Discrétisation des EDP d'évolution

François Alouges

22 mai 2012

Rappels

Equation du type "chaleur" (paraboliques)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x)$$

théorème

2 espaces de Hilbert $V \hookrightarrow H$, $f \in L^2(0,T;H)$
$\exists!\ U \in L^2(0,T;V) \cap C^0([0,T];H)$ solution de

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} < U, \phi >_H + a(U,\phi) = < f(t,.), \phi >_H \ \forall \phi \in V \\ U|_{t=0} = U_0 \in H \end{array}\right.$$

Pour l'équation de la chaleur avec C.L. de Dirichlet on a

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\int U\phi + \int \nabla U \cdot \nabla \phi = \int f(t,.)\phi \, \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \\ U|_{t=0} = U_0 \in L^2(\Omega) \end{array}\right.$$

Rappels

Equation du type "ondes" (hyperboliques)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x)$$

théorème

2 espaces de Hilbert $V \hookrightarrow H$, $f \in L^2(0,T;H)$
$\exists !\ U \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];H)$ solution de

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} < U, \phi >_H + a(U,\phi) =< f(t,.), \phi >_H \ \forall \phi \in V \\ U|_{t=0} = U_0 \in V \\ \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = U_0 \in H \end{array} \right.$$

Attention

On ne peut pas prendre $\phi = U$ car U dépend du temps !

Formellement on a néanmoins :

- En multipliant l'équation par U et en intégrant

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int U^2 + \int |\nabla U|^2 = \int f(t,.)U$$

- En multipliant l'équation par $\frac{\partial U}{\partial t}$ et en intégrant

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |\nabla U|^2 = \int f(t,.)\frac{\partial U}{\partial t}$$

Propriétés élémentaires de l'équation de la chaleur

Attention

On ne peut pas prendre $\phi = U$ car U dépend du temps !

Formellement on a néanmoins :

- En multipliant l'équation par U et en intégrant

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int U^2 + \int |\nabla U|^2 = \int f(t,.)U$$

- En multipliant l'équation par $\frac{\partial U}{\partial t}$ et en intégrant

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |\nabla U|^2 = \int f(t,.)\frac{\partial U}{\partial t}$$

Attention

On ne peut pas prendre $\phi = U$ car U dépend du temps !

Formellement on a néanmoins :

- En multiplient l'équation par U et en intégrant

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int U^2 + \int |\nabla U|^2 = \int f(t,.)U$$

- En multipliant l'équation par $\frac{\partial U}{\partial t}$ et en intégrant

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |\nabla U|^2 = \int f(t,.)\frac{\partial U}{\partial t}$$

Le cas $f = 0$

- L'inégalité d'énergie devient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int U^2 + \int |\nabla U|^2 = 0$$

Soit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int U^2 \leq -C\int U^2$$

et la solution converge exponentiellement vite (dans L^2) vers 0.

- Pour les ondes, on a (en multipliant par $\frac{\partial U}{\partial t}$ et en intégrant)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \int |\nabla U|^2\right) = 0$$

et la solution ne tend pas vers 0.

Le cas $f = 0$

- L'inégalité d'énergie devient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int U^2 + \int |\nabla U|^2 = 0$$

Soit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int U^2 \leq -C\int U^2$$

et la solution converge exponentiellement vite (dans L^2) vers 0.

- Pour les ondes, on a (en multipliant par $\frac{\partial U}{\partial t}$ et en intégrant)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \int |\nabla U|^2\right) = 0$$

et la solution ne tend pas vers 0.

Propriétés

- Equation de la chaleur
  - Effet régularisant
  - Pas réversible en temps
  - Décroissance de la solution (exponentiellement vite $f = 0$)
  - Vitesse de propagation infinie
- Equation des ondes
  - Réversible en temps
  - Pas d'effet régularisant
  - Pas de décroissance de la solution (Energie constante si $f = 0$)
  - Vitesse de propagation finie

Propriétés

- Equation de la chaleur
  - Effet régularisant
  - Pas réversible en temps
  - Décroissance de la solution (exponentiellement vite $f = 0$)
  - Vitesse de propagation infinie
- Equation des ondes
  - Réversible en temps
  - Pas d'effet régularisant
  - Pas de décroissance de la solution (Energie constante si $f = 0$)
  - Vitesse de propagation finie

Discrétisation

But :
Décrire une méthode de discrétisation par éléments finis des équations d'évolution classiques (e.g. équation de la chaleur, des ondes, etc.).

On distingue :

- La semi-discrétisation où l'on ne discrétise qu'en espace.
- La discrétisation totale où l'on discrétise en espace et en temps

Discrétisation

But :
Décrire une méthode de discrétisation par éléments finis des équations d'évolution classiques (e.g. équation de la chaleur, des ondes, etc.).

On distingue :

- La semi-discrétisation où l'on ne discrétise qu'en espace.
- La discrétisation totale où l'on discrétise en espace et en temps

Semi-discrétisation

On effectue une formulation variationnelle discrète en espace et l'équation devient un système différentiel en temps.

Approximation interne $V_h \subset V$ de dimension finie. Fonctions de base $(\phi_i)_{i=1,\cdots,N}$, $U_h = \sum_{j=1}^{N} U_{j,h}\phi_j$

$$\frac{d}{dt} < U_h, \phi_i >_H + a(U_h, \phi_i) = < f(t,.), \phi_i >_H \ .$$

Soit en posant $U = (U_{1,h}, \cdots, U_{N,h})^t$, et $b(t) = (< f(t,.), \phi_1 >_H, \cdots, < f(t,.), \phi_N >_H)^t$

$$\mathcal{M}\frac{d}{dt}U + \mathcal{K}U = b(t).$$

avec $\mathcal{M}_{ij} = < \phi_j, \phi_i >_H$ et $\mathcal{K}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$.
Il existe une unique solution $U \in C^0([0,T]; \mathbb{R}^N)$.

On effectue une formulation variationnelle discrète en espace et l'équation devient un système différentiel en temps.

Approximation interne $V_h \subset V$ de dimension finie. Fonctions de base $(\phi_i)_{i=1,\cdots,N}$, $U_h = \sum_{j=1}^{N} U_{j,h}\phi_j$

$$\frac{d}{dt} < U_h, \phi_i >_H + a(U_h, \phi_i) =< f(t,.), \phi_i >_H \ .$$

Soit en posant $U = (U_{1,h}, \cdots, U_{N,h})^t$, et
$b(t) = (< f(t,.), \phi_1 >_H, \cdots, < f(t,.), \phi_N >_H)^t$

$$\mathcal{M}\frac{d}{dt}U + \mathcal{K}U = b(t).$$

avec $\mathcal{M}_{ij} =< \phi_j, \phi_i >_H$ et $\mathcal{K}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$.
Il existe une unique solution $U \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^N)$.

Semi-discrétisation

On effectue une formulation variationnelle discrète en espace et l'équation devient un système différentiel en temps.

Approximation interne $V_h \subset V$ de dimension finie. Fonctions de base $(\phi_i)_{i=1,\cdots,N}$, $U_h = \sum_{j=1}^{N} U_{j,h}\phi_j$

$$\frac{d}{dt} < U_h, \phi_i >_H + a(U_h, \phi_i) =< f(t,.), \phi_i >_H \ .$$

Soit en posant $U = (U_{1,h}, \cdots, U_{N,h})^t$, et
$b(t) = (< f(t,.), \phi_1 >_H, \cdots, < f(t,.), \phi_N >_H)^t$

$$\mathcal{M}\frac{d}{dt}U + \mathcal{K}U = b(t).$$

avec $\mathcal{M}_{ij} =< \phi_j, \phi_i >_H$ et $\mathcal{K}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$.
Il existe une unique solution $U \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^N)$.

Discrétisation totale

On discrétise en temps l'équation précédente $U_h^n \sim U_h(n\tau)$

- Schéma explicite

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\tau} + \mathcal{K}U_h^n = b(n\tau).$$

- Schéma implicite

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\tau} + \mathcal{K}U_h^{n+1} = b((n+1)\tau).$$

- Schéma de Crank-Nicholson

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\tau} + \mathcal{K}\left(\frac{U_h^{n+1} + U_h^n}{2}\right) = \frac{b((n+1)\tau) + b(n\tau)}{2}.$$

Discrétisation totale

On discrétise en temps l'équation précédente $U_h^n \sim U_h(n\tau)$

- Schéma explicite

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}+\mathcal{K}U_h^n=b(n\tau).$$

- Schéma implicite

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}+\mathcal{K}U_h^{n+1}=b((n+1)\tau).$$

- Schéma de Crank-Nicholson

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}+\mathcal{K}\left(\frac{U_h^{n+1}+U_h^n}{2}\right)=\frac{b((n+1)\tau)+b(n\tau)}{2}.$$

Discrétisation totale

On discrétise en temps l'équation précédente $U_h^n \sim U_h(n\tau)$

- Schéma explicite

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\tau} + \mathcal{K}U_h^n = b(n\tau).$$

- Schéma implicite

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\tau} + \mathcal{K}U_h^{n+1} = b((n+1)\tau).$$

- Schéma de Crank-Nicholson

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\tau} + \mathcal{K}\left(\frac{U_h^{n+1} + U_h^n}{2}\right) = \frac{b((n+1)\tau) + b(n\tau)}{2}.$$

Les schémas classiques

- $\theta-$schéma ($\theta \in [0,1]$)

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}+\mathcal{K}(\theta U_h^{n+1}+(1-\theta)U_h^n)=\theta b((n+1)\tau)+(1-\theta)b(n\tau).$$

- Le schéma de Gear (2 pas) (ordre 2 en temps, inconditionnellement stable)

$$\mathcal{M}\frac{3U_h^{n+1}-4U_h^n+U_h^{n-1}}{2\tau}+\mathcal{K}U_h^{n+1}=b((n+1)\tau).$$

Proposition : Le $\theta-$schéma est d'ordre 1 en temps sauf pour $\theta=\frac{1}{2}$ où il est d'ordre 2.

- $\theta-$schéma ($\theta \in [0,1]$)

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\tau} + \mathcal{K}(\theta U_h^{n+1} + (1-\theta)U_h^n) = \theta b((n+1)\tau) + (1-\theta)b(n\tau).$$

- Le schéma de Gear (2 pas) (ordre 2 en temps, inconditionnellement stable)

$$\mathcal{M}\frac{3U_h^{n+1} - 4U_h^n + U_h^{n-1}}{2\tau} + \mathcal{K}U_h^{n+1} = b((n+1)\tau).$$

Proposition : Le $\theta-$schéma est d'ordre 1 en temps sauf pour $\theta = \frac{1}{2}$ où il est d'ordre 2.

Les schémas classiques

- $\theta-$schéma ($\theta \in [0,1]$)

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}+\mathcal{K}(\theta U_h^{n+1}+(1-\theta)U_h^n)=\theta b((n+1)\tau)+(1-\theta)b(n\tau).$$

- Le schéma de Gear (2 pas) (ordre 2 en temps, inconditionnellement stable)

$$\mathcal{M}\frac{3U_h^{n+1}-4U_h^n+U_h^{n-1}}{2\tau}+\mathcal{K}U_h^{n+1}=b((n+1)\tau).$$

Proposition : Le $\theta-$schéma est d'ordre 1 en temps sauf pour $\theta=\frac{1}{2}$ où il est d'ordre 2.

On sait que la solution de l'équation vérifie (multiplier par u et intégrer en temps et espace)

$$\frac{1}{2}\int u^2(t,x)\,dx + \int_0^t\int |\nabla u|^2(s,x)\,ds\,dx = \frac{1}{2}\int u^2(0,x)$$

mais aussi (multiplier par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et intégrer en temps et espace)

$$\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2(t,x)\,dx + \int_0^t\int \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2(s,x)\,ds\,dx = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2(0,x)$$

Stabilité

Le schéma est stable si la solution reste bornée, quand τ et le pas du maillage h tendent vers 0.

On cherche un contrôle d'une norme de la solution.

Remarque : En dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

2 normes adaptées : $(\mathcal{M}U, U)$ ou $(\mathcal{K}U, U)$.

Stabilité

Le schéma est stable si la solution reste bornée, quand τ et le pas du maillage h tendent vers 0.

On cherche un contrôle d'une norme de la solution.

Remarque : En dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

2 normes adaptées : $(\mathcal{M}U, U)$ ou $(\mathcal{K}U, U)$.

Stabilité

Le schéma est stable si la solution reste bornée, quand τ et le pas du maillage h tendent vers 0.

On cherche un contrôle d'une norme de la solution.

Remarque : En dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

2 normes adaptées : $(\mathcal{M}U, U)$ ou $(\mathcal{K}U, U)$.

Discrétisation des inégalités d'énergie avec le $\theta-$schéma

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}+\mathcal{K}(\theta U_h^{n+1}+(1-\theta)U_h^n)=0.$$

On pose $V_h^n=\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}$ (c'est-à-dire $U_h^{n+1}=U_h^n+\tau V_h^n$) et on réécrit en

$$\mathcal{M}V_h^n+\mathcal{K}(U_h^n+\theta\tau V_h^n)=0,$$

qui donne l'estimation (en multipliant par V_h^n)

$$(\mathcal{M}V_h^n,V_h^n)+\theta\tau\,(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n)=-\,(\mathcal{K}U_h^n,V_h^n)\,.$$

puis on calcule

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{K}U_h^{n+1},U_h^{n+1}\right) &= (\mathcal{K}U_h^n,U_h^n)+2\tau\,(\mathcal{K}U_h^n,V_h^n)+\tau^2\,(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n)\\ &= (\mathcal{K}U_h^n,U_h^n)-2\tau\,(\mathcal{M}V_h^n,V_h^n)\\ &\qquad +(1-2\theta)\tau^2\,(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n)\,.\end{aligned}$$

Discrétisation des inégalités d'énergie avec le $\theta-$schéma

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}+\mathcal{K}(\theta U_h^{n+1}+(1-\theta)U_h^n)=0.$$

On pose $V_h^n=\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}$ (c'est-à-dire $U_h^{n+1}=U_h^n+\tau V_h^n$) et on réécrit en

$$\mathcal{M}V_h^n+\mathcal{K}(U_h^n+\theta\tau V_h^n)=0,$$

qui donne l'estimation (en multiplier par V_h^n)

$$(\mathcal{M}V_h^n,V_h^n)+\theta\tau\left(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n\right)=-\left(\mathcal{K}U_h^n,V_h^n\right).$$

puis on calcule

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{K}U_h^{n+1},U_h^{n+1}\right) &= \left(\mathcal{K}U_h^n,U_h^n\right)+2\tau\left(\mathcal{K}U_h^n,V_h^n\right)+\tau^2\left(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n\right)\\ &= \left(\mathcal{K}U_h^n,U_h^n\right)-2\tau\left(\mathcal{M}V_h^n,V_h^n\right)\\ &\quad +(1-2\theta)\tau^2\left(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n\right).\end{aligned}$$

Discrétisation des inégalités d'énergie avec le $\theta-$schéma

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}+\mathcal{K}(\theta U_h^{n+1}+(1-\theta)U_h^n)=0.$$

On pose $V_h^n=\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}$ (c'est-à-dire $U_h^{n+1}=U_h^n+\tau V_h^n$) et on réécrit en

$$\mathcal{M}V_h^n+\mathcal{K}(U_h^n+\theta\tau V_h^n)=0,$$

qui donne l'estimation (en multipliant par V_h^n)

$$(\mathcal{M}V_h^n,V_h^n)+\theta\tau\left(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n\right)=-\left(\mathcal{K}U_h^n,V_h^n\right).$$

puis on calcule

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{K}U_h^{n+1},U_h^{n+1}\right) &= (\mathcal{K}U_h^n,U_h^n)+2\tau\left(\mathcal{K}U_h^n,V_h^n\right)+\tau^2\left(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n\right)\\ &= (\mathcal{K}U_h^n,U_h^n)-2\tau\left(\mathcal{M}V_h^n,V_h^n\right)\\ &\quad+(1-2\theta)\tau^2\left(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n\right).\end{aligned}$$

Discrétisation des inégalités d'énergie avec le $\theta-$schéma

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}+\mathcal{K}(\theta U_h^{n+1}+(1-\theta)U_h^n)=0.$$

On pose $V_h^n=\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\tau}$ (c'est-à-dire $U_h^{n+1}=U_h^n+\tau V_h^n$) et on réécrit en

$$\mathcal{M}V_h^n+\mathcal{K}(U_h^n+\theta\tau V_h^n)=0,$$

qui donne l'estimation (en multipliant par V_h^n)

$$(\mathcal{M}V_h^n,V_h^n)+\theta\tau\,(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n)=-\,(\mathcal{K}U_h^n,V_h^n)\,.$$

puis on calcule

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{K}U_h^{n+1},U_h^{n+1}\right) &= (\mathcal{K}U_h^n,U_h^n)+2\tau\,(\mathcal{K}U_h^n,V_h^n)+\tau^2\,(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n)\\ &= (\mathcal{K}U_h^n,U_h^n)-2\tau\,(\mathcal{M}V_h^n,V_h^n)\\ &\qquad +(1-2\theta)\tau^2\,(\mathcal{K}V_h^n,V_h^n)\,.\end{aligned}$$

Conclusion

- Si $\theta \geq \frac{1}{2}$ le schéma est inconditionnellement stable.
- Le schéma est encore stable si

$$\forall V_h^n,\ -2\tau\,(\mathcal{M}V_h^n, V_h^n) + (1-2\theta)\tau^2\,(\mathcal{K}V_h^n, V_h^n) \leq 0.$$

c'est-à-dire

$$\forall V_h^n,\ (\mathcal{K}V_h^n, V_h^n) \leq \frac{2}{(1-2\theta)\tau}\,(\mathcal{M}V_h^n, V_h^n)\,.$$

C'est vrai ssi $\lambda_N \leq \frac{2}{(1-2\theta)\tau}$, où λ_i sont les valeurs propres de

$$\mathcal{K}V_i = \lambda_i \mathcal{M}V_i$$

Conclusion

- Si $\theta \geq \frac{1}{2}$ le schéma est inconditionnellement stable.
- Le schéma est encore stable si

$$\forall V_h^n, \; -2\tau \left(\mathcal{M} V_h^n, V_h^n\right) + (1-2\theta)\tau^2 \left(\mathcal{K} V_h^n, V_h^n\right) \leq 0.$$

c'est-à-dire

$$\forall V_h^n, \; \left(\mathcal{K} V_h^n, V_h^n\right) \leq \frac{2}{(1-2\theta)\tau} \left(\mathcal{M} V_h^n, V_h^n\right).$$

C'est vrai ssi $\lambda_N \leq \frac{2}{(1-2\theta)\tau}$, où λ_i sont les valeurs propres de

$$\mathcal{K} V_i = \lambda_i \mathcal{M} V_i$$

Conclusion

- Si $\theta \geq \frac{1}{2}$ le schéma est inconditionnellement stable.
- Le schéma est encore stable si

$$\forall V_h^n,\ -2\tau\left(\mathcal{M}V_h^n, V_h^n\right) + (1-2\theta)\tau^2\left(\mathcal{K}V_h^n, V_h^n\right) \leq 0.$$

c'est-à-dire

$$\forall V_h^n,\ \left(\mathcal{K}V_h^n, V_h^n\right) \leq \frac{2}{(1-2\theta)\tau}\left(\mathcal{M}V_h^n, V_h^n\right).$$

C'est vrai ssi $\lambda_N \leq \frac{2}{(1-2\theta)\tau}$, où λ_i sont les valeurs propres de

$$\mathcal{K}V_i = \lambda_i \mathcal{M}V_i$$

Théorème de convergence

Théorème

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite régulière de maillages de Ω, V_{0h} le sous espace de $H_0^1(\Omega)$ défini à partir des éléments P^k, u_h^n la fonction de coordonnées U_h^n calculés par le schéma. Si $\lim_{h\to 0} u_h^0 = u_0$ dans $L^2(\Omega)$, et si h et τ tendent vers 0 en respectant la condition de stabilité, alors

$$\lim_{h\to 0, \tau\to 0} \max_{0\leq n\leq n_0(\tau)} ||u(n\tau) - u_h^n||_{L^2} = 0.$$

Condition de stabilité

$$(*) \quad \lambda_N \leq \frac{2}{(1-2\theta)\tau}.$$

Dans V_h toutes les normes sont équivalentes

$$\lambda_1(\mathcal{M}U,U) \leq (\mathcal{K}U,U) \leq \lambda_N(\mathcal{M}U,U)$$

qui est l'analogue de

$$\forall v \in V_h,\ \lambda_1 \int v^2 \leq \int |\nabla v|^2 \leq \lambda_N \int v^2.$$

Un calcul montre que

$$\lambda_1 \rightarrow \ \text{Poincaré}(\Omega) \text{ quand } h \rightarrow 0,\ \lambda_N \sim \frac{C}{h^2}.$$

(*) devient

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{2}{C(1-2\theta)}.$$

Condition de stabilité

$$(*) \quad \lambda_N \leq \frac{2}{(1-2\theta)\tau}.$$

Dans V_h toutes les normes sont équivalentes

$$\lambda_1(\mathcal{M}U, U) \leq (\mathcal{K}U, U) \leq \lambda_N(\mathcal{M}U, U)$$

qui est l'analogue de

$$\forall v \in V_h, \; \lambda_1 \int v^2 \leq \int |\nabla v|^2 \leq \lambda_N \int v^2.$$

Un calcul montre que

$$\lambda_1 \rightarrow \text{ Poincaré}(\Omega) \text{ quand } h \rightarrow 0, \; \lambda_N \sim \frac{C}{h^2}.$$

(*) devient

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{2}{C(1-2\theta)}.$$

Condition de stabilité

$$(*) \quad \lambda_N \leq \frac{2}{(1-2\theta)\tau}.$$

Dans V_h toutes les normes sont équivalentes

$$\lambda_1(\mathcal{M}U, U) \leq (\mathcal{K}U, U) \leq \lambda_N(\mathcal{M}U, U)$$

qui est l'analogue de

$$\forall v \in V_h,\ \lambda_1 \int v^2 \leq \int |\nabla v|^2 \leq \lambda_N \int v^2.$$

Un calcul montre que

$$\lambda_1 \to \ \text{Poincaré}(\Omega) \text{ quand } h \to 0,\ \lambda_N \sim \frac{C}{h^2}.$$

(*) devient

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{2}{C(1-2\theta)}.$$

Condition de stabilité

$$(*) \quad \lambda_N \leq \frac{2}{(1-2\theta)\tau}.$$

Dans V_h toutes les normes sont équivalentes

$$\lambda_1(\mathcal{M}U, U) \leq (\mathcal{K}U, U) \leq \lambda_N(\mathcal{M}U, U)$$

qui est l'analogue de

$$\forall v \in V_h,\ \lambda_1 \int v^2 \leq \int |\nabla v|^2 \leq \lambda_N \int v^2.$$

Un calcul montre que

$$\lambda_1 \to \text{ Poincaré}(\Omega) \text{ quand } h \to 0,\ \lambda_N \sim \frac{C}{h^2}.$$

(*) devient

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{2}{C(1-2\theta)}.$$

Conclusion

Le $\theta-$schéma

Lorsque τ et h tendent vers 0, le $\theta-$schéma est convergent

- si $\theta \geq \frac{1}{2}$
- si $\theta < \frac{1}{2}$ et que $\dfrac{\tau}{h^2} \leq \dfrac{2}{C(1-2\theta)}$.

Le cas hyperbolique - Semi discrétisation

Approximation interne $V_h \subset V$ de dimension finie. Fonctions de base $(\phi_i)_{i=1,\cdots,N}$, $U_h = \sum_{j=1}^N U_{j,h}\phi_j$

$$\frac{d^2}{dt^2} < U_h, \phi_i >_H + a(U_h, \phi_i) = < f(t,.), \phi_i >_H \ .$$

Soit en posant $U = (U_{1,h}, \cdots, U_{N,h})^t$, et
$b(t) = (< f(t,.), \phi_1 >_H, \cdots, < f(t,.), \phi_N >_H)^t$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{M}\frac{d^2}{dt^2}U + \mathcal{K}U = b(t) \\ U(0) = U_0 \\ U'(0) = U_1 \end{array}\right.$$

avec $\mathcal{M}_{ij} = < \phi_j, \phi_i >_H$ et $\mathcal{K}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$.
Il existe une unique solution $U \in C^1([0,T]; \mathbb{R}^N)$.

Le cas hyperbolique - Semi discrétisation

Approximation interne $V_h \subset V$ de dimension finie. Fonctions de base $(\phi_i)_{i=1,\cdots,N}$, $U_h = \sum_{j=1}^{N} U_{j,h}\phi_j$

$$\frac{d^2}{dt^2} < U_h, \phi_i >_H + a(U_h, \phi_i) = < f(t,.), \phi_i >_H \ .$$

Soit en posant $U = (U_{1,h}, \cdots, U_{N,h})^t$, et $b(t) = (< f(t,.), \phi_1 >_H, \cdots, < f(t,.), \phi_N >_H)^t$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{M}\dfrac{d^2}{dt^2}U + \mathcal{K}U = b(t) \\ U(0) = U_0 \\ U'(0) = U_1 \end{array}\right.$$

avec $\mathcal{M}_{ij} = < \phi_j, \phi_i >_H$ et $\mathcal{K}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$.
Il existe une unique solution $U \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^N)$.

Approximation interne $V_h \subset V$ de dimension finie. Fonctions de base $(\phi_i)_{i=1,\cdots,N}$, $U_h = \sum_{j=1}^N U_{j,h}\phi_j$

$$\frac{d^2}{dt^2} < U_h, \phi_i >_H + a(U_h, \phi_i) = < f(t,.), \phi_i >_H \ .$$

Soit en posant $U = (U_{1,h}, \cdots, U_{N,h})^t$, et
$b(t) = (< f(t,.), \phi_1 >_H, \cdots, < f(t,.), \phi_N >_H)^t$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{M}\dfrac{d^2}{dt^2}U + \mathcal{K}U = b(t) \\ U(0) = U_0 \\ U'(0) = U_1 \end{array} \right.$$

avec $\mathcal{M}_{ij} =< \phi_j, \phi_i >_H$ et $\mathcal{K}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$.
Il existe une unique solution $U \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^N)$.

Schémas classiques

- θ-schéma

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\tau^2} \quad + \quad \mathcal{K}(\theta U_h^{n+1} + (1-2\theta)U_h^n + \theta U_h^{n-1})$$
$$= \theta b_{n+1} + (1-2\theta)b_n + \theta b_{n-1}.$$

- Schéma de Newmark (voir poly)

théorème

Le θ-schéma est stable si

- $\frac{1}{2} \leq 2\theta \leq 1$
- ou si $2\theta < \frac{1}{2}$ il faut alors que

$$\max_i \lambda_i \tau^2 < \frac{2}{\frac{1}{2} - 2\theta}.$$

Schémas classiques

- θ-schéma

$$\mathcal{M}\frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\tau^2} \quad + \quad \mathcal{K}(\theta U_h^{n+1} + (1-2\theta)U_h^n + \theta U_h^{n-1})$$
$$= \theta b_{n+1} + (1-2\theta)b_n + \theta b_{n-1}.$$

- Schéma de Newmark (voir poly)

théorème

Le θ-schéma est stable si

- $\frac{1}{2} \leq 2\theta \leq 1$
- ou si $2\theta < \frac{1}{2}$ il faut alors que

$$\max_i \lambda_i \tau^2 < \frac{2}{\frac{1}{2} - 2\theta}.$$