MASTER DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES
ANALYSE NUMERIQUE ET E.D.P.
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire, F. Coquel

Sujet 7 : Solutions choc non classiques pour un flux non convexe

On propose d'approcher numériquement les solutions discontinues de la loi de conservation scalaire :

$$\partial_t u + \partial_x u^3 = 0, \quad t > 0,\ x \in I\!R,$$

définies comme limites lorsque ϵ tend vers zéro des solutions de la loi avec régularisation diffusive-dispersive

$$\partial_t u^\epsilon + \partial_x (u^\epsilon)^3 = \mu\epsilon\partial^2_{xx} u^\epsilon + \epsilon^2 \partial^3_{xxx} u^\epsilon,$$

avec $\mu > 0$. Ce type de régularisation conduit à l'apparition de solutions choc dites non classiques, se distinguant des solutions choc de Kruzkov. La définition précise de ces solutions choc dépend étroitement de la compétition visco-dispersive sous-jacente, traduite ici par la valeur du paramètre μ.

Il est demandé dans un premier temps de programmer la résolution du problème de Riemann dans le cas non classique, la solution est explicitement donnée dans l'article de B. Hayes et P.G. LeFloch, *Non classical shock solutions and Kinetic relations : scalar conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal., vol 139, 1-56 (1997). La solution y est décrite Proposition 3.1, p 12, (il n'est pas nécessaire de lire la suite de l'article, plus technique).

Dans un second temps, on programmera la méthode de Godunov construite sur cette solution non classique ainsi que la méthode de Glimm dont une description algorithmique est donnée dans le livre de E.F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer Verlag, second edition, (1999). Il sera utile de programmer également la solution du problème de Riemann classique (*i.e.* résultant d'une analyse à la Kruzkov), pour interpreter les résultats numériques obtenus avec la méthode de Godunov.