Quelques modèles conduisant à des EDP linéaires

François Alouges

16 Mars 2010

Plan

Description de l'évolution de la température dans un matériau

L'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T + \frac{P}{\rho c}$$

- T température
- D coefficient de diffusion
- P densité de source de chaleur
- c chaleur massique du matériau

Dérivation

Soit V un volume quelconque (mais fixe) de matériau, on calcule l'évolution de l'énergie interne U_V dans V au cours du temps

$$\begin{aligned} \frac{dU_V}{dt} &= \int_V \rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\, dx \\ &= -\int_{\partial V} F(x,t)\cdot n(x)\, d\sigma(x) + \int_V P(x,t)\, dx \\ &= -\int_V \operatorname{div}\,(F(x,t))\, dx + \int_V P(x,t)\, dx \end{aligned}$$

où F est le flux de chaleur à travers ∂V.

Dérivation

Le volume V étant quelconque, on déduit l'équation de la chaleur

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(F(x,t)) + P(x,t)\,.$$

Ensuite, on utilise la loi de Fourier

$$F = -\lambda \nabla T, \text{ avec } \lambda > 0$$

(la chaleur se transfère des endroits chauds aux endroits froids et d'autant plus fort que le gradient est grand).

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \mathrm{div}\,(\nabla T) + P \\ &= \lambda \Delta T + P \end{aligned}$$

Dérivation

Le volume V étant quelconque, on déduit l'équation de la chaleur

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(F(x,t)) + P(x,t)\,.$$

Ensuite, on utilise la loi de Fourier

$$F = -\lambda \nabla T, \text{ avec } \lambda > 0$$

(la chaleur se transfère des endroits chauds aux endroits froids et d'autant plus fort que le gradient est grand).

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \mathrm{div}\,(\nabla T) + P \\ &= \lambda \Delta T + P \end{aligned}$$

Dérivation

Le volume V étant quelconque, on déduit l'équation de la chaleur

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(F(x,t)) + P(x,t)\,.$$

Ensuite, on utilise la loi de Fourier

$$F = -\lambda \nabla T, \text{ avec } \lambda > 0$$

(la chaleur se transfère des endroits chauds aux endroits froids et d'autant plus fort que le gradient est grand).

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \mathrm{div}\,(\nabla T) + P \\ &= \lambda \Delta T + P \end{aligned}$$

Et les conditions aux limites?

Deux sortes de conditions aux limites:

- La température est fixée sur un bord $T = T_0$ (bord isotherme)
- Le bord est isolant: Le flux de chaleur normal est nul. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 &= F \cdot n \\ &= -\lambda \nabla T \cdot n \\ &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \end{aligned}$$

Et les conditions aux limites?

Deux sortes de conditions aux limites:

- La température est fixée sur un bord $T = T_0$ (bord isotherme)
- Le bord est isolant: Le flux de chaleur normal est nul. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 &= F \cdot n \\ &= -\lambda \nabla T \cdot n \\ &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \end{aligned}$$

Et les conditions aux limites?

Deux sortes de conditions aux limites:

- La température est fixée sur un bord $T = T_0$ (bord isotherme)
- Le bord est isolant: Le flux de chaleur normal est nul. C'est-à-dire

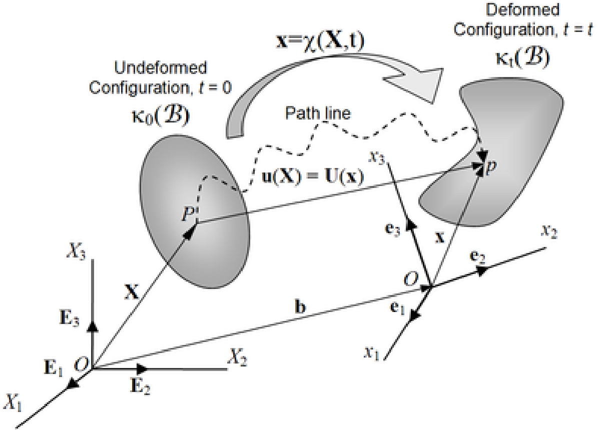
$$\begin{aligned} 0 &= F \cdot n \\ &= -\lambda \nabla T \cdot n \\ &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \end{aligned}$$

Théorie de l'élasticité

But: décrire les déformations d'un matériau sous l'action de forces externes (ex: flambage d'une poutre, d'un bâtiment, d'un avion, etc.).

Principe fondamental: Le matériau est représenté dans deux configurations (a priori) différentes:

- La configuration de référence $X \in \Omega_{ref}$
- La configuration courante (ou déformée, par exemple sous l'action de forces) Ω. On note $x = \chi(X) \in \Omega$ la position du point courant qui était en X dans la configuration de référence.


Deformed
Configuration, $t = t$
$\kappa_t(\mathcal{B})$
$\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X},t)$
Undeformed
Configuration, $t = 0$
$\kappa_0(\mathcal{B})$
Path line
$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}(\mathbf{x})$
P
p
x_3
$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{x}$
x_2
$\mathbf{e}_2$
O
$\mathbf{e}_1$
x_1
$\mathbf{b}$
X_3
$\mathbf{X}$
$\mathbf{E}_3$
$\mathbf{E}_1$
O
X_2
$\mathbf{E}_2$
X_1

Mécanique des milieux continus

On écrit que le matériau est en équilibre: pour tout volume V, les forces extérieures s'appliquant à V (gravité, etc.) F_V équilibrent les forces de contraintes (dues à la déformation du matériau environnant V.

$$\begin{aligned} 0 &= F_V + \int_{\partial V} T(x,n)\,ds(x) \\ &= \int_V f(x)\,dx + \int_{\partial V} T(x,n)\,ds(x) \end{aligned}$$

Puis, on utilise le principe de Cauchy qui montre que

$$T(x,n) = \sigma(x)n \ \left(= \sum_{i,j} \sigma_{ij} n_j\right).$$

où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy. C'est nécessairement une matrice symétrique

Mécanique des milieux continus

On écrit que le matériau est en équilibre: pour tout volume V, les forces extérieures s'appliquant à V (gravité, etc.) F_V équilibrent les forces de contraintes (dues à la déformation du matériau environnant V.

$$\begin{aligned} 0 &= F_V + \int_{\partial V} T(x,n)\, ds(x) \\ &= \int_V f(x)\, dx + \int_{\partial V} T(x,n)\, ds(x) \end{aligned}$$

Puis, on utilise le principe de Cauchy qui montre que

$$T(x,n) = \sigma(x)n \ \left(= \sum_{i,j} \sigma_{ij} n_j\right).$$

où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy. C'est nécessairement une matrice symétrique

Mécanique des milieux continus

On écrit que le matériau est en équilibre: pour tout volume V, les forces extérieures s'appliquant à V (gravité, etc.) F_V équilibrent les forces de contraintes (dues à la déformation du matériau environnant V.

$$\begin{aligned} 0 &= F_V + \int_{\partial V} T(x,n)\,ds(x) \\ &= \int_V f(x)\,dx + \int_{\partial V} T(x,n)\,ds(x) \end{aligned}$$

Puis, on utilise le principe de Cauchy qui montre que

$$T(x,n) = \sigma(x)n \;\; (= \sum_{i,j} \sigma_{ij} n_j)\,.$$

où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy. C'est nécessairement une matrice symétrique

Mécanique des milieux continus

On écrit que le matériau est en équilibre: pour tout volume V, les forces extérieures s'appliquant à V (gravité, etc.) F_V équilibrent les forces de contraintes (dues à la déformation du matériau environnant V.

$$\begin{aligned} 0 &= F_V + \int_{\partial V} T(x,n)\,ds(x) \\ &= \int_V f(x)\,dx + \int_{\partial V} T(x,n)\,ds(x) \end{aligned}$$

Puis, on utilise le principe de Cauchy qui montre que

$$T(x,n) = \sigma(x)n \;\; (= \sum_{i,j} \sigma_{ij} n_j) \, .$$

où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy. C'est nécessairement une matrice symétrique

Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V f(x)\,dx + \int_{\partial V} T(x,n)\,ds(x) \\ &= \int_V f(x)\,dx + \int_{\partial V} \sigma(x)n(x)\,ds(x) \\ &= \int_V \left(f(x) + \text{div}\,(\sigma(x))\right)\,dx \end{aligned}$$

On en déduit les équation de l'élastostatique

$$-\text{div}\,\sigma = f\,.$$

Il reste à donner une expression (loi de comportement) à σ...

Le déplacement

On note

- $u(X) = x(X) - X$ le déplacement.
- $$\begin{aligned} \nabla_X u &= \nabla_X x - Id \\ &= F - Id \end{aligned}$$
  le gradient du déplacement.
- $C = F^T F - Id$. Si $X \mapsto x(X)$ est une rotation + translation, alors $C = 0$

Le déplacement

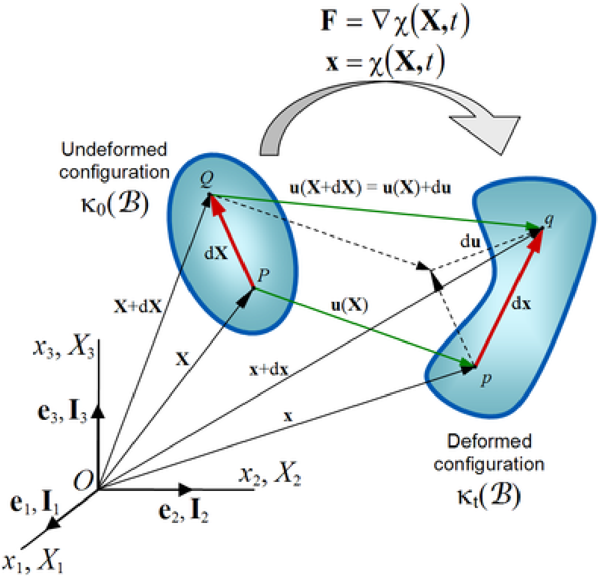
On note

- $u(X) = x(X) - X$ le déplacement.
- $$\begin{aligned} \nabla_X u &= \nabla_X x - Id \\ &= F - Id \end{aligned}$$
  le gradient du déplacement.
- $C = F^T F - Id$. Si $X \mapsto x(X)$ est une rotation + translation, alors $C = 0$

Le déplacement

On note

- $u(X) = x(X) - X$ le déplacement.
- $$\begin{aligned} \nabla_X u &= \nabla_X x - Id \\ &= F - Id \end{aligned}$$
  le gradient du déplacement.
- $C = F^T F - Id$. Si $X \mapsto x(X)$ est une rotation + translation, alors $C = 0$


$\mathbf{F} = \nabla\chi(\mathbf{X},t)$
$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X},t)$
Undeformed configuration
$\kappa_0(\mathcal{B})$
Q
P
$\mathbf{dX}$
$\mathbf{u(X+dX) = u(X)+du}$
$\mathbf{du}$
q
p
$\mathbf{dx}$
$\mathbf{u(X)}$
$\mathbf{X+dX}$
$\mathbf{X}$
$\mathbf{x+dx}$
$\mathbf{x}$
x_3, X_3
$\mathbf{e}_3, \mathbf{I}_3$
O
$\mathbf{e}_1, \mathbf{I}_1$
x_1, X_1
$\mathbf{e}_2, \mathbf{I}_2$
x_2, X_2
Deformed configuration
$\kappa_t(\mathcal{B})$

Elasticité linéarisée

On fait une hypothèse de petit déplacement (u petit).

$$\begin{aligned} C &= (Id + \nabla_X u)^T (Id + \nabla_X u) - Id \\ &\sim (\nabla u + (\nabla u)^T) \end{aligned}$$

On pose $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$ le tenseur de déformations

Et on pose la loi de comportement (loi de Hooke)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$$

Elasticité linéarisée

On fait une hypothèse de petit déplacement (u petit).

$$\begin{aligned} C &= (Id + \nabla_X u)^T (Id + \nabla_X u) - Id \\ &\sim (\nabla u + (\nabla u)^T) \end{aligned}$$

On pose $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$ le tenseur de déformations

Et on pose la loi de comportement (loi de Hooke)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$$

Elasticité linéarisée

Si le matériau isotrope la loi de Hooke se simplifie

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\mu e(u) + \lambda Tr(e(u)) Id \\ &= \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) + \lambda \mathrm{div}(u) Id \end{aligned}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

L'équation de l'élasticité devient

$$-\mathrm{div}(2\mu e(u) + \lambda Tr(e(u)) Id) = f\,.$$

ou en coordonnées

$$-\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda \mathrm{div}(u)\delta_{ij}\right) = f_i \text{ dans } \Omega$$

On prend $u = 0$ sur $\partial\Omega$ pour simplifier (pour l'instant).

Elasticité linéarisée

Si le matériau isotrope la loi de Hooke se simplifie

$$\begin{aligned}\sigma &= 2\mu e(u) + \lambda Tr(e(u)) Id \\ &= \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) + \lambda \mathrm{div}(u) Id\end{aligned}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

L'équation de l'élasticité devient

$$-\mathrm{div}(2\mu e(u) + \lambda Tr(e(u)) Id) = f\,.$$

ou en coordonnées

$$-\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda \mathrm{div}(u)\delta_{ij}\right) = f_i \text{ dans } \Omega$$

On prend $u = 0$ sur $\partial\Omega$ pour simplifier (pour l'instant)...

Formulation variationnelle

$\forall v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \mathrm{div}(u) \delta_{ij} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i v_i \, dx$$

soit (avec $A : B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$)

$$\int_\Omega 2\mu e(u) : \nabla v + \lambda \mathrm{div}(u) \mathrm{div}(v) \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Astuce: La forme bilinéaire est en fait symétrique (si $A = A^T$, $A : B = A : (B + B^T)/2$)

$$\int_\Omega 2\mu e(u) : e(v) + \lambda \mathrm{div}(u) \mathrm{div}(v) \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Formulation variationnelle

$\forall v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \mathrm{div}(u) \delta_{ij} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i v_i \, dx$$

soit (avec $A : B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$)

$$\int_\Omega 2\mu e(u) : \nabla v + \lambda \mathrm{div}(u) \mathrm{div}(v) \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Astuce: La forme bilinéaire est en fait symétrique (si $A = A^T$, $A : B = A : (B + B^T)/2$)

$$\int_\Omega 2\mu e(u) : e(v) + \lambda \mathrm{div}(u) \mathrm{div}(v) \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Théorie variationnelle

On veut appliquer le théorème de Lax-Milgram.
Coercivité:

$$\forall u \in H_0^1,\ 2\mu||e(u)||_{L^2}^2 + \lambda||\mathrm{div}(u)||_{L^2}^2 \geq \alpha||u||_{H^1}^2 ?$$

Vrai si $\mu > 0$ et $2\mu + N\lambda > 0$.

Théorie variationnelle

On veut appliquer le théorème de Lax-Milgram.
Coercivité:

$$\forall u \in H_0^1,\ 2\mu||e(u)||_{L^2}^2 + \lambda||\mathrm{div}(u)||_{L^2}^2 \geq \alpha||u||_{H^1}^2 ?$$

Vrai si $\mu > 0$ et $2\mu + N\lambda > 0$.

Inégalité de Korn

Lemme: On a

$$\forall u \in H_0^1,\ 2||e(u)||_{L^2}^2 \geq ||\nabla u||_{L^2}^2$$

Preuve:

$$2\int_\Omega |e(u)|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \nabla u : (\nabla u)^T = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \text{div}(u)^2$$

car

$$\int_\Omega \nabla u : (\nabla u)^T \quad = \quad \sum_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\sum_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} u_j = \sum_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

Inégalité de Korn

Lemme: $\forall u \in H^1(\Omega)$

$$||u||_{H^1} \leq C \left(||u||_{L^2}^2 + ||e(u)||_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarques:

- Pas trivial. Il y a toutes les dérivées à gauche et seulement la partie symétrique à droite.
- Il existe des champs de vecteurs $u \neq 0$ tels que $e(u) = 0$. Il s'agit des mouvements solides

$$u(x) = b + Mx$$

où M est une matrice antisymétrique.

Inégalité de Korn

Lemme: $\forall u \in H^1(\Omega)$

$$||u||_{H^1} \leq C \left(||u||^2_{L^2} + ||e(u)||^2_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarques:

- Pas trivial. Il y a toutes les dérivées à gauche et seulement la partie symétrique à droite.
- Il existe des champs de vecteurs $u \neq 0$ tels que $e(u) = 0$. Il s'agit des mouvements solides

$$u(x) = b + Mx$$

où M est une matrice antisymétrique.

Equations de Navier-Stokes

Equation de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u\right) - \mu\Delta u + \nabla p = f$$
$$\mathrm{div}(u) = 0$$

- ρ densité du fluide
- u vitesse du fluide
- μ viscosité du fluide
- p pression du fluide
- f forces extérieures

Un des problèmes du millénaire

"Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations."

Equations de Navier-Stokes

On s'intéresse à un milieu déformable (typiquement un fluide) incompressible.

- Les particules de fluide sont à la position $x(X,t)$, avec $x(X,0)=X$.
- On appelle $u(x,t)=\frac{d}{dt}x(X,t)$ la vitesse du fluide.
- On regarde un volume de fluide $V(t)$ qui évolue au cours du temps, et on étudie pour une fonction ϕ l'évolution de

$$\int_{V(t)} \phi(x,t)\,dx\,.$$

Equations de Navier-Stokes

Lemme: On a

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \phi(x,t)\,dx &= \int_{V(t)} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}\,dx + \int_{\partial V(t)} u(x,t)\cdot n\,\phi(x,t)\,ds \\
&= \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\phi(x,t)u(x,t)) \right) dx
\end{aligned}
$$

- $\phi = 1$ Conservation du volume de fluide (incompressibilité)

$$\mathrm{div}(u) = 0\,.$$

Equations de Navier-Stokes

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \phi(x,t)\,dx = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\phi(x,t)u(x,t))\right)\,dx$$

- $\phi(x,t) = \rho(x,t)$ densité du fluide (conservation de la masse)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho(x,t)u(x,t)) \\ &= \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\cdot\nabla\rho(x,t) \end{aligned}$$

Equation de transport de la densité. Si $\rho(x,0) = \rho_0$ est constant, alors $\rho(x,t) = \rho_0, \ \forall t > 0$.

Equations de Navier-Stokes

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \phi(x,t)\,dx = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\phi(x,t)u(x,t)) \right) dx$$

- $\phi(x,t) = \rho_0 u(x,t)$ quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho_0 u\,dx &= \int_{V(t)} \frac{\partial \rho_0 u}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_0 u \otimes u)\,dx \\ &= \int_{V(t)} \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u \right) dx \end{aligned}$$

Equations de Navier-Stokes

D'autre part

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho_0 u\,dx &= \int_{V(t)} f(x,t)\,dx + \int_{\partial V(t)} \sigma n\,ds \\ &= \int_{V(t)} f(x,t)\; + \mathrm{div}(\sigma)\,dx\end{aligned}$$

On arrive alors à

$$\begin{aligned}&\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u\right) = f + \mathrm{div}(\sigma)\\ &\mathrm{div}(u) = 0\end{aligned}$$

où σ est le tenseur de contraintes de Cauchy (il est symétrique)

Equations de Navier-Stokes

Il reste à donner une loi de comportement $\sigma = \sigma(u)$...

La plus simple correspond aux fluides dits Newtoniens et pour lesquels on prend $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - p\, Id$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \mathrm{div} \left(\mu \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) - p\, Id \right) = f$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \mu \Delta u - \mu \nabla \mathrm{div}(u) + \nabla p = f$$

mais div(u)=0...

Equations de Navier-Stokes

Il reste à donner une loi de comportement $\sigma = \sigma(u)$...
La plus simple correspond aux fluides dits Newtoniens et pour lesquels on prend $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - p\, Id$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \mathrm{div} \left(\mu \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) - p\, Id \right) = f$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \mu \Delta u - \mu \nabla \mathrm{div}(u) + \nabla p = f$$

mais div(u)=0...

Equations de Navier-Stokes

Il reste à donner une loi de comportement $\sigma = \sigma(u)$...
La plus simple correspond aux fluides dits Newtoniens et pour lesquels on prend $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - p\, Id$

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \mathrm{div} \left(\mu \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) - p\, Id \right) &= f \\ \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \mu \Delta u - \mu \nabla \mathrm{div}(u) + \nabla p &= f \end{aligned}$$

mais div(u)=0...

Equations de Navier-Stokes

Il reste à donner une loi de comportement $\sigma = \sigma(u)$...
La plus simple correspond aux fluides dits Newtoniens et pour lesquels on prend $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - p\, Id$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \mathrm{div} \left(\mu \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) - p\, Id \right) = f$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \mu \Delta u - \mu \nabla \mathrm{div}(u) + \nabla p = f$$

mais div(u)=0...

Equation de Stokes

Lorsque les vitesses de l'écoulement sont faibles ou que le fluide est très visqueux, le premier terme est négligeable. On parle alors de l'équation de Stokes

Equation de Stokes incompressible

$$-\mu\Delta u + \nabla p = f$$
$$\text{div } u = 0$$

Remarque: Ce n'est rien d'autre que l'équilibre des forces extérieures avec les forces de contraintes

$$\text{div } \sigma + f = 0$$
$$\text{div } u = 0$$

Equation de Stokes

Lorsque les vitesses de l'écoulement sont faibles ou que le fluide est très visqueux, le premier terme est négligeable. On parle alors de l'équation de Stokes

Equation de Stokes incompressible

$$-\mu\Delta u + \nabla p = f$$
$$\text{div } u = 0$$

Remarque: Ce n'est rien d'autre que l'équilibre des forces extérieures avec les forces de contraintes

$$\text{div } \sigma + f = 0$$
$$\text{div } u = 0$$

Formulation variationnelle

On rajoute la condition de non glissement (Dirichlet)

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

autrement dit on cherche des solutions dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$

Soit $v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, on multiplie par v la première équation et on intègre par parties...

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega p \operatorname{div} v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Pour prendre en compte l'incompressibilité, on pose

$$V = \left\{ v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \ \operatorname{div} v = 0 \right\} .$$

et la F. V. devient

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Formulation variationnelle

On rajoute la condition de non glissement (Dirichlet)

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

autrement dit on cherche des solutions dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$

Soit $v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, on multiplie par v la première équation et on intègre par parties...

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega p \operatorname{div} v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Pour prendre en compte l'incompressibilité, on pose

$$V = \left\{ v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \ \operatorname{div} v = 0 \right\}.$$

et la F. V. devient

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Formulation variationnelle

On rajoute la condition de non glissement (Dirichlet)

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

autrement dit on cherche des solutions dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$

Soit $v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, on multiplie par v la première équation et on intègre par parties...

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega p \,\mathrm{div}\, v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Pour prendre en compte l'incompressibilité, on pose

$$V = \left\{ v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N),\ \mathrm{div}\, v = 0 \right\}.$$

et la F. V. devient

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Equation de Stokes

- V est un espace de Hilbert (sous espace fermé de H_0^1)
- Le théorème de Lax-Milgram s'applique

Il reste à vérifier que l'on a bien résolu le problème. On suppose $u \in H^2$, alors on a

$$\int_\Omega (\mu \Delta u + f) \cdot v \, dx = 0, \ \forall v \in V .$$

Ce qui ne signifie pas $\mu \Delta u + f = 0$.

Equation de Stokes

- V est un espace de Hilbert (sous espace fermé de H_0^1)
- Le théorème de Lax-Milgram s'applique

Il reste à vérifier que l'on a bien résolu le problème. On suppose $u \in H^2$, alors on a

$$\int_\Omega (\mu \Delta u + f) \cdot v \, dx = 0, \ \forall v \in V.$$

Ce qui ne signifie pas $\mu \Delta u + f = 0$.

Equation de Stokes

- V est un espace de Hilbert (sous espace fermé de H_0^1)
- Le théorème de Lax-Milgram s'applique

Il reste à vérifier que l'on a bien résolu le problème. On suppose $u \in H^2$, alors on a

$$\int_\Omega (\mu \Delta u + f) \cdot v \, dx = 0, \ \forall v \in V\,.$$

Ce qui ne signifie pas $\mu \Delta u + f = 0$.

Théorème de de Rham

Lemme

Ω ouvert borné régulier connexe, L une forme linéaire sur $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. L s'annule sur V ssi $\exists p \in L^2/\mathbb{R}$ unique tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \;\; L(v) = \int_\Omega p \operatorname{div} v \, dx$$

Ici, on pose

$$L(v) = \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \cdot v \, dx \, ,$$

on arrive à

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \cdot v \, dx = \int_\Omega p \text{ div } v \, dx \, .$$

Théorème de de Rham

Lemme

Ω ouvert borné régulier connexe, L une forme linéaire sur $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. L s'annule sur V ssi $\exists p \in L^2/\mathbb{R}$ unique tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N),\ L(v) = \int_\Omega p \,\mathrm{div} v \, dx$$

Ici, on pose

$$L(v) = \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \cdot v \, dx \,,$$

on arrive à

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \cdot v \, dx = \int_\Omega p \,\mathrm{div}\, v \, dx \,.$$

Conclusion

On conclut comme d'habitude

- Soit on suppose que $u \in H^2$ et $p \in H^1$ et on intègre par parties
- Soit on pose $\sigma = \mu \nabla u - pId$ et la formulation variationnelle dit que σ a une divergence faible dans L^2 et on a donc p.p

$$f = -\mathrm{div}\,\sigma = -\mu \Delta u + \nabla p\,.$$

- Par ailleurs, div $u \in L^2$ et $u \in V$, donc div $u = 0$ p.p.

Conclusion

On conclut comme d'habitude

- Soit on suppose que $u \in H^2$ et $p \in H^1$ et on intègre par parties
- Soit on pose $\sigma = \mu \nabla u - pId$ et la formulation variationnelle dit que σ a une divergence faible dans L^2 et on a donc p.p

$$f = -\text{div}\,\sigma = -\mu \Delta u + \nabla p\,.$$

- Par ailleurs, div $u \in L^2$ et $u \in V$, donc div $u = 0$ p.p.

Conclusion

On conclut comme d'habitude

- Soit on suppose que $u \in H^2$ et $p \in H^1$ et on intègre par parties
- Soit on pose $\sigma = \mu \nabla u - pId$ et la formulation variationnelle dit que σ a une divergence faible dans L^2 et on a donc p.p

$$f = -\mathrm{div}\, \sigma = -\mu \Delta u + \nabla p\,.$$

- Par ailleurs, div $u \in L^2$ et $u \in V$, donc div $u = 0$ p.p.

Conditions de Neumann pour Stokes

Question: quelle est la condition de Neumann adaptée à Stokes?

Réponse: Il y en a deux possibles!

$$-\mathrm{div}\,\sigma = f\,,$$

La condition de Neumann naturelle est

$$\sigma n = g\,,$$

- Soit $\sigma = \mu \nabla u - p\,Id$ et la condition de Neumann est

$$\mu \frac{\partial u}{\partial n} - p\,n = g\,,$$

- Soit $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - p\,Id$ et la condition de Neumann est

$$\mu(\nabla u + (\nabla u)^T)n - p\,n = g\,,$$

Conditions de Neumann pour Stokes

Question: quelle est la condition de Neumann adaptée à Stokes?

Réponse: Il y en a deux possibles!

$$-\text{div}\,\sigma = f\,,$$

La condition de Neumann naturelle est

$$\sigma n = g\,,$$

- Soit $\sigma = \mu\nabla u - p\,Id$ et la condition de Neumann est

$$\mu\frac{\partial u}{\partial n} - p\,n = g\,,$$

- Soit $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - p\,Id$ et la condition de Neumann est

$$\mu(\nabla u + (\nabla u)^T)n - p\,n = g\,,$$

Conditions de Neumann pour Stokes

Question: quelle est la condition de Neumann adaptée à Stokes?

Réponse: Il y en a deux possibles!

$$-\text{div } \sigma = f\,,$$

La condition de Neumann naturelle est

$$\sigma n = g\,,$$

- Soit $\sigma = \mu\nabla u - p\, Id$ et la condition de Neumann est

$$\mu\frac{\partial u}{\partial n} - p\, n = g\,,$$

- Soit $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - p\, Id$ et la condition de Neumann est

$$\mu(\nabla u + (\nabla u)^T)n - p\, n = g\,,$$

Conditions de Neumann pour Stokes

Question: quelle est la condition de Neumann adaptée à Stokes?

Réponse: Il y en a deux possibles!

$$-\text{div}\,\sigma = f\,,$$

La condition de Neumann naturelle est

$$\sigma n = g\,,$$

- Soit $\sigma = \mu\nabla u - p\,Id$ et la condition de Neumann est

$$\mu\frac{\partial u}{\partial n} - p\,n = g\,,$$

- Soit $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - p\,Id$ et la condition de Neumann est

$$\mu(\nabla u + (\nabla u)^T)n - p\,n = g\,,$$

Formulation variationnelle pour Stokes

Problème de Stokes

$$-\mathrm{div}\,\sigma = f$$
$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_D$$
$$\sigma n = g \text{ sur } \Gamma_N$$

avec $\sigma = \mu \nabla u - p\, Id$ OU $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - p\, Id$

- $V = \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N),\ \mathrm{div} v = 0,\ \gamma_0(v) = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$
- Trouver $u \in V$ tel que $\forall v \in V$

$$\int_\Omega \sigma : \nabla v = \int_\Omega f \cdot v\, dx$$

Conclusion

- Principe variationnel puissant
  - Nombreux modèles : thermique, fluide, solides, couplage fluide-structure, etc.
  - Nombreuses conditions aux limites
- ...et restreint.
  - Les équations résolues doivent être linéaires (pas d'élasticité non linéaire, pas Navier-Stokes, lla plupart des modèles sont non-linéaires...)
  - La forme bilinéaire doit être coercive

Conclusion

- Principe variationnel puissant
  - Nombreux modèles : thermique, fluide, solides, couplage fluide-structure, etc.
  - Nombreuses conditions aux limites
- ...et restreint.
  - Les équations résolues doivent être linéaires (pas d'élasticité non linéaire, pas Navier-Stokes, lla plupart des modèles sont non-linéaires...)
  - La forme bilinéaire doit être coercive