Ecole Polytechnique
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)
Exercice 6

Soit Ω un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$. On discrétise par éléments finis P^1 le problème de Dirichlet

$$\left[\begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\,. \end{array}\right. \tag{1}$$

On suppose que $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction positive de sorte que la solution u de (1) est positive sur Ω (par application du principe du maximum).

1. Montrer que si les fonctions de base ϕ_i vérifient

$$\int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \, dx \leq 0 \text{ pour } i \neq j\,, \tag{2}$$

alors la solution discrète est aussi positive sur Ω (autrement dit, il y a un principe du maximum discret).

2. Montrer que si tous les angles du maillage sont inférieurs à $\pi/2$ alors (2) est satisfaite.

3. Montrer que (2) est satisfaite si et seulement si le maillage est de Delaunay, c'est-à-dire que pour tout triangle du maillage, le cercle circonscrit à ce triangle ne contient aucun autre sommet du maillage que les trois sommets du triangle sur lequel il a été construit.