MASTER DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES
ANALYSE NUMERIQUE ET E.D.P.
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire, F. Coquel

Sujet 10 : Eaux peu profondes et schémas équilibres

On propose d'approcher numériquement les solutions des équations des eaux peu profondes avec bathymétrie en une dimension d'espace :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, \quad x \in I\!R, \ t > 0, \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + gh^2/2) = -gh \ \partial_x B(x), \end{cases} \tag{1}$$

où h, g désignent respectivement la hauteur d'eau et la constante de gravité puis B l'élévation du fond d'un lac. La difficulté réside ici dans la capture de solutions stationnaires : la surface d'un lac au repos doit être horizontale et non pas tendre à épouser le relief immergé avec une erreur en $\mathcal{O}(\Delta x)$ où $\Delta x > 0$ désigne le pas d'espace (du moins lorsque $B(x)$ est régulière).

On propose ici d'évaluer deux méthodes de volumes finis : la première repose sur une stratégie de décomposition en opérateurs, stratégie vouée à l'échec ; la seconde est construite sur une technique simple de schémas dits équilibres décrite dans le monographe de François Bouchut, intitulé *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser (2004). La méthode ainsi obtenue est qualifiée de schéma par reconstruction hydrostatique (voir Chapitre 4, paragraphe 4.11, de l'ouvrage cité).

Les deux méthodes proposées seront évaluées en particulier sur les problèmes proposés dans l'article de Shi Jin, *A steady-state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 35 no. 4 (2001), p. 631-645.