Diffraction d'une onde acoustique par un milieu hétérogène

Armin Lechleiter, alechle@cmap.polytechnique.fr

L'équation des ondes $\partial_t^2 U(x,t) - c^2(x)\Delta U(x,t) = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ décrit la propagation d'une onde acoustique pour une vitesse du son $c(x)$ variable. On suppose ici que $c(x) = c_0$ (la vitesse du son dans le vide) pour $|x|$ grand. La région où $c(x) \neq c_0$ modélise une hétérogenéité bornée avec des propriétés acoustiques différentes de celles du vide. Souvent dans les applications (par exemple : détérmination de moyens anti-bruit, isolation phonique) on s'intéresse au comportement des ondes harmoniques à une fréquence $\omega > 0$ fixée. On suppose donc que $U(x,t) = \exp(-i\omega t)u(x)$ et on en déduit que u résoud l'équation de Helmholtz $\Delta u + k^2 n^2 u = 0$ avec le nombre d'onde $k = \omega/c_0$ et l'indice de réfraction $n(x) = c_0/c(x)$.

Quand une onde plane $u^i(x) = \exp(ikx \cdot d)$ avec direction $d \in \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, |x| = 1\}$ se propage par l'hétérogenéité, elle génère une onde diffractée u^s qui peut être décrite par une équation integrale volumique, l'équation de Lippmann-Schwinger. Si on définit $q = n^2 - 1$, alors

$$u^s(x) = k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}(u^i(y) + u^s(y))q(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

L'opérateur intégral dans cette équation est l'opérateur de convolution avec $G(x) = \exp(ik|x|)/(4\pi|x|)$. En 2000, Vainikko [1] a proposé une méthode rapide pour résoudre (1) numériquement, en exploitant le fait que la transformée de Fourier d'une convolution $G * f$ est la multiplication des transformées $\hat{G}$ and $\hat{f}$. Après une périodisation qu'on ne détaille pas ici, on peut calculer les coefficients de Fourier de G explicitement. La transformée de Fourier rapide (FFT) permet alors d'implémenter efficacement l'application de l'opérateur intégral dans (1) à un polynôme de Fourier. Dans le but de résoudre le système linéaire qui correspond à (1) des méthodes iteratives (GMRES, gradients conjugés, ...) seront utilisées.

Le but du projet est d'implémenter cette méthode et de construire des préconditionneurs de type deux grilles où multi-grilles.

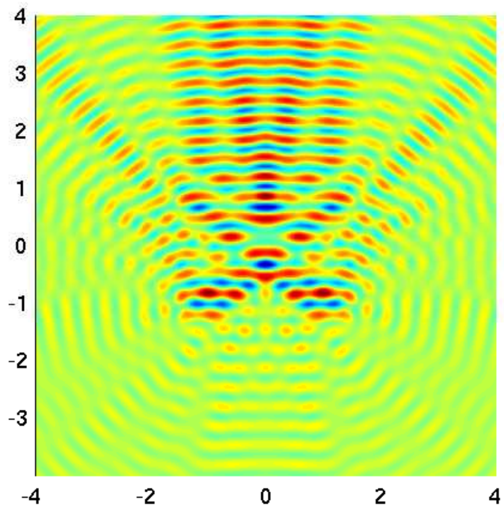

FIG. 1 – L'onde diffracté u^s générée par une onde plane u^i qui se propage par une hétérogenéité.

Références

[1] G. VAINIKKO, *Fast solvers of the Lippmann-Schwinger equation*, in Direct and Inverse Problems of Mathematical Physics, D. Newark, ed., Int. Soc. Anal. Appl. Comput. 5, Dordrecht, 2000, Kluwer, p. 423.