Ecole Polytechnique
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)
Exercice 3

L'exercice qui suit est issu d'une note de Hadamard publiée au Bulletin de la SMF en 1906.

Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Soit $f \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R})$ une application que l'on décompose en série de Fourier (dans la variable $\theta \in [0, 2\pi]$)

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(in\theta),$$

où $||f||_{L^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$. On pose pour $r \in [0,1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$

$$u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n r^n \exp(in\theta)\,.$$

1. Montrer que u vérifie

$$\left[\begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ sur } \Omega\,, \\ u = f \text{ sur } \partial\Omega\,. \end{array}\right.$$

2. Montrer que

$$\int_{|x|<r} |\nabla u|^2(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2 r^{2n}\,,$$

et que par conséquent si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2$ diverge, alors $u \notin H^1(\Omega)$.

3. (Difficile) Montrer que s'il existe $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0(u) = f$ (ici γ_0 est l'application trace) alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2$ converge. On décomposera $u(r,\cdot)$ en série de Fourier en θ pour tout $1 > r > 0$

$$u(r,\cdot) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(r) \exp(in\theta)\,,$$

et l'on montrera que

$$\begin{aligned} \int_{|x|<r_0} |\nabla u|^2\,dx &\geq \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \int_0^{r_0} \left(\rho|C_n'(\rho)|^2 + n^2\frac{|C_n(\rho)|^2}{\rho}\right) d\rho \\ &\geq \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n|C_n(r_0)|^2 \end{aligned}$$

et l'on concluera.