

**Exercice I.** Schémas pour la diffusion

On passe en revue quelques schémas numériques historiques pour la résolution numérique de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = 0.$$

1. Etudier le schéma semi-discret

$$u'_i(t) - \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{\Delta x^2} = 0.$$

Montrer qu'il est d'ordre 4 en espace,  $\infty$  en temps, et stable en norme  $L^2$ . Est-il convergent ? Et pourquoi ?

2. Etudier le schéma de Richardson

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

Montrer qu'il est d'ordre 4 en espace et 2 en temps. Montrer qu'il est inconditionnellement instable pour tout  $\Delta t > 0$ .

3. Etudier le schéma de Dufort et Frankel

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - u_i^{n-1} - u_i^{n+1} + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

Montrer qu'il est inconditionnellement stable pour tout  $\Delta t > 0$ . Quel est le problème ?

4. Etudier le schéma de Cranck-Nicholson

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$

Quel est son avantage sur le schéma rétrograde qui suit ?

5. Etudier le schéma rétrograde

$$\frac{3u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$

**Exercice II.** Le schéma saute-mouton (leap-frog) pour l'équation du transport

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0.$$

Ce schéma se définit par

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

1. Montrer que ce schéma est stable dans  $L^2$  et consistant à l'ordre 2.

2. Dans le cas  $A > 0$  on considère le problème pour  $x \in ]0, 1[$ . La condition au limite est de Dirichlet en  $x = 0$ .

Montrer qu'un schéma raisonnable sécrit

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad i = 1,$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad 2 \leq i \leq p-1,$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad i = p.$$

3. Montrer que ce schéma est instable au sens de Fourier, à cause de la condition au bord à droite.

**Exercice III.** Schéma upwind pour l'équation du transport

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0, \quad a > 0,$$

avec condition de Dirichlet à gauche.

1. Ecrire le schéma.

2. Montrer qu'il est stable dans tous les  $L^q$  sous CFL.

**Exercice IV.** Discrétisation en angle.

Soit la famille des polynômes de Legendre

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} ((\mu^2 - 1)^n).$$

1. Montrer que le degré de  $P_n$  est  $n$  et que sa parité est celle de  $n$ .

2. Montrer qu'ils sont orthogonaux

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu)P_m(\mu)d\mu = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1}.$$

3. Montrer la relation de récurrence

$$\mu P_n(\mu) = \frac{(n+1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu)}{2n+1}.$$

4. Montrer que les racines de  $P_n$  sont réelles, distinctes, symétriques et comprises dans  $] -1, 1[$ .

5. Montrer que  $P_n$  est solution de l'équation différentielle

$$(1 - \mu^2)P_n'' - 2\mu P_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2\mu x}} = \sum_n P_n(\mu)x^n.$$

6. Soit l'équation

$$\partial_t f + \mu \partial_x f = \sigma \left( \frac{\int_{-1}^1 f(\mu') d\mu'}{2} - f \right).$$

On approche  $f$  en tronquant la série

$$f(x, t, \mu) \approx \sum_{n=0}^N f_n(x, t) P_n(\mu).$$

Justifier le système

$$\partial_t f_n + \frac{n+1}{2n+1} \partial_x f_{n+1} + \frac{n}{2n+1} \partial_x f_{n-1} = \sigma (\delta_{n0} - 1) f_n$$

pour  $0 \leq n \leq N$ . Par convention  $f_{-1} = f_{N+1} = 0$ .

7. Montrer l'inégalité

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{2} \int_{\mathbb{R}} f_n^2(x, t) dx \right) \leq 0.$$

8. En déduire que ce procédé d'approximation angulaire est précis. Plus précisément montrer que

$$\sum_{n=0}^N f_n(x, t) P_n(\mu) \rightarrow_N f$$

dans  $L^2(\mathbb{R})$ . On fera toutes les hypothèses de régularité nécessaires.

9. Proposer une méthode numérique pour la résolution de

$$\partial_t X + A \partial_x X = 0.$$

où  $A = A^t$  est une matrice symétrique de taille  $N$ . Appliquer à la discrétisation du système du 6..