MASTER DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES
ANALYSE NUMERIQUE ET E.D.P.
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire, F. Coquel

Sujet 12 : Couplage de deux systèmes de la dynamique des gaz à une interface infiniment mince

On propose d'examiner numériquement la question du couplage de deux systèmes de la dynamique des gaz en coordonnées lagrangiennes, à une interface infiniment mince localisée en $x = 0$. De part et d'autre de cette interface, les équations de la dynamique des gaz sont fermées par la donnée d'une loi de pression différente, respectivement notée $p_-(\tau, \varepsilon)$ dans le quart plan $\mathcal{D}_- = \{(t, x) \in R^+ \times R,\ t > 0,\ x < 0\}$, et $p_+(\tau, \varepsilon)$ dans le quart plan $\mathcal{D}_+ = \{(t, x) \in R^+ \times R,\ t > 0,\ x > 0\}$. Une donnée initiale étant prescrite à l'instant $t = 0$, les équations considérées prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \tau + \partial_x u = 0, \quad\quad t > 0,\ \pm x > 0, \\ \partial_t u + \partial_x p_\pm(\tau, \varepsilon) = 0, \\ \partial_t e + \partial_x (p_\pm(\tau, \varepsilon) u) = 0, \quad \varepsilon = e - u^2/2, \end{cases} \tag{1}$$

où pour fermer le problème, il convient d'ajouter une condition de transmission à l'interface $x = 0$ entre les équations de gauche et de droite.

Il est par exemple possible d'exiger la conservation des inconnues (τ, u, e) en demandant à chaque instant de réaliser la propriété de continuité suivante :

$$u(0^-, t) = u(0^+, t), \quad p_-(0^-, t) = p_+(0^+, t), \quad t > 0, \tag{2}$$

mais bien d'autres conditions de transmission, dès lors non conservatives, sont possibles.

L'objectif est d'étudier numériquement la sensibilité des solutions du problème couplé au choix de la condition de transmission. On utilisera le formalisme de couplage ainsi que la stratégie d'approximation numérique, décrits dans la publication *Coupling of general lagrangian systems*, par Ambroso *et al.* (Mathematics of Computation, volume 57, No 262, april 2008, pp 909–941). Pour simplifier, on considérera les lois de pression valables pour des gaz polytropiques :

$$p_\pm(\tau, \varepsilon) = (\gamma_\pm - 1)\varepsilon/\tau, \quad \gamma_\pm > 1, \tag{3}$$

et on pourra étudier l'influence de l'écart $|\gamma_+ - \gamma_-|$ sur les solutions couplées en ayant fait choix, par exemple, du schéma de Lax-Friedrichs.