MASTER DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES
ANALYSE NUMERIQUE ET E.D.P.
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire, F. Coquel

Sujet 5 : Des équations d'Euler avec friction aux équations de Darcy par un schéma préservant l'asymptotique

On s'intéresse à l'étude numérique du comportement en temps grands des solutions des équations d'Euler formulées en présence de forces de friction et de gravitation :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \quad t > 0,\ x \in R, \\ \partial_t \rho u + \partial_x(\rho u^2 + p) = \rho g - \alpha \rho u, \\ \partial_t \rho E + \partial_x(\rho E + p)u = \rho g u - \alpha \rho u^2 \end{cases} \tag{1}$$

où pour simplifier, p désigne la loi de pression d'un gaz polytropique :

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \rho u^2/2), \quad \gamma > 1. \tag{2}$$

Ici, g désigne la constante de gravité et α est un paramètre positif modulant l'amplitude des effets de friction. Dans le régime d'un grand paramètre $\alpha >> 1$, les solutions de (1) vérifient asymptotiquement en temps un système simplifié d'équations paraboliques :

$$\begin{cases} \partial_s \rho + \partial_x \rho v = 0, \quad s = \frac{t}{\alpha} > 0,\ x \in R, \\ \partial_s \rho\varepsilon + \partial_x(\rho\varepsilon v) + p\partial v = 0, \\ v = g - \frac{1}{\rho}\partial_x p, \quad p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \end{cases} \tag{3}$$

appelées équations de Darcy. Il se trouve qu'un schéma de volumes finis naif pour les équations (1) conduit asymptotiquement à un schéma aux différences finies consistant avec (3) mais avec une erreur d'approximation en $\mathcal{O}(\alpha\Delta x)$ où $\Delta x > 0$ désigne le pas d'espace. L'erreur est évidemment d'autant plus mauvaise que α est grand, à Δx fixé. Il est toutefois possible de construire des schémas respectant l'asymptotique Darcy avec une erreur d'approximation en $\mathcal{O}(\Delta x)$, à savoir indépendante de α. De tels schémas sont dits préserver l'asymptotique.

On propose d'évaluer les performances d'un schéma préservant l'asymptotique en regard du comportement d'un schéma plus classique reposant sur une décomposition en opérateurs, à savoir un premier pas traitant de la partie hyperbolique homogène, suivi d'un second pas traitant exclusivement des termes sources. On pourra consulter pour les détails la prépublication :

http ://www.ann.jussieu.fr/publications/2009/R09039.html

intitulée *"Godunov-type systems with parameter dependent source. The case of Euler system with friction"*.