

Simulations d'écoulements fluide/particules : vers la programmation d'un rhéomètre numérique.

Sujet proposé par Aline Lefebvre-Lepot,
Aline.Lefebvre@polytechnique.edu

Dans la nature, les boues, les écoulements de lave ou encore les globules rouges dans le sang sont des systèmes formés de particules solides en suspension dans un fluide visqueux (en admettant en première approximation que les globules rouges soient solides). De tels systèmes se retrouvent également dans le monde industriel, comme par exemple dans le béton, la pâte à papier ou certains fluides agroalimentaires.

Ils présentent une variété remarquable de comportements rhéologiques (la rhéologie est l'ensemble des phénomènes conditionnant l'écoulement et la déformation de la matière) dont l'étude a fait l'objet de nombreuses recherches, profitant de contributions venant de différents domaines tels que l'ingénierie, la chimie, la physique ou les mathématiques. Le problème de base consiste à prédire les propriétés macroscopiques de transport de ces suspensions -viscosité, vitesse de sédimentation- à partir des microstructures, c'est à dire à partir des interactions entre les particules et de leur distribution spatiale.

La plupart des études théoriques dans ce domaine sont limitées au cas de suspensions diluées à nombre de Reynolds nul. Dans ce cas, les interactions à longue portée entre les particules peuvent être négligées et on montre que le comportement macroscopique de ces systèmes dépend uniquement de la fraction volumique solide. Etendre l'analyse du cas dilué à des concentrations plus importantes est un problème difficile. En effet, à forte densité solide, chaque particule agit, de proche en proche, sur le comportement de toutes les autres et la méthode employée dans le cas dilué n'est donc plus valable. Le comportement macroscopique de tels systèmes ne dépend plus uniquement de la fraction solide mais de la configuration microscopique du système (par exemple, de la présence ou non d'amas de particules). La simulation numérique s'avère être un outil puissant pour étudier le lien entre les comportements microscopiques et macroscopiques de ces suspensions denses.

L'objectif de ce Modal est d'écrire les équations gouvernant les systèmes fluide/particules et d'étudier une méthode permettant de les résoudre numériquement. On programmera l'algorithme obtenu sous FreeFem++. Si le temps le permet, on observera le déplacement de particules dans un fluide en mouvement et/ou on programmera grâce à cette méthode un rhéomètre numérique (un rhéomètre est un dispositif expérimental permettant de mesurer la viscosité apparente d'un système).

Ce travail se décompose en plusieurs parties :

Systèmes à surface libre : formulation variationnelle et conditions au bord.

Afin de comprendre l'importance physique des conditions aux bords, on commencera par étudier des fluides visqueux évoluant sous l'effet de la gravité (cube d'eau tombant d'une table, cascade).

On écrira deux formulations variationnelles pour le système de Stokes : la première étant la version classique et la seconde en étant une version symétrisée. On montrera que les conditions au bord imposées sur la surface libre du fluide sont différentes dans chacun des deux cas.

Afin d'observer l'influence de ces conditions au bord, on comparera l'évolution en temps de différents systèmes tests pour chacune des deux formulations obtenues (les simulations seront effectuées avec FreeFem++). On expliquera pourquoi l'une des deux formulations semble donner des résultats plus « physiques ».

Ecriture du problème fluide/particules.

Grâce à l'étude précédente, et en supposant que le fluide comme les particules sont sans inertie, on écrira les équations vérifiées par le système fluide/particules. On montrera que ce système d'équations est équivalent à une formulation variationnelle de type Stokes, posée sur un espace contraint.

Résolution numérique par une méthode de pénalisation.

La résolution d'une formulation variationnelle posée sur un espace contraint n'est pas évidente a priori : la méthode des éléments finis classique permet de discrétiser des espaces non contraints. Il faut donc chercher des méthodes permettant de supprimer les contraintes des espaces de fonctions mis en jeu.

La méthode que nous allons utiliser ici est une méthode dite de pénalisation. Elle consiste à supprimer la contrainte de l'espace fonctionnel et à modifier la fonctionnelle à minimiser afin de prendre en compte la contrainte de manière approchée : on dit que la contrainte est pénalisée.

Afin de comprendre et d'étudier cette méthode de pénalisation, on la programmera et on étudiera numériquement sa convergence pour un problème plus simple : on considèrera l'équation de la chaleur stationnaire et on imposera à la température la contrainte d'être nulle dans un sous-domaine du domaine de calcul.

Programmation d'un solveur fluide/particules.

Grâce à la méthode de pénalisation, on implémentera sous FreeFem++ la résolution du problème fluide/particules. Pour une configuration et des forces extérieures données, on calculera ainsi la vitesse de chacune des particules du système.

Selon le temps restant et les souhaits des étudiants, les extensions suivantes pourront ensuite être abordées :

- Evolution en temps du système : la vitesse des particules étant connue, on pourra faire évoluer les particules en temps et suivre leurs déplacements.
- Programmation d'un rhéomètre numérique : pour une configuration donnée, on calculera la viscosité apparente du système. On montrera l'influence de la configuration sur cette viscosité apparente.