Ecole Polytechnique
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)
Exercice 4

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. On considère l'équation de Stokes

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega \\ \text{div } u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \end{cases} \tag{1}$$

dans laquelle Γ_D est une partie du bord de mesure non-nulle sur laquelle on pose une condition de Dirichlet.

On pose

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) \text{ tel que div } u = 0 \text{ et } u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\} ,$$

et on considère les deux formulations variationnelles suivantes:

$$\text{Trouver } u \in V,\ \forall v \in V,\ \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f \cdot v\,,$$

et

$$\text{Trouver } u \in V,\ \forall v \in V,\ 2\mu \int_\Omega e(u) \cdot \nabla v = \int_\Omega f \cdot v\,.$$

(Ici $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ est le tenseur de déformations.)

Montrer que les solutions obtenues par la théorie classiques sont toutes les deux solutions de (1) mais qu'elles vérifient juste une condition de Neumann différente sur $\partial\Omega \setminus \Gamma_D$. En particulier, si $\Gamma_D = \partial\Omega$, ces deux solutions coïncident.