**MASTER M2 MATHEMATIQUES DE LA MODELISATION**
**UPMC - ECOLE POLYTECHNIQUE**
**Cours de G. Allaire**
**Devoir facultatif du 7 décembre 2017**

# 1 Exercice

Résoudre le problème de Riemann pour l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u^3}{\partial x} = 0, \\ u(t=0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

avec

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } 0 < x, \end{cases}$$

dans les cas suivants.

1. $u_L = 1$ et $u_R = 0$.
2. $u_L = -1$ et $u_R = 0$.
3. $u_L = -1$ et $u_R = 1$.

# 2 Exercice

On considère l'équation d'advection suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{pour } t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une vitesse constante et $u(t,x)$ est une fonction scalaire. On note $u_j^n$ l'approximation numérique de $u(t_n, x_j)$ avec $t_n = n\Delta t$ et $x_j = j\Delta x$. On considère le schéma numérique de type prédicteur-correcteur suivant

$$\begin{cases} u_j^* = u_j^n - a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n) \\ u_j^{n+1} = \dfrac{u_j^n + u_j^*}{2} - a\dfrac{\Delta t}{2\Delta x}(u_j^* - u_{j-1}^*) \end{cases} \tag{3}$$

où $u_j^*$ est appelé prédiction au temps $t_{n+1}$.

1. Montrer que ce schéma est consistant.
2. Réécrire ce schéma en éliminant la prédiction $u_j^*$. Quel schéma retrouve-t-on ?
3. En déduire qu'il peut se mettre sous forme conservative et donner la fonction de flux numérique.

## 3 Exercice

On considère un mélange homogène et isentrope de deux fluides (ou phases) compressibles. On note $\rho$ la densité du mélange, $u$ la vitesse du mélange, $C$ la concentration massique du premier fluide (on a toujours $0 \leq C \leq 1$), et $p \equiv p(\rho, C)$ la pression du mélange qu'on supposera vérifier les conditions

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = a^2 > 0, \quad 2\frac{\partial p}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} > 0, \tag{4}$$

où $a > 0$ désigne la vitesse du son du mélange. En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements diphasiques par le système hyperbolique suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial (\rho C)}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho u C)}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

1. Etudier l'hyperbolicité de (5).
2. Montrer que la fonction

$$E(\rho, u, C) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} r^{-2} p(r, C)\, dr$$

   est une entropie du système (5). On donnera l'expression du flux d'entropie mais on ne vérifiera pas que $E$ est convexe.