Devoir Maison 2010 - MAP 431
Corrigé proposé par J.-M. Mirebeau et F. Alouges

8 avril 2010

1 Exercice

1. Posons
$$U_i^n := u(n\Delta t, i\Delta x)$$
et calculons l'erreur de troncature :
$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{aU_{i+1}^n + bU_i^n + cU_{i-1}^n}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(a+b+c)u}{\Delta x} + (a-c)\frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta_x + \Delta_t), \tag{1.1}$$
où les fonctions u, $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont évaluées au point $(n\Delta t, i\Delta x)$.
Lorsque Δx tend vers 0, cette quantité diverge nécessairement si $a+b+c \neq 0$ (et $u \neq 0$). Pour que ce schéma soit consistant avec une équation aux dérivées partielles, il faut donc $a+b+c=0$.
2. Pour que l'erreur de troncature (1.1) tende vers 0, il faut que u satisfasse l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial u}{\partial t} + (a-c)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$
La solution exacte de cette équation est
$$u(t,x) := u_0(x-(a-c)t).$$
3. Nous pouvons réécrire le schéma sous la forme
$$u_i^{n+1} = u_i^n(1-b\nu) - u_{i+1}^n a\nu - u_{i-1}^n c\nu.$$
Si les inégalités
$$\begin{cases} b\nu \leq 1 \\ a \leq 0 \\ c \leq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$
sont vérifiées, alors le schéma vérifie le principe du maximum discret car u_i^{n+1} est une combinaison convexe de u_{i-1}^n, u_i^n et u_{i+1}^n.
Réciproquement, considérons l'initialisation par $u_0^0 := -1$ et $u_i^0 = 0$ si $i \neq 0$. Alors $u_{-1}^1 = a\nu$, $u_0^1 = b\nu - 1$ et $u_1^1 = c\nu$. Si le principe du maximum est vérifié, alors ces trois nombres doivent être negatifs. Nous retrouvons donc les inégalités (1.2) .
Conclusion : Le schéma vérifie le principe du maximum discret si et seulement si les inégalités (1.2) sont vérifiées.
Si le schéma vérifie le principe du maximum discret, il est nécessairement L^∞ stable, mais l'inverse n'est pas vrai (voir poly).
4. Pour une suite $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in l^2$, on note
$$u(x) = u_j \text{ si } (j-\frac{1}{2})\Delta x < x < (j+\frac{1}{2})\Delta x,$$

et $\hat{u}$ la transformée de Fourier de u. Le schéma numérique donne une relation de récurrence linéaire entre $\hat{u}^{n+1}(k)$ et $\hat{u}^n(k)$. Plus précisément, on a

$$\hat{u}^{n+1}(k) = ((1-b\nu) - a\nu \exp(-2i\pi k\Delta x) - c\nu \exp(2i\pi k\Delta x))\, \hat{u}^n(k).$$

Le facteur d'amplification est ainsi

$$C(k) = (1-b\nu) - (a+c)\nu \cos(2\pi k\Delta x) + i(a-c)\nu \sin(2\pi k\Delta x).$$

Le schéma est L^2-stable si et seulement si $|C(k)| \leq 1$ pour tout k, c'est-à-dire (en posant $\xi = 2\pi k\Delta x$)

$$\sup_{\xi\in[0,2\pi]} ((1-b\nu) - (a+c)\nu\cos\xi)^2 + (a-c)^2\nu^2\sin^2\xi \leq 1.$$

L'expression qui dépend de ξ est un polynôme P du second degré en $\cos\xi$

$$P(X) = (1-b\nu)^2 + (a-c)^2\nu^2 - 2(1-b\nu)(a+c)\nu X + 4ac\nu^2 X^2\,.$$

On a naturellement $P(1) = 1$ et $P(x) \geq 0$ pour $x \in [-1,1]$ (c'est le carré d'un module de nombre complexe, on en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante pour avoir la stabilité L^2 est
- $P'(1) \geq 0$ si le coefficient de plus haut degré de P est négatif, c'est-à-dire dans le cas $ac \leq 0$;
- $P(-1) \leq 1$ dans le cas $ac > 0$.

Ceci donne les deux conditions suivantes nécessaires et suffisantes de stabilité(tenant compte du fait que $a + c = -b$ et $\nu > 0$) :

$$2b(1-b\nu) + 8ac\nu \geq 0 \text{ si } ac \leq 0; \tag{1.3}$$
$$b(b\nu - 1) \leq 0 \text{ sinon.} \tag{1.4}$$

5. D'après le théorème de Lax, un schéma consistant et stable pour une norme est convergent pour cette norme. On a alors avec $a + b + c = 0$
   a) Si les inégalités (1.2) sont vérifiées, le schéma est convergent dans L^∞.
   b) Si (1.3) est vérifiée dans le cas $ac \leq 0$ ou (1.4) dans le cas $ac > 0$ alors le schéma est convergent dans L^2.
6. Il s'agit de trouver un triplet (a, b, c) vérifiant $a + b + c = 0$, une des inégalités (1.3) ou (1.4) mais pas (1.2). Un exemple possible est $a = 1, b = 1, c = -2$. Dans ce cas, on a (1.3) sous la condition

$$\nu \leq \frac{1}{9}\,.$$

2 Problème

1. La quantité $(\phi,\psi)_{BL^1}$ est bien définie pour tous $\phi,\psi \in BL^1$. C'est une forme bilinéaire symétrique, et l'on a clairement $(\phi,\phi)_{BL^1} = 0 \Rightarrow \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0 \Rightarrow \phi = 0$.
   Pour tout $R > 0$ nous notons $B(R)$ la boule de rayon R centrée en 0. Nous définissons aussi la quantité $|\phi|_R$ par

$$|\phi|_R^2 := \int_{B(R)} \frac{\phi(x)^2}{1+|x|^2}dx + \int_{B(R)} |\nabla\phi(x)|^2 dx$$

   C'est clairement une norme sur $H^1(B(R))$, équivalente à la norme usuelle sur cet espace. De plus si $\phi \in BL^1$ alors $|\phi|_R \leq \|\phi\|_{BL^1}$.

   Montrons que BL^1 est complet.
   Soit $(\phi_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de BL^1. Alors la suite $(\phi_{n|B(R)})_{n\geq 0}$ de $H^1(R)$ est de Cauchy pour la norme $|\cdot|_R$, donc converge dans $H^1(B(R))$. Nous notons $\phi^R \in H^1(R)$ sa limite.
   Il est clair que ϕ^R et $\phi^{R'}$ coïncident sur $B(\min\{R,R'\})$. Nous pouvons donc définir la fonction ϕ^* qui coincide avec ϕ^R sur $B(R)$ pour tout $R > 0$.

Par hypothèse, il existe une suite $\varepsilon(n)$ tendant vers 0 telle que

$$\forall m, n \geq 0,\ \|\phi_n - \phi_m\|_{BL^1} \leq \varepsilon(\min(m,n)).$$

En particulier,

$$|\phi_n - \phi^*|_R = |\phi_n - \phi^R|_R = \lim_{m\to\infty} |\phi_n - \phi_m|_R \leq \sup_{m\geq n} \|\phi_n - \phi_m\|_{BL^1} \leq \varepsilon(n)$$

Nous en déduisons

$$\lim_{R\to\infty} |\phi_n - \phi^*|_R \leq \varepsilon(n).$$

ce qui montre que $\phi^* \in BL^1$ et que $\|\phi_n - \phi^*\|_{BL^1} \leq \varepsilon(n)$.
Donc ϕ_n converge vers ϕ^* dans BL^1. Ainsi toute suite de Cauchy de BL^1 converge et BL^1 est complet.

Montrons que C_c^∞ est dense dans BL^1.
Soit $\chi \in C^1(R^3)$ une fonction vérifiant $\chi = 1$ sur $B(1)$, $\chi = 0$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(2)$ et $0 \leq \chi \leq 1$ partout ailleurs. Posons pour tout $R > 0$, $\chi_R(x) := \chi(x/R)$ et notons que $|\nabla\chi_R(x)| \leq C_0/R$ où $C_0 = \|\nabla\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$.
Soit $\phi \in BL^1$. Remarquons que si $R \geq 1$ et $|x| \leq 2R$, alors :

$$\frac{5}{1+|x|^2} \geq \frac{1}{R^2}.$$

On en déduit que si $R \geq 1$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\phi\nabla\chi_R|^2 \leq C_0^2 \int_{B(2R)\setminus B(R)} \frac{\phi^2}{R^2} \leq 5C_0^2 \int_{\mathbb{R}^3\setminus B(R)} \frac{\phi^2(x)}{1+|x|^2} dx.$$

Nous calculons

$$\|\phi - \phi\chi_R\|_{BL^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\phi(x)(1-\chi_R(x))|^2}{1+|x|^2} dx + \int_{\mathbb{R}^3} |(1-\chi_R)\nabla\phi - \phi\nabla\chi_R|^2.$$

On peut majorer le terme de droite en utilisant $|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$, ce qui donne quand $R \geq 1$,

$$\|\phi - \phi\chi_R\|_{BL^1}^2 \leq (1+10C_0^2) \int_{\mathbb{R}^3\setminus B(R)} \frac{|\phi|^2}{1+|x|^2} dx + 2\int_{\mathbb{R}^3\setminus B(R)} |\nabla\phi|^2,$$

qui tend vers 0 quand $R \to \infty$. Ainsi $\phi\chi_R \to \phi$ dans BL^1 quand $R \to \infty$. Comme $\phi\chi_R \in H_0^1(B(R))$ et comme $C_c^\infty(B(R))$ est dense dans $H_0^1(B(R))$, nous obtenons que C_c^∞ est dense dans BL^1.

2. Par définition $H^1(\mathbb{R}^3) \subset BL^1$. Par ailleurs posons

$$\phi(x) := \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Nous savons que la fonction $1/|x|^\alpha$ est intégrable sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(1)$ si et seulement si $\alpha > 3$, donc $1/|x|^\alpha \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(1))$ si et seulement si $\alpha > 3/2$. Nous en déduisons que

$$\phi \notin L^2(\mathbb{R}^3) \ \text{ et } \ \frac{\phi}{\sqrt{1+|x|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

Par ailleurs

$$\nabla\phi(x) = \frac{-3}{2} \frac{x}{(1+|x|^2)^{\frac{7}{4}}} \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

donc $|\nabla\phi| \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Finalement $\phi \in BL^1 \setminus H^1(\mathbb{R}^3)$.

3. Par intégration par parties, nous obtenons

$$\int_0^\infty \phi(r)^2 dr = \underbrace{[r\phi(r)^2]_0^\infty}_{=0} - 2\int_0^\infty r\phi(r)\phi'(r)dr \leq 2\left|\int_0^\infty r\phi(r)\phi'(r)dr\right|.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient par ailleurs :

$$\left|\int_0^\infty \phi(r)r\phi'(r)dr\right| \leq \left(\int_0^\infty \phi(r)^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty r^2\phi'(r)^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En combinant ces deux inégalités nous obtenons le résultat demandé :

$$\int_0^\infty \phi(r)^2 dr \leq 4\int_0^\infty r^2\phi'(r)^2 dr.$$

4. Notons $e_{\theta,\varphi}$ le vecteur unitaire radial en coordonnées polaires

$$e_{\theta,\varphi} := (\cos\theta\cos\phi,\ \cos\theta\sin\phi,\ \sin\theta).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1+|x|^2}dx &= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^\infty \frac{\phi(re_{\theta,\varphi})^2 r^2}{1+r^2} dr\sin(\theta)d\varphi d\theta \\
&\leq \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^\infty \phi(re_{\theta,\varphi})^2 dr\sin(\theta)d\varphi d\theta \\
&\leq 4\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^\infty \langle e_{\theta,\varphi}, \nabla\phi(re_{\theta,\varphi})\rangle^2 r^2 dr\sin(\theta)d\varphi d\theta \\
&\leq 4\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^\infty |\nabla\phi(re_{\theta,\varphi})|^2 r^2 dr\sin(\theta)d\varphi d\theta \\
&= 4\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

5. Les membres de droite et de gauche de l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1+|x|^2}dx \leq 4\int_{R^3} |\nabla\phi(x)|^2 dx$$

sont des fonctions continues sur BL^1. Comme cette inégalité est vraie sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ et que $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ est dense dans BL^1, cette inégalité est vraie pour toute fonction $\phi \in BL^1$.
On en déduit que

$$\|\phi\|_{BL^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1+|x|^2}dx + \int_{R^3} |\nabla\phi(x)|^2 dx \leq 5\int_{R^3} |\nabla\phi(x)|^2 = 5\|\phi\|_{\dot{H}^1}^2.$$

Ainsi sur BL^1,

$$\|\cdot\|_{\dot{H}^1} \leq \|\cdot\|_{BL^1} \leq \sqrt{5}\|\cdot\|_{\dot{H}^1}.$$

6. Comme $m \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, la quantité

$$L(\psi) := \int_\Omega \langle m, \nabla\psi\rangle$$

est bien définie et est une forme linéaire sur BL^1. L'inégalité de Cauchy Schwartz montre que cette forme linéaire est continue sur BL^1

$$|L(\psi)| \leq \left(\int_\Omega |m|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla\psi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|m\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{\dot{H}^1}.$$

On est donc dans les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram :

(a) BL^1 est un espace de Hilbert.

(b) L est une forme linéaire continue sur BL^1.

(c) $(\varphi,\psi)\mapsto\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\varphi\cdot\nabla\psi$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur BL^1.

7. Soit U un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_U$, et soit V un sous espace vectoriel fermé de U. La projection orthogonale d'un élément $u\in U$ sur V existe et est l'unique élément $P(u)\in V$ tel que
$$\forall v\in V,\ \ \langle u-P(u),v\rangle_U=0. \tag{2.5}$$
Dans notre cas $U=L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ et $V=\nabla BL^1$ qui est bien un sous espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$. Vérifions que ∇BL^1 est fermé dans $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, $u_n=\nabla\phi_n$, une suite à valeurs dans ∇BL^1 convergente dans $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$. Alors u_n est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)}$. Comme
$$\|u_n-u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)}=\|\phi_n-\phi_m\|_{\dot{H}^1}$$
on en déduit que ϕ_n est une suite de Cauchy de BL^1 qui est complet. Soit ϕ_* la limite de ϕ_n dans BL^1, et soit $u_*=\nabla\phi_*$. Alors $u_*\in\nabla BL^1$ et $\|u_n-u_*\|_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)}=\|\phi_n-\phi_*\|_{\dot{H}^1}\to 0$ quand $n\to\infty$. Ceci montre que ∇BL^1 est bien fermé dans $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$.
Or $H(m)=\nabla\phi\in\nabla BL^1$ vérifie
$$\forall\psi\in BL^1,\quad\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla\phi+\bar{m})\cdot\nabla\psi=0,$$
ce qui équivaut à (2.5) .
On déduit immédiatement de (2.5) que pour tous $u_1,u_2\in U$ et $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $P(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2)=\lambda_1P(u_1)+\lambda_2P(u_2)$. La projection orthogonale est donc linéaire. De plus il découle de (2.5) que $\langle u-P(u),P(u)\rangle_U=0$, donc d'après Pythagore
$$\|u\|_U^2=\|P(u)\|_U^2+\|u-P(U)\|_U^2\geq\|P(u)\|_U^2.$$
En appliquant ceci à $u=-m$ et $P(u)=H(m)$ nous obtenons l'inégalité demandée
$$\|H(m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq\|m\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

8. **Continuité de ϕ.**
Soit $R>0$ tel que $\overline{\Omega}\subset B(R)$. La restriction $\phi_{|B(R)}$ de ϕ à $B(R)$ est un élément de $H^1(B(R))$, donc elle possède une trace sur la surface $\partial\Omega$, notée $\gamma\in L^2(\partial\Omega)$. Les restrictions $\phi_\Omega\in H^1(\Omega)$ et $\phi_{B(R)\setminus\Omega}\in H^1(B(R)\setminus\Omega)$ ont la même trace sur $\partial\Omega$ que la fonction globale $\phi_{|B(R)}$, à savoir $\gamma\in L^2(\partial\Omega)$.
Selon les hypothèses de la question $\phi_{|\Omega}\in C^1(\overline{\Omega})$, et $\phi_{|\mathbb{R}^3\setminus\Omega}\in C^1(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$. Leur trace sur $\partial\Omega$ est donc simplement leur restriction à $\partial\Omega$. Finalement
$$[\phi]=0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Autres équations.
Soit $\psi\in C_c^1(\mathbb{R}^3)$ une fonction C^1 ayant un support compact. Nous savons que ϕ est C^2 dans les ouverts Ω et $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$, et donc que l'on y a l'égalité
$$\langle\nabla\psi,\nabla\phi\rangle=\operatorname{div}(\psi\nabla\phi)-\psi\triangle\phi.$$
Le gradient $\nabla\phi$ est continu sur Ω et s'étend par continuité sur son adhérence $\partial\Omega$. Nous notons $\nabla^-\phi$ cette extension. De même $\nabla\phi$ est continu sur $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$ et s'étend par continuité sur $\partial\Omega$. Nous notons $\nabla^+\phi$ cette extension. En tout point de $\partial\Omega$ nous notons $\mathbf{n}$ la normale extérieure à Ω.

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\langle\nabla\psi,\nabla\phi\rangle &= \int_\Omega\langle\nabla\psi,\nabla\phi\rangle+\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}}\langle\nabla\psi,\nabla\phi\rangle\\ &= \int_\Omega(\operatorname{div}(\psi\nabla\phi)-\psi\triangle\phi)+\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}}(\operatorname{div}(\psi\nabla\phi)-\psi\triangle\phi)\\ &= \int_{\partial\Omega}\psi\langle\nabla^-\phi,\mathbf{n}\rangle-\int_\Omega\psi\triangle\psi+\int_{\partial\Omega}\psi\langle\nabla^+\phi,-\mathbf{n}\rangle-\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}}\psi\triangle\psi\\ &= -\left(\int_\Omega\psi\triangle\psi+\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}}\psi\triangle\psi+\int_{\partial\Omega}\psi\left[\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\right]\right).\end{aligned}$$

Par ailleurs nous avons dans $\overline{\Omega}$

$$\langle m,\nabla\psi\rangle=\operatorname{div}(m\psi)-\psi\operatorname{div}m.$$

Ainsi

$$\int_\Omega\langle m,\nabla\psi\rangle=\int_{\partial\Omega}\psi\langle m,\mathbf{n}\rangle-\int_\Omega\psi\operatorname{div}m.$$

L'équation

$$\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\psi\nabla\phi=\int_\Omega m\nabla\psi \tag{2.6}$$

devient donc

$$\int_\Omega\psi(\operatorname{div}m-\triangle\phi)-\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}}\triangle\phi=\int_{\partial\Omega}\psi\left(\langle m,\mathbf{n}\rangle+\left[\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\right]\right),$$

dont nous déduisons les équations

$$\left[\begin{array}{ll}\triangle\phi=\operatorname{div}m & \text{dans } \Omega,\\ \triangle\phi=0 & \text{dans } \mathbb{R}^3\setminus\Omega,\\ \left[\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\right]=-\langle m,\mathbf{n}\rangle & \text{à travers } \partial\Omega.\end{array}\right. \tag{2.7}$$

Réciproquement si $\phi\in BL^1$ est dans $C^2(\Omega)$, $C^2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$, $C^1(\overline{\Omega})$ et $C^1(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$, et si ϕ vérifie les équations (2.7), alors ϕ vérifie l'équation initiale (2.6).

9. Nous calculons en tout point de $(x,y,z)\in\Omega$ où $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\operatorname{div}m=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{xy-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Nous définissons $e_z:=(0,0,1)$ et nous notons en tout point $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(x,y)\neq(0,0)$.

$$e_r:=\frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

En tout point de $\overline{\Omega}$ privé de l'axe de coordonnées Oz, nous avons donc

$$\langle m,e_r\rangle=\langle m,e_z\rangle=0.$$

Comme les domaines Ω_ε sont invariants par rotation autour de l'axe Oz la normale à un point quelconque de $\partial\Omega_\varepsilon$ s'écrit sous la forme

$$\mathbf{n}=\alpha e_r+\beta e_z.$$

Il s'ensuit que pour tout $\varepsilon>0$, $\langle m,\mathbf{n}\rangle=0$ sur Ω_ε. La fonction $\phi_\varepsilon=0$ vérifie donc le problème de transmission de la question précédente, et donc $H(m_\varepsilon)=0$. Clairement

$$\lim_{\varepsilon\to0}m_\varepsilon=m \quad\text{dans}\quad L^2(\Omega).$$

Comme H est un opérateur continu sur $L^2(\Omega)$ nous avons donc

$$H(m) = \lim_{\varepsilon \to 0} H(m_\varepsilon) = 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

Interprétation. La fonction Ω représente une distribution de dipôles magnétiques, que l'on peut voir comme de petits aimants.

Plusieurs aimants identiques mis bout à bout le long d'un chemin forment un plus grand aimant, ayant un pôle à chaque extrémité du chemin. Si le chemin est fermé alors il n'y a pas d'extrémité, donc pas de pôle, ni de champ.

En particulier une distribution d'aimantation sur un cercle, partout tangente à ce cercle, ne produit pas de champ. C'est pourquoi la distribution d'aimantation m proposée n'en produit pas.