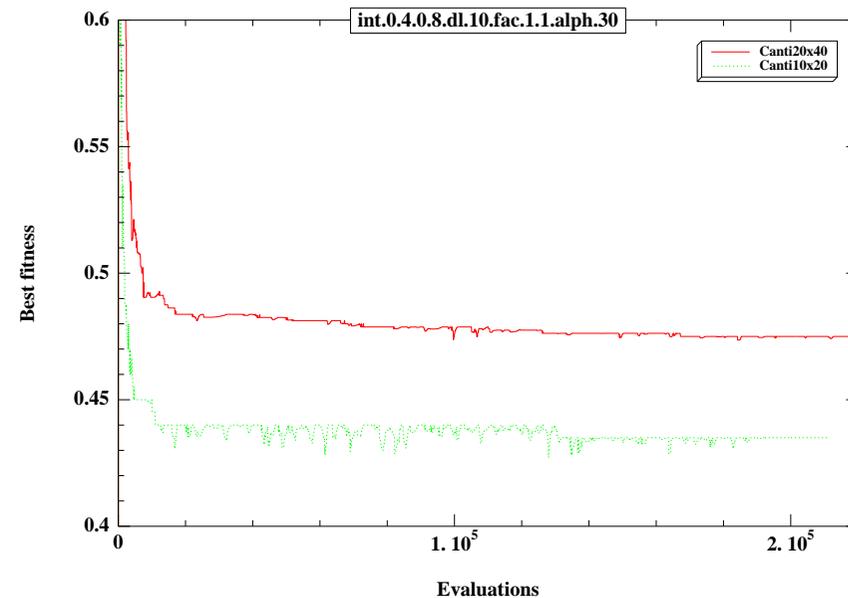


Moyenne des meilleurs

Attention toutefois



Moyenne des moyennes



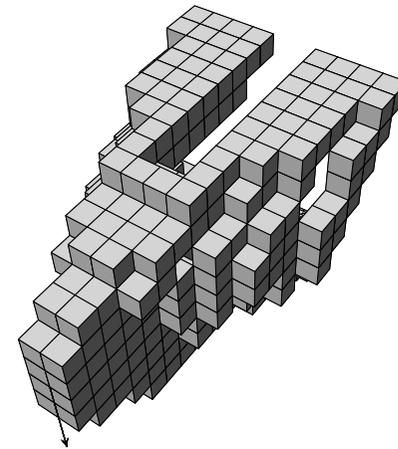
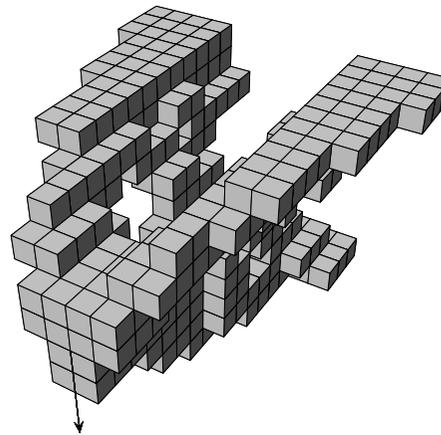
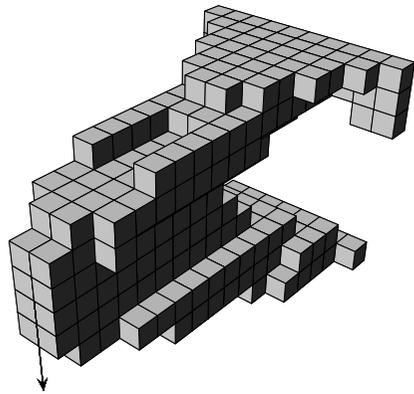
Moyenne des meilleurs

Meilleure solution sur le 10×20 : $W = 0.44$, $D_{Max} = 9.99738$

Projetée et calculée sur le maillage 20×40 , $W = 0.43125$, $D_{Max} = 11.2649$.

Résultats sur des benchmarks 3D

Solutions multiples



poids=0.15178, 103 sites

poids=0.166, 109 sites

poids=0.157, 112 sites

CPU : environ 6mn/gen. (80 ind.), 3-4 jours par résultat (1000 gen.).

Quelques résultats inattendus

Collaboration EZCT



Centre George Pompidou, Avril-Oct. 2007



Concours Serousi, Nov. 2007

Voronoi: Conclusions partielles

- Bien mieux que les tableaux de bits
- Résultats sur des topologies plus complexes

Consoles 10×1 par exemple

- Problèmes 3D
- Optimisation **multi-objectif**

Mais Le contrôle des frontières reste faible

Optimisation multi-objectif

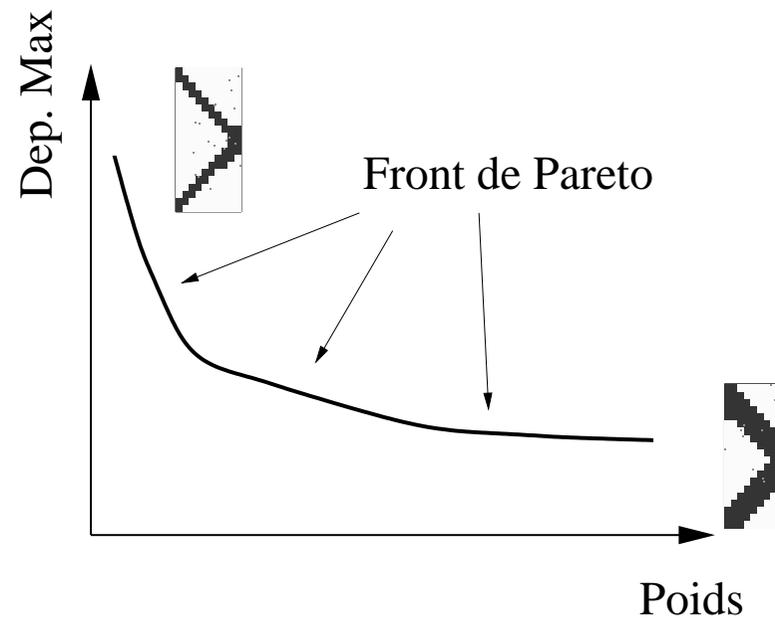
- Les problèmes réels mettent en fait en jeu plusieurs objectifs
- le plus souvent contradictoires
- Compromis?

Notion de dominance

Domination au sens de Pareto : x domine y si $\forall i \in [1, K], \mathcal{F}_i(x) \leq \mathcal{F}_i(y)$ et $\exists i \in [1, K], \mathcal{F}_i(x) < \mathcal{F}_i(y)$

Front de Pareto = individus non-dominés

Meilleurs compromis possibles



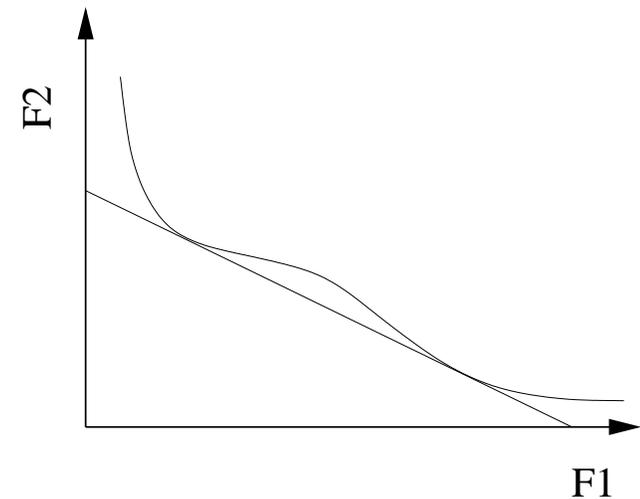
Démarche idéale :

- Identification du front de Pareto
- Prise de décision à information complète

Approche classique

Aggrégation des critères

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Argmin} \sum_0^N \lambda_i \mathcal{F}_i(X), \\ \lambda_i \geq 0 \text{ ssi } \mathcal{F}_i \text{ à min.} \\ \sum |\lambda_i| = 1 \end{array} \right.$$



- Il faut choisir les poids *a priori*
- Autant de calculs que de combinaisons de poids
- Parties concaves du Front de Pareto inaccessibles

Approches évolutionnaires Pareto (EMOAs)

Il “suffit” de modifier la sélection ...

Se ramener à un scalaire?

et on peut espérer échantillonner tout le front de Pareto

génotypiquement ou phénotypiquement?

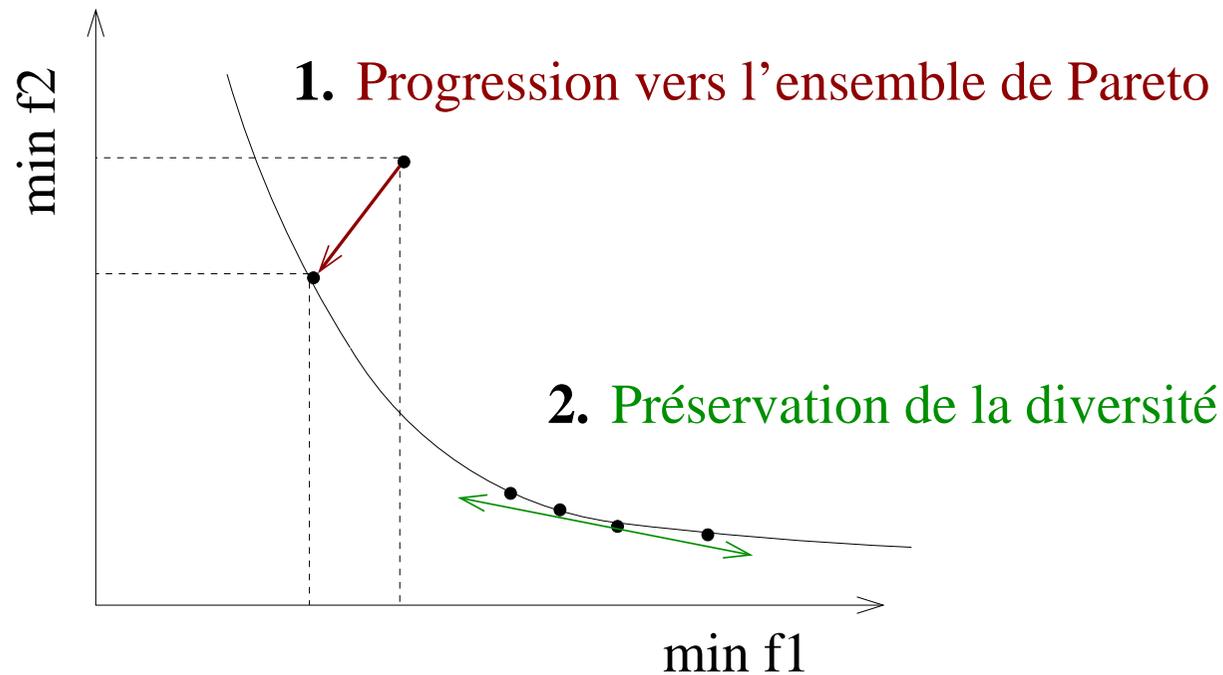
Mais attention à la perte de diversité

Dérive génétique

Historique

- MOGA Fonseca et Fleming 1993
- NSGA Srivanas et Deb 1993
- NPGA Horn et Nafpliotis 1993
- SPEA Eckart et Zitzler 1998
- PAES Knowles et Corne 1999
- NSGA-II Deb 1999

Sélection multi-objectif



Pour comparer deux individus :

1. **Dominance** au sens de Pareto
Mais ordre partiel: si non-comparables
2. **Densité** de solutions

→ échantillonnage de tout le front.

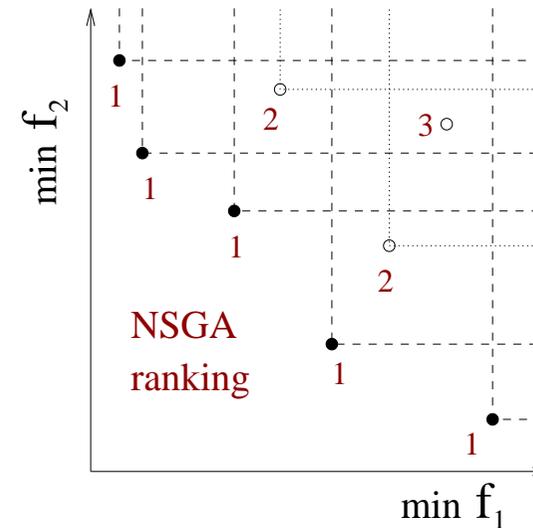
Un exemple : NSGA-II

Rang de Pareto

Non-dominés = rang 1

Non-dominés sauf par rang 1 = rang 2

...



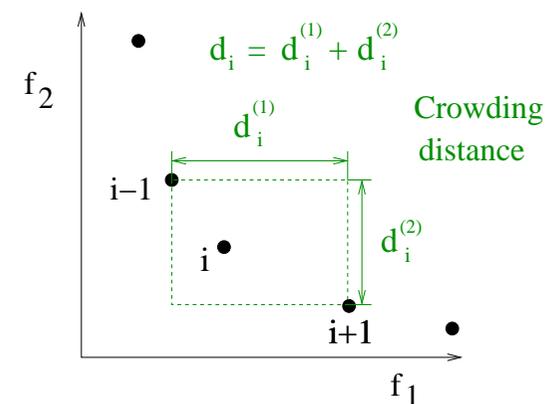
Mesure de surpeuplement

Pour chaque critère c

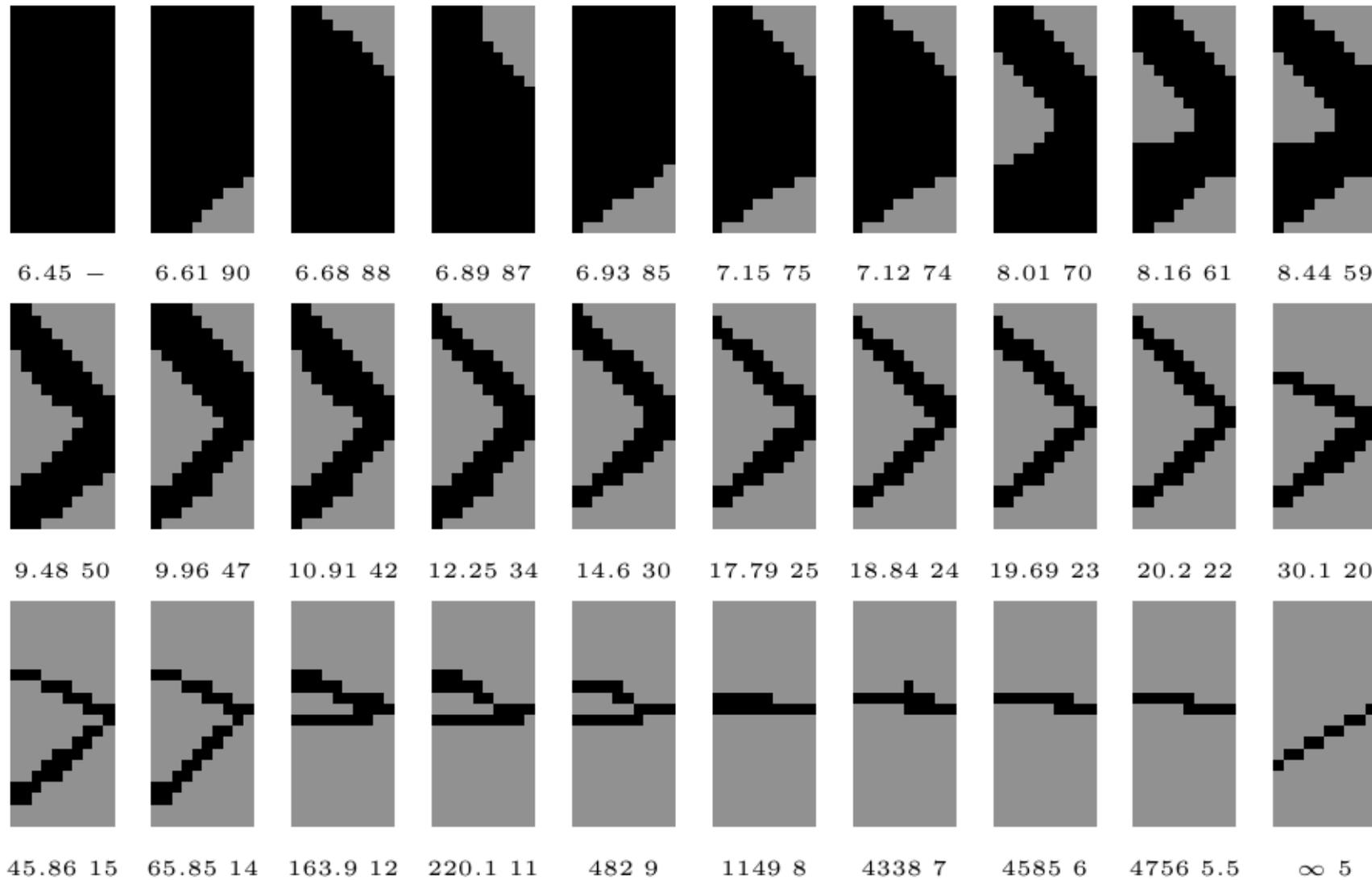
- Trier selon critère c cher?

- $d_c(x_i) = d(x_i, x_{i-1}) + d(x_i, x_{i+1})$,

$$d_{\text{surpeuplement}} = \sum_c d_c(x)$$

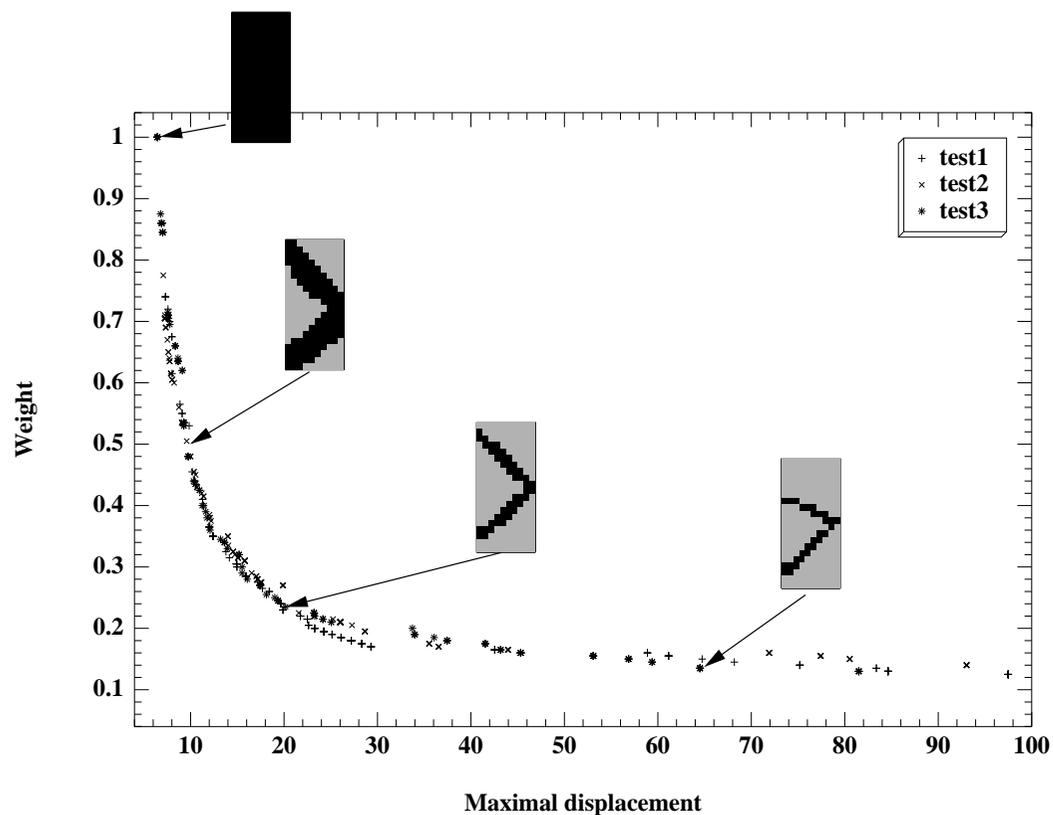


Poids et déplacement maximal – Console 10x20



Temps de calcul \equiv un calcul mono-objectif !

Poids et déplacement maximal – Console 10x20 (2)

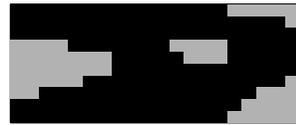


Trois fronts de Pareto indépendants (400 générations de 300 individus)

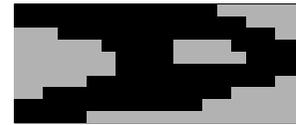
Poids et déplacement maximal – Console 20x10



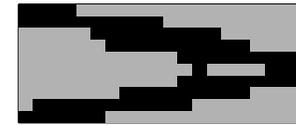
71.26 100



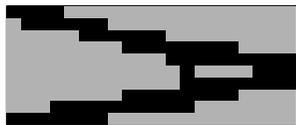
87.37 74.5



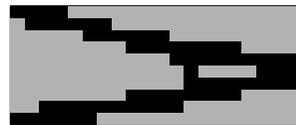
110.06 60



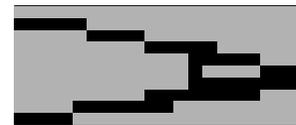
188.8 0.54



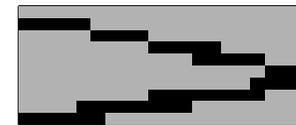
218.1 35



224 34.5



465.11 25



584.7 24



2112.6 21.5



5810 16.5

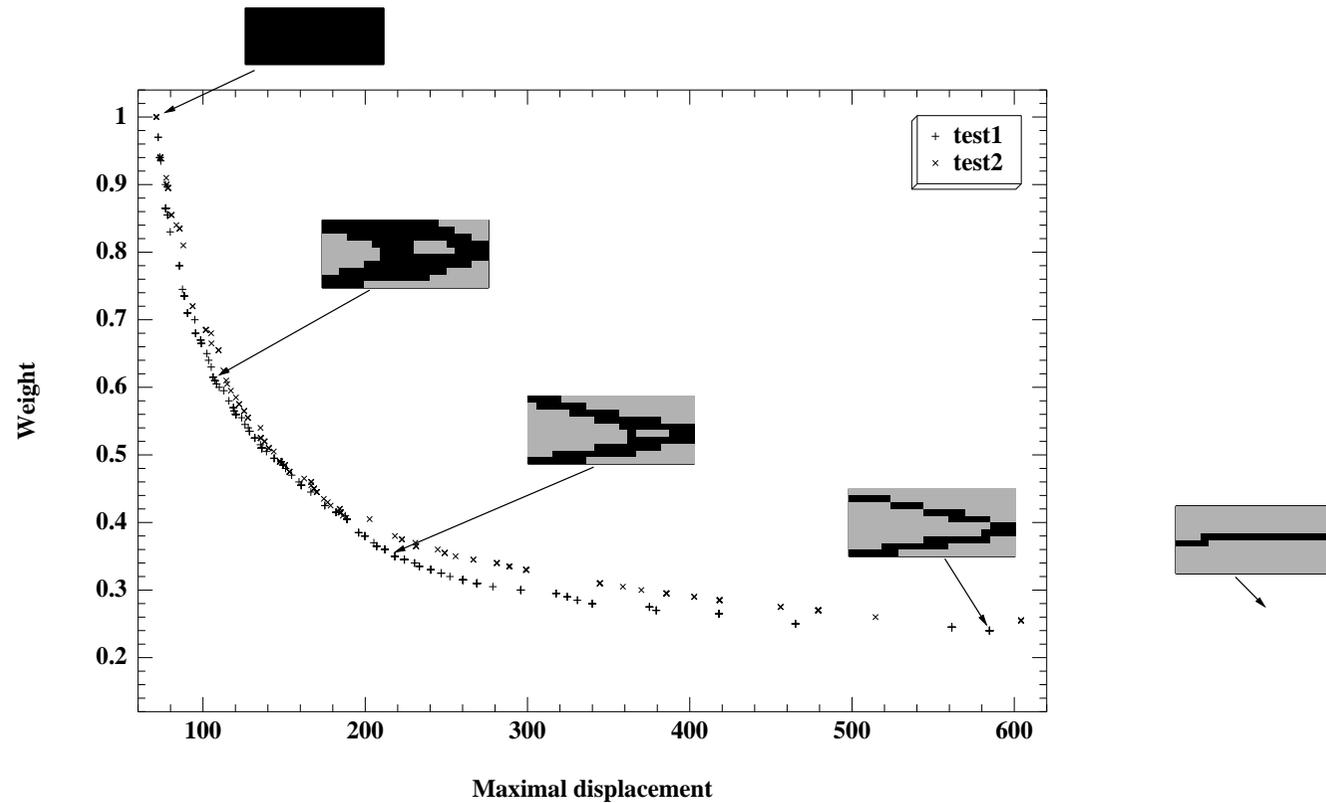


18487 13



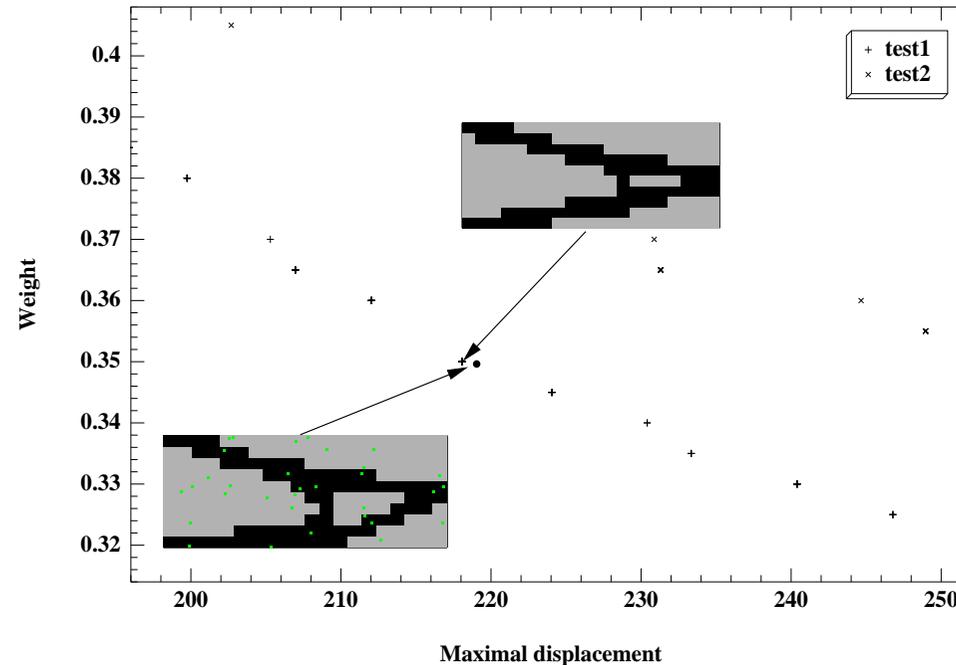
39050 10.5

Poids et déplacement maximal – Console 20x10 (2)



Deux fronts de Pareto indépendants (400 générations de 300 individus)

Poids et déplacement maximal – Console 20x10 (3)



Front de Pareto au voisinage du déplacement maximal 220.

Haut ← multi-objectif

Bas ← contrainte

Conclusion Multi-objectif

Souplesse et robustesse de l'approche évolutionnaire en optimisation de forme

- La formulation en problème sous contraintes est immédiate ...
- permet de traiter tout modèle mécanique ...
- et d'obtenir plusieurs solutions
- L'approche multi-objectif permet d'obtenir pour **un coût équivalent** les meilleurs compromis possibles (**le front de Pareto**).

Perspectives :

- Echantillonner une partie du front de Pareto seulement
- Eviter/rechercher des plages de valeurs propres
- Appliquer à des problèmes réels

Discussion

Représentations compactes non structurées

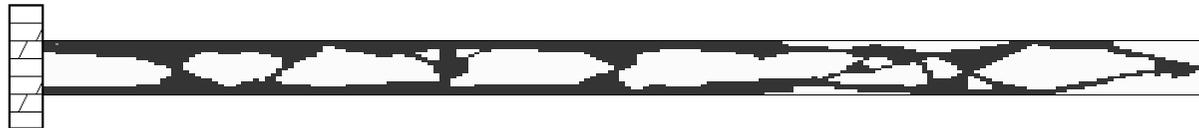
- Plus efficaces que les représentation en extension
- Indépendance vis-à-vis du maillage
- Barres spécifiques pour les structures en treillis

Utiliser des EF *ad hoc*

- Passage au 3D pour les “barres”
- Dépendance par rapport au maillage du *toss-coin*
- Causalité pour la représentation IFS
- Modularité, réutilisabilité

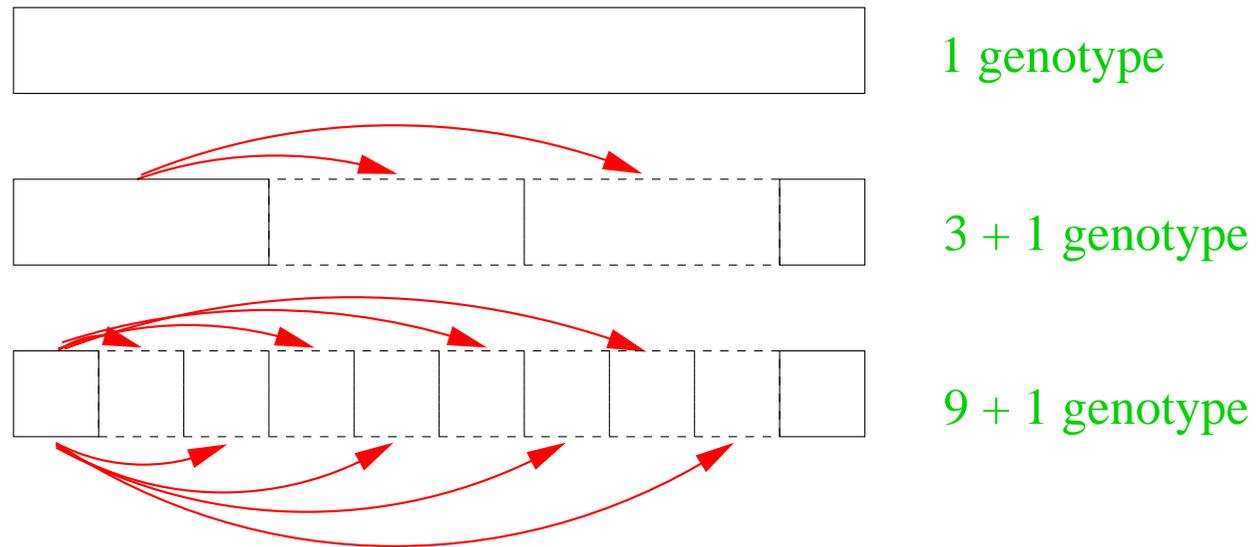
Populations de grande taille ?

Ne pas réinventer plusieurs fois la roue



$D_{lim}=12$, $D_{max}=11.99$, poids=0.445, CPU : environ 28s par gén. (80)

Modularité manuelle

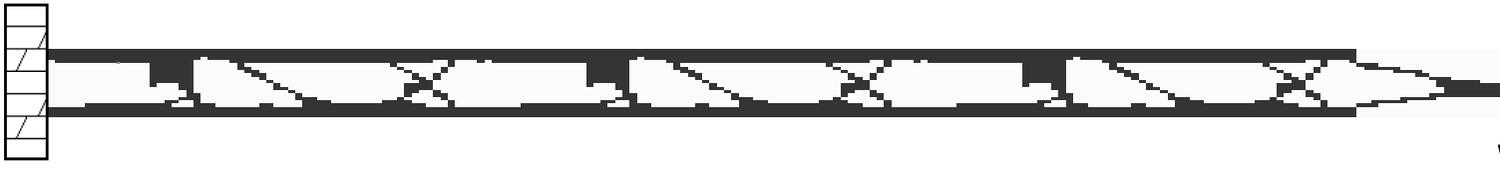


Modularité manuelle : meilleures structures

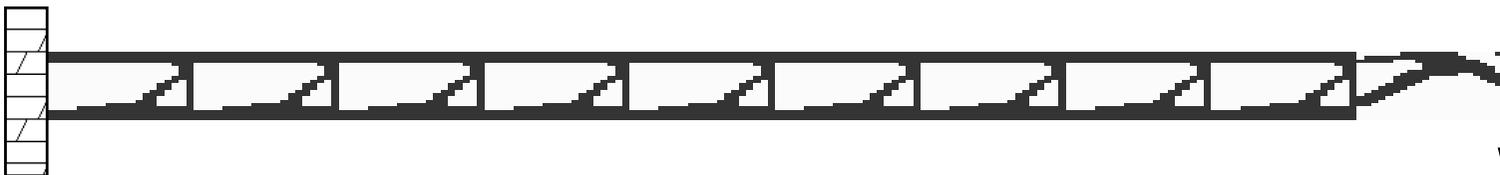
Maillage 200×20 , $D_{lim}=12$



poids=0.445, $D_{max}=11.99$, 105 barres



3+1-génotype : poids = 0.428, $D_{max}=11.98$, 60 barres



9+1-génotype : poids = 0.432, $D_{max}=11.99$, 40 barres

Évolution de “Scene graphs”

Mark Ebner, Univ. Würzburg – 2003

- Langages de description de scènes en informatique graphique

OpenInventor et VRML

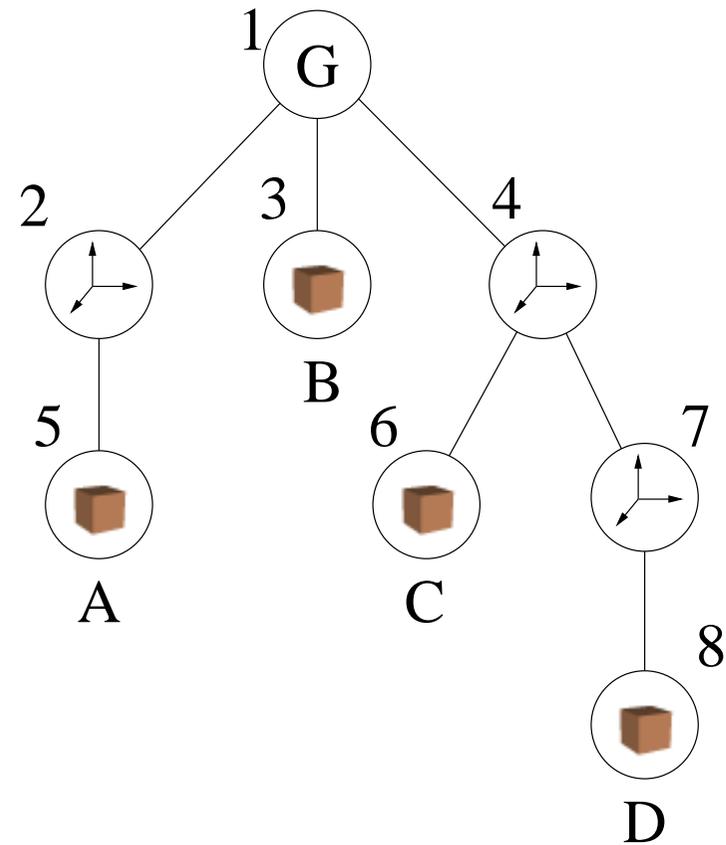
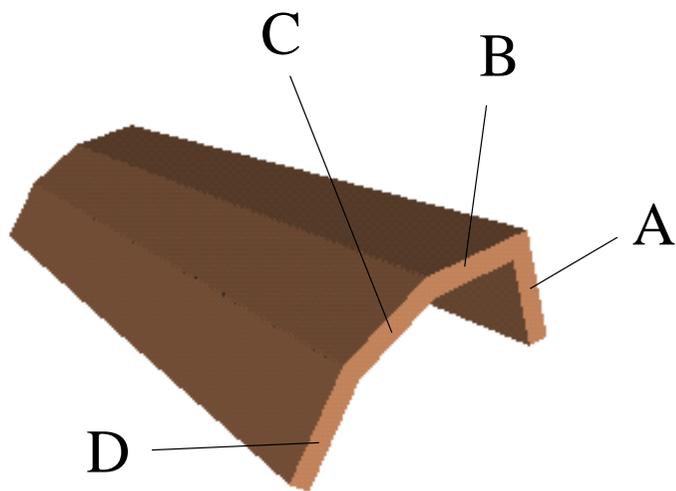
- Une scène est une liste hiérarchique de noeuds

- Différents types de noeuds:

formes élémentaires, transformations géométriques, noeuds “propriétés”,
noeuds “groupes”, ...

→ représentation par arbres

Example of a VRML Scene Graph

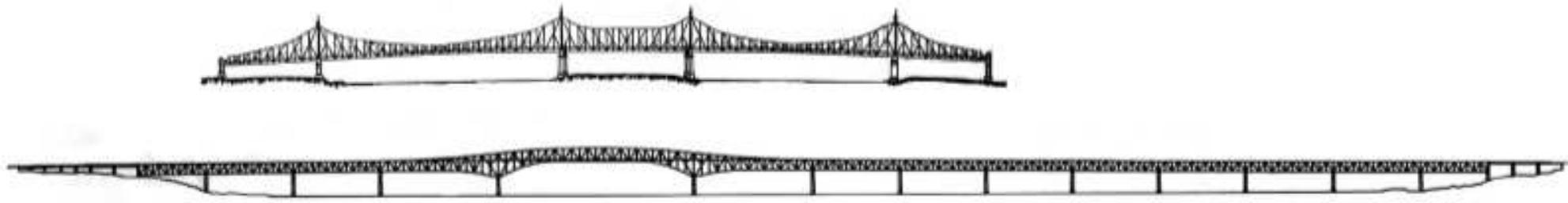


Évolution d'une turbine

- Tri-pale – Une seule pale répliquée Modularité manuelle
- Maximiser le couple
- Simulation par ODE – Open Dynamic Environment
Particules d'air aléatoires heurtant les pales
- Taille pop. 50-100, tournoi de taille 7
- Croisement et mutation avec probabilité 0.5
Ne manipulent que les noeuds
- Stratégie d'évolution pour l'optimisation des constantes

Vidéo

Vers une modularité adaptative ?



Talbrücke Wilde Gera (Computersim.)



Optimisation de formes : conclusion

Vers une créativité artificielle ?

- Sortir des sentiers battus peut être payant
- Solutions originales, quelquefois inattendues
- mais qui au final dépendent de **votre** créativité



Think different :-)