

Exercice I.

1. On a

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x, t; \theta) d\theta \right| \leq \left(\int_0^{2\pi} |f(x, t; \theta)|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} (2\pi)^{\frac{1}{q}}$$

avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. D'où le résultat.

2. On commence par multiplier l'équation par $p|f^{k+1}|^{p-2} f^{k+1}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \partial_t |f^{k+1}|^p + \Omega \cdot \nabla |f^{k+1}|^p + p\sigma |f^{k+1}|^p \\ & = p |f^{k+1}|^{p-2} f^{k+1} \frac{\sigma_s}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^k(x, t; \theta) d\theta \end{aligned}$$

puis on intègre en $t = 0$ et $T > 0$. On intègre la dérivée en espace qui disparaît, et on majore le second membre grâce à l'inégalité de Hölder; D'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \|f^{k+1}\|_{\Pi}^p + p\sigma \|f^{k+1}\|_{\mathcal{D}}^p \\ & \leq \frac{1}{c} \|f_0\|_{\Pi}^p + p\sigma_s \|f^{k+1}\|_{\mathcal{D}}^{p-1} \times \|f^k\|_{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

soit encore

$$\|f^{k+1}\|_{\mathcal{D}}^p \leq \frac{1}{pc\sigma} \|f_0\|_{\Pi}^p + \frac{\sigma_s}{\sigma} \|f^{k+1}\|_{\mathcal{D}}^{p-1} \times \|f^k\|_{\mathcal{D}}.$$

Posons $x = \|f^{k+1}\|_{\mathcal{D}}$, $y = \|f_0\|_{\Pi}$ et $z = \|f^k\|_{\mathcal{D}}$, de sorte que

$$x^p \leq \frac{1}{pc\sigma} y^p + \frac{\sigma_s}{\sigma} x^{p-1} z,$$

et

$$x \leq \frac{1}{pc\sigma} \left(\frac{y}{x}\right)^{p-1} y + \frac{\sigma_s}{\sigma} z.$$

Deux cas se présentent. Soit $\frac{y}{x} > 1$ donc l'inégalité recherchée est vraie en prenant $E = 1$ et $D = 0$. Soit $\frac{y}{x} \leq 1$, et alors l'inégalité cherchée est vraie en prenant $E = \frac{1}{pc\sigma}$ et $D = \frac{\sigma_s}{\sigma}$. D'où

$$\|f^{k+1}(t)\|_{L^p(\mathcal{D})} \leq E \|f_0\| + D \|f^k(t)\|_{L^p(\mathcal{D})}$$

avec $E = \max(1, \frac{1}{pc\sigma})$ et surtout $D = \frac{\sigma_s}{\sigma} < 1$ car on est dans le cas contractant.

3. Posons $g^k = f^{k+1} - f^k$ qui est solution du même problème avec $g_0 = 0$. Donc la suite des g^k tend vers 0 en D^k . Du coup

$$f^k = g^{k-1} + g^{k-2} + \dots + g^0 + f^0$$

est une série absolument convergente dans l'espace vectoriel normé complet (espace de Banach) $L^p(\mathcal{D})$. D'où la convergence de la série vers une limite.

4. A discuter.

5. C'est une conséquence de la formule de Duhamel. Si $f_0 \geq 0$ alors tous les f^k aussi.

6. En reprenant les calculs il apparait que la condition de Dirichlet ne pose pas de problème car

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} \int_{\theta} \Omega \cdot \nabla |f^{k+1}|^p dx d\theta = \int_{\partial\Pi} \int_{\theta} |f^{k+1}|^p (\Omega, n) d\sigma d\theta \\ & = \int_{\partial\Pi} \int_{\theta, (\Omega, n) > 0} |f^{k+1}|^p (\Omega, n) d\sigma d\theta \geq 0. \end{aligned}$$

Donc le signe de ce terme est positif, et la suite est toujours contractante.

Pour une condition de réflexion diffuse ($0 \leq \alpha \leq 1$, et $x \in \partial\Pi$ tel que $(\Omega(\theta), n) < 0$)

$$\begin{aligned} & f(x, \theta) = \alpha \langle f \rangle (x) \\ & = \alpha \frac{\int_{\mu, (\Omega(\mu), n) > 0} f(x, \mu) (\Omega(\mu), n) d\mu}{\int_{\mu, (\Omega(\mu), n) > 0} (\Omega(\mu), n) d\mu}, \end{aligned}$$

la situation est différente. L'intégrale de bord devient

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Pi} \int_{\theta, (\Omega, n) > 0} |f^{k+1}|^p (\Omega, n) d\sigma d\theta \\ & + \int_{\partial\Pi} \int_{\theta, (\Omega, n) < 0} |\alpha \langle f^k \rangle|^p (\Omega, n) d\sigma d\theta \\ & \geq \int_{\partial\Pi} \int_{\theta, (\Omega, n) > 0} |f^{k+1}|^p (\Omega, n) d\sigma d\theta \end{aligned}$$

$$-\alpha^p \int_{\partial\Pi} \int_{\theta, (\Omega, n) > 0} |f^k|^p(\Omega, n) d\sigma d\theta.$$

Tous calculs faits on obtient

$$\begin{aligned} & \|f^{k+1}\|_{\mathcal{D}}^p + \int_{\partial\Pi} \int_{\theta, (\Omega, n) > 0} |f^{k+1}|^p(\Omega, n) d\sigma d\theta \\ & \leq \frac{1}{pc\sigma} \|f_0\|_{\Pi}^p + \frac{\sigma_s}{\sigma} \|f^{k+1}\|_{\mathcal{D}}^{p-1} \times \|f^k\|_{\mathcal{D}} \\ & + \alpha^p \int_{\partial\Pi} \int_{\theta, (\Omega, n) > 0} |f^k|^p(\Omega, n) d\sigma d\theta. \end{aligned}$$

On retrouve le facteur contractant

$$E = \max\left(\frac{\sigma_s}{\sigma}, \alpha^p\right) < 1$$

dans le cas où la condition au bord laisse fuire un peu les neutrons $\alpha < 1$.

Pour une réflexion spéculaire au bord les résultats sont identiques.

Exercice II.

1.

$$f(x, t) = e^{-\sigma t} a(x - vt) \cos\left(\frac{x - vt}{\varepsilon}\right).$$

2. Évident. On ne garde dans l'équation approchée que les termes les plus "grands", les autres (σf en l'occurrence) étant "négligeables". A partir de ces prémices, on ne garde que

$$\partial_t g + v \partial_x g = 0, \quad g_0 = f_0.$$

3.

$$g(x, t) = a(x - vt) \cos\left(\frac{x - vt}{\varepsilon}\right).$$

A l'évidence g ne capture pas le terme de décroissance exponentielle, même si le support est correct.

4. On a

$$\partial_t e + v \partial_x e + \sigma e = g.$$

Toujours pareil. On multiplie par $2e$ et on intègre tout ce qui peut l'être. D'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|e(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) + 2\sigma \|e(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= (2e(t), b(t))_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq 2\|e(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|b(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \|e(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|b(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Par cela on déduit uniquement que

$$\|e(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \int_0^t \|b(s)\|_{L^2(\mathbb{R})} ds.$$

A priori il y a besoin de b petit, ce qui n'est pas le cas.

Le paradoxe vient d'une manipulation approximative des développements en puissance de ε . Dans les EDP, il faut spécifier les termes d'erreur plus correctement que ce qui a été fait au début.

Remarquons finalement que si on se contente de formulations faibles, alors f et g tendent vers 0 faiblement

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, t) \varphi(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} g(x, t) \varphi(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

En ce sens g tend vers f faiblement. Mais cela revient à oublier les variations de la donnée initiale.

Exercice III. Il s'agit de montrer que la solution de l'équation du télégraphe

$$\begin{cases} \partial_t w + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x z = 0, \\ \partial_t z - \frac{1}{\varepsilon} \partial_x w = -\frac{\mu}{\varepsilon^2} z \end{cases}$$

peut s'approcher par la solution de l'équation de diffusion

$$\partial_t h - \frac{1}{\mu} \partial_{xx} h = 0.$$

La donnée initiale est

$$h(x, 0) = w(x, 0).$$

On rappelle que la méthode des développements formels revenait à postuler

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + O(\varepsilon^2) \text{ et } z = z_0 + \varepsilon z_1 + O(\varepsilon^2).$$

1. Posons

$$\tilde{w} = h \text{ et } \tilde{z} = -\frac{\varepsilon}{\mu} \partial_x h.$$

Alors

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{w} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \tilde{z} = 0, \\ \partial_t \tilde{z} - \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \tilde{w} = -\frac{\mu}{\varepsilon^2} \tilde{z} + R \end{cases}$$

avec

$$R = \partial_t \tilde{z} = -\frac{\varepsilon}{\mu} \partial_{xt}^2 h.$$

2. Pour une donnée initiale suffisamment régulière, par exemple $(\partial_{xt}^2 h)(t = 0) \in L^2(\mathbb{R})$, alors $(\partial_{xt}^2 h)(t) \in L^2(\mathbb{R})$ pour $t > 0$, car l'opérateur de diffusion est contractant dans L^2 . Donc cela justifie l'inégalité

$$\|R(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\varepsilon C}{\mu}.$$

3. Enfin on s'intéresse à l'erreur

$$\hat{w} = \tilde{w} - w \text{ et } \hat{z} = \tilde{z} - z$$

qui vérifie le système

$$\begin{cases} \partial_t \hat{w} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \hat{z} = 0, \\ \partial_t \hat{z} - \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \hat{w} = -\frac{\mu}{\varepsilon^2} \hat{z} + R. \end{cases}$$

On ajoute l'hypothèse technique que $z(t = 0) = -\frac{\varepsilon}{\mu} \partial_x h(t = 0)$. Alors $\hat{w}(t = 0) = \hat{z}(t = 0) = 0$.

4. Il reste à s'assurer que l'équation du télégraphe est contractante dans L^2 . Cela ne pose pas de difficulté. D'où l'inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|\hat{w}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\hat{z}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \\ & \leq 2\|R(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\hat{z}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2C\varepsilon}{\mu} \|\hat{z}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|\hat{z}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2C\varepsilon}{\mu}$$

et

$$\|\hat{w}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2C\varepsilon}{\mu} \sqrt{t}.$$

Ouf !!