MASTER M2 MATHEMATIQUES DE LA MODÉLISATION
SORBONNE UNIVERSITE - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire "systèmes hyperboliques de lois de conservation"
Examen écrit du 9 Janvier 2020 (3 heures)

Important: La notation des copies prendra en compte la clarté et la qualité de la rédaction. Le barême est donné à titre indicatif.

1 Problème de Riemann (4 points)

On considère l'équation hyperbolique suivante, avec $f(u) = \frac{2}{3}|u|^{3/2}$, en une dimension d'espace, dont la solution est $u(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \\ u(0,x) = \left\{ \begin{array}{ll} u_L & \text{si } x < 0 \\ u_R & \text{si } x > 0 \end{array} \right. . \end{array} \right. \tag{1}$$

1. A quelle condition sur $u_L$et u_R, est-ce que la solution de (1) est un choc entropique ? Dans ce cas, donner la vitesse du choc.
2. A quelle condition sur $u_L$et u_R, est-ce que la solution de (1) est une onde de raréfaction continue ?
3. On suppose que $u_L = 1$ et $u_R = 2$. Calculer explicitement la solution de (1).

2 Système hyperbolique (16 points)

On considère le système de lois de conservation en une dimension d'espace, dit de Saint-Venant ou des eaux peu profondes, défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \partial_x m = 0, \\ \partial_t m + \partial_x \left(\frac{m^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 \right) = 0, \end{array} \right. \tag{2}$$

où $h(t,x) > 0$ est la hauteur d'eau et $m(t,x) \in \mathbb{R}$ est la quantité de mouvement. Dans (2), $g > 0$ est la constante de gravitation. On note $\mathbf{u} = (h,m)$ l'inconnue et $f(\mathbf{u}) = (m, \frac{m^2}{h} + \frac{g}{2}h^2)$ le flux de (2).

2.1 Etude théorique du système (2)

1. Montrer que (2) est strictement hyperbolique pour $h > 0$. On donnera l'expression des valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2$ et des vecteurs propres associés (r_1, r_2).
2. Montrer que les 1- et 2-champs sont VNL (vraiment non-linéaires).

2.2 Système relaxé et problème de Riemann

Pour résoudre de manière approchée le problème de Riemann pour (2), on introduit un système relaxé

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \partial_x \omega = 0, \\ \partial_t m + \partial_x \left(\frac{\omega^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 \right) = 0, \\ \partial_t \omega + \partial_x \Big((gh_0 - u_0^2)h + 2u_0\omega \Big) = \frac{m-\omega}{\epsilon}, \end{array} \right. \tag{3}$$

avec une inconnue supplémentaire $\omega(t,x) \in \mathbb{R}$, des constantes $u_0 \in \mathbb{R}$, $h_0 \in \mathbb{R}^+$ et un petit paramètre $\epsilon > 0$. On suppose que $gh_0 > u_0^2$. On note $\tilde{\mathbf{u}} = (h, m, \omega)$ l'inconnue et $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{u}}) = (\omega, \frac{\omega^2}{h} + \frac{g}{2}h^2, (gh_0 - u_0^2)h + 2u_0\omega)$ le flux de (3).

1. Vérifier formellement que, lorsque ϵ tend vers 0, on retrouve bien (2) à partir de (3). Désormais on étudie (3) sans son terme source (à droite du signe égalité).

2. Montrer que le système (3) est strictement hyperbolique. Donner ses valeurs et vecteurs propres qu'on ordonnera $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

3. Montrer que les 3 champs sont LD (linéairement dégénérés).

4. Donner deux invariants de Riemann pour le 2-champ.

5. On veut résoudre le problème de Riemann pour le système (3) avec un état gauche $\tilde{\mathbf{u}}_L = (h_L, \omega_L, m_L)$ et un état droit $\tilde{\mathbf{u}}_R = (h_R, \omega_R, m_R)$. Dans le plan (h, ω) tracer la courbe d'onde pour le 1-champ passant par l'état gauche et la courbe d'onde pour le 3-champ passant par l'état droit. Pour cela, pour chacun de ces champs on utilisera un invariant de Riemann qui soit indépendant de m.

6. Montrer que les deux courbes d'onde précédentes se coupent en un unique point (h^*, ω^*) que l'on précisera. A l'aide d'un autre invariant de Riemann pour le 1-champ et pour le 3-champ, en déduire la solution $\tilde{\mathbf{w}}(x/t; \tilde{\mathbf{u}}_L, \tilde{\mathbf{u}}_R)$ du problème de Riemann pour le système (3).

2.3 Schéma numérique

On construit un schéma numérique de type Godunov pour le système (2)

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(g(\mathbf{u}_{j-1}^n, \mathbf{u}_j^n) - g(\mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_{j+1}^n)\Big),$$

avec un flux numérique $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que l'on construit comme suit. Etant donné un état gauche $\mathbf{u}_L = (h_L, m_L)$ et un état droit $\mathbf{u}_R = (h_R, m_R)$ pour (2), on définit un état gauche $\tilde{\mathbf{u}}_L = (h_L, m_L, m_L)$ et un état droit $\tilde{\mathbf{u}}_R = (h_R, m_R, m_R)$ pour (3) (on a appliqué la relaxation $\omega = m$). Si $\tilde{\mathbf{w}}(x/t; \tilde{\mathbf{u}}_L, \tilde{\mathbf{u}}_R)$ est la solution du problème de Riemann pour le système (3), on note $\mathbf{w}(x/t; \tilde{\mathbf{u}}_L, \tilde{\mathbf{u}}_R)$ ses deux premières composantes et on définit le flux numérique pour (2) par

$$g(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = f\Big(\mathbf{w}(0; \tilde{\mathbf{u}}_L, \tilde{\mathbf{u}}_R)\Big). \tag{4}$$

1. Donner une formule explicite pour le flux numérique (4) et vérifier qu'il est bien défini malgré la présence d'une discontinuité stationnaire dans la solution $\tilde{\mathbf{w}}$ du problème de Riemann.

2. On choisit $u_0 = \frac{\sqrt{h_L}u_L + \sqrt{h_R}u_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}}$ avec $u = m/h$. Montrer que la solution du problème de Riemann pour (3) vérifie le principe du maximum pour h, c'est-à-dire que $h^* > 0$ (cf. la question 6 ci-dessus), si on choisit h_0 tel que

   $$h_0 > \frac{h_R h_L (u_R - u_L)^2}{g(h_R + h_L)^2}.$$

   En déduire que le schéma numérique basé sur le flux (4), avec ces paramètres h_0, u_0, vérifie aussi ce principe du maximum, c'est-à-dire que $h_j^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$.