MAP441, X2009
Sujet N$^\circ$ 1 proposé par François Alouges

Comment sonnent les cloches?

Le modèle musical que l'on connaît en occident est issu d'une suite de compromis. En particulier le tempérament égal utilisé actuellement a finalement été choisi après de multiples essais. Ainsi, depuis l'utilisation de la gamme pythagoricienne, l'échelle des notes est fondamentalement basée sur les harmoniques générées par un instrument *monodimensionnel* comme une corde ou un tuyau (d'orgue par exemple).

Le but de ce sujet est de comprendre comment les harmoniques des vibrations de corps sonores peuvent générer l'échelle des notes, en mettant l'accent sur les vibrations de corps bidimensionnels (tambours, cymbales, etc.) puis tridimensionnels comme les cloches. Une question que l'on souhaiterait résoudre dans ce travail est de savoir si, comme le prétendent les fondeurs de cloches et les carillonneurs, les cloches telles qu'elles sont conçues contiennent une tierce mineure (et non majeure) dans leurs harmoniques.

Mathématiquement, il faudra voir comment les vibrations des corps sonores sont modélisées par une équation de type équation des ondes et ainsi les fréquences de vibrations sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres. Si l'on peut calculer explicitement ces valeurs propres dans le cas des corps monodimensionnels, il n'est plus possible de le faire pour des objets de dimension supérieure et le recours à l'outil numérique devient indispensable.

Ce sujet est réservé à des élèves ayant des connaissances musicales élémentaires.

MAP441, X2009
Sujet N° 2 proposé par François Alouges

Une goutte d'eau dans un cristal liquide

A la frontière entre liquides et solides, les cristaux liquides sont des matériaux composés de longues molécules allongées. En appelant $u(x) \in \mathbb{S}^2$ la direction prise par les molécules au point x, le modèle le plus simple décrit la configuration prise par le cristal comme solution du problème de minimisation

$$\min_{u \in H} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega (E \cdot u)^2 \, dx \,,$$

où $H = \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ tel que $u|_{\partial\Omega} = g\}$, g est la donnée de Dirichlet et E le champ électrique dans lequel baigne éventuellement le cristal (un champ électrique tend à aligner les molécules du cristal dans sa direction).

On souhaite modéliser deux situations différentes: le cas du pixel d'un afficheur à cristaux liquides, dans lequel la direction du cristal ne dépend que d'une variable, et le cas où le cristal occupe l'extérieur d'une goutte d'eau (dans un domaine tridimensionnel). On prend dans ce cas $g = n$ la normale à la goutte et l'on suppose qu'à l'infini la direction du cristal est fixe. Comme le problème est axisymétrique, on peut faire un calcul numérique en 2D et reconstruire la configuration totale par symétrie. Plusieurs directions sont envisageables:

- Décrire un algorithme de minimisation prenant en compte la contrainte $|u(x)| = 1$ en tout point. On fera le cas $E = 0$ d'abord.

- Dans les faits, les molécules de cristal liquide n'ont pas de sens. Du point de vue de notre modèle, cela contraint $u(x)$ à appartenir à $\mathbb{R}P^2$ le plan projectif. On tentera de généraliser les outils précédents à cette nouvelle situation.

MAP441, X2009
Sujet N° 3 proposé par François Alouges

Aimantation dans les matériaux ferromagnétiques

L'aimantation m d'un matériau ferromagnétique occupant un domaine Ω suit l'équation dite de Landau-Lifschitz-Gilbert, dont une version simplifiée est

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \alpha m \wedge \frac{\partial m}{\partial t} = -\gamma m \wedge H \tag{1}$$

dans laquelle le champ magnétique *total* H est donné par

$$H = A\Delta m + H_0\,,$$

H_0 étant un champ magnétique appliqué à l'échantillon. Le but de ce travail est de decrire une méthode numérique pour résoudre (1) par éléments finis. Les points suivants seront abordés:

- Le cas où m ne dépend que du temps et est uniforme en espace. L'équation devient une équation différentielle ordinaire. On écrira des schémas numériques standards pour résoudre cette ODE et on étudiera, en fonction de γ et de α comment l'aimantation s'aligne avec H_0. On réalisera aussi pourquoi $\alpha > 0$. (Il faudra pour cela comprendre la situation $\alpha = 0$...)
- Ensuite, On passera au cas général. On remarquera que l'énergie

  $$E(m) = \frac{A}{2}\int_\Omega |\nabla m|^2\,dx - \int_\Omega H_0 \cdot m\,dx$$

  décroît au cours du temps. On pourra étudier les travaux de l'auteur pour voir de quelle façon un schéma classique de résolution de l'équation de la chaleur peut être utilisé pour cette équation.
- Enfin, il conviendra de faire une étude numérique du phénomène. On se placera dans un domaine bidimensionnel et on utilisera FREEFEM.