Concentration par diffusion.

Benoît Merlet, `merlet@cmap.polytechnique.fr`

On s'intéresse à l'évolution de la densité de particules inertielles transportées par un écoulement turbulent. Il peut s'agir de particules d'un polluant transportées par l'océan ou bien d'un nuage de gouttelettes d'eau transportées par l'atmosphère.
Nous considérons que les particules présentes en un point de l'espace sont plus ou moins diffusées selon l'intensité $\gamma(x,t)$ de la turbulence en ce point. Selon notre modèle très simple, l'évolution de la densité $\rho(x,t)$ de particules est donnée par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \Delta[\gamma^2 \rho] \ = \ 0.$$

Une telle équation ne vérifie pas le principe du maximum et de fortes inhomogénéités spatiales peuvent apparaître. Il arrive même que pour certains choix de γ, on ait

$$\sup_x \rho(x,t) \xrightarrow{t\uparrow T} \infty.$$

On dit alors que la densité explose dans L^∞ à l'instant T. Ces cas d'explosion sont importants, car l'apparition de fortes concentrations peut, selon le cas, catalyser des réactions chimiques ou bien provoquer la coalescence des gouttelettes d'eau.
Le projet propose de travailler dans le cadre de la dimension 1 d'espace, l'équation d'évolution est alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\gamma^2 \rho] \ = \ 0. \tag{1}$$

Plan de travail :

1. Constructions de solutions auto-similaires

Pour mieux comprendre les explosions, on essaiera de construire numériquement des solutions explosives auto-similaires : de la forme

$$\gamma(x,t) = a\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right), \qquad \rho(x,t) = \frac{1}{(T-t)^\alpha} u\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right), \qquad \text{avec } u(y) \xrightarrow{|y|\uparrow\infty} 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon \leq a \leq 1. \tag{2}$$

L'équation (1), se réduit alors à une edo avec des conditions aux limites à l'infini.
Pour mesurer la puissance du phénomène de concentration, on s'interessera à l'évolution de l'énergie L^p de la solution au cours du temps pour $p \geq 1$, soit

$$E_p(t) \ := \ \int_{\mathbf{R}} \rho^p(x,t)\, dx.$$

Pour nos solutions auto-similaires, il existera un exposant critique p_c dépendant de la solution tel que

$$E_p(t) \xrightarrow{t\uparrow T} \infty \text{ dès que } p > p_c.$$

Le phénomène de concentration est d'autant plus fort que l'exposant critique est petit. (On a toujours $p_c \geq 1$).
Dans un premier temps, on cherchera à construire des solutions ayant un exposant critique le plus proche possible de 1, le paramètre ε étant fixé. D'un point de vue pratique, on cherchera des solutions auto-similaires par la méthode du tir couplée à une méthode de Newton.

2. Optimisation de l'exposant critique.

Dans un second temps, on cherchera à trouver le meilleur exposant critique possible en fonction de ε, i.e.

$$p_c(\varepsilon) \ := \ \inf\left\{ p \ : \ \rho \text{ et } \gamma \text{ satisfont (1) et (2) et } E_p(t) \xrightarrow{t\uparrow T} \infty \right\}.$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation de la fonction a qui est assez délicat.

3. Suite éventuelle.

Le projet peut se poursuivre par l'étude d'explosion non pas au seul point $x = 0$ mais sur un ensemble de Cantor. Le problème devient beaucoup plus coûteux (et difficile) numériquement car on ne peut plus se restreindre à des solutions auto-similaires.