Eléments finis en dimension $N \geq 2$

François Alouges

1er Avril 2014

Problème modèle

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Il existe une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$.
Dans tout ce qui suit nous supposerons que le domaine Ω est **polyèdrique** (polygonal si $N = 2$), afin que nous puissions le mailler exactement.

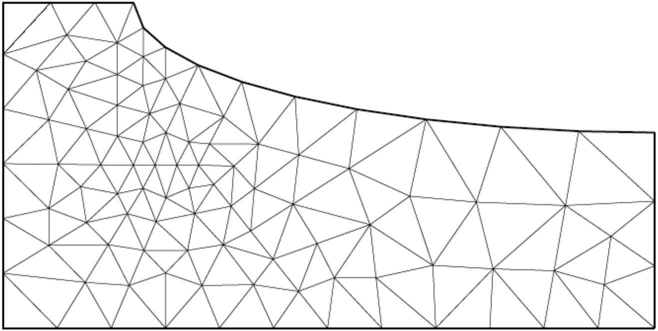
Rappels

- Faire une formulation variationnelle du problème (V Hilbert, Lax-Milgram, etc.)
- $V_h \subset V$ de dimension finie
- Poser la même formulation variationnelle dans V_h
- C'est un système linéaire!
- Estimation d'erreur

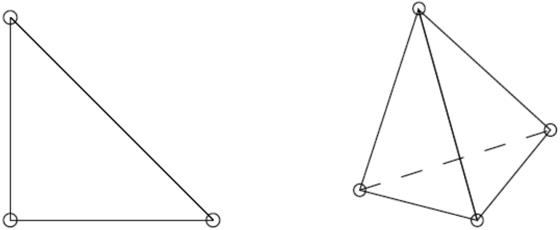
$$\begin{aligned} ||u-u_h||_V &\leq C \inf_{v_h \in V_h} ||u-v_h||_V \quad \text{(Lemme de Céa)} \\ &\leq C||u-r_h(u)||_V \quad (r_h = \text{interpolé dans } V_h) \\ &\leq C\,h\,||u''||_{L^2} \end{aligned}$$

Eléments finis triangulaires

Exemple de maillage en dimension $N = 2$:



Mailles



Les mailles sont des N-simplexes (triangles en 2-D, tétraèdres en 3-D).

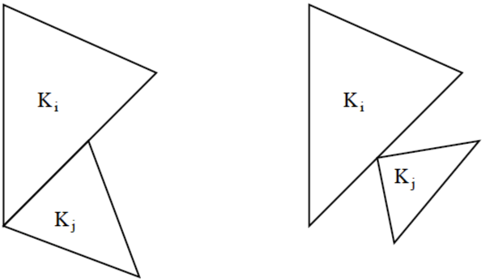
Définition

Soit Ω un ouvert connexe polyèdrique de $\mathbb{R}^N$. Un maillage ou une triangulation de $\overline{\Omega}$ est un ensemble $\mathcal{T}_h$ de N-simplexes (non dégénérés) $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui vérifient

1. $K_i \subset \overline{\Omega}$ et $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^{n} K_i$,
2. en dimension $N = 2$, l'intersection $K_i \cap K_j$ de deux triangles distincts est soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit à une arête commune **entière** (en dimension $N = 3$, l'intersection est soit vide, soit un sommet commun, soit une face commune entière, soit une arête commune entière).

Les sommets (ou noeuds) du maillage $\mathcal{T}_h$ sont les sommets des N-simplexes K_i qui le composent. Par convention, le paramètre h désigne le maximum des diamètres des N-simplexes K_i.

Situation interdite



Maillage non-conforme

- $N = 2, k = 1,$

$$\mathbb{P}_1 = vect\{1, x, y\}, \text{ dimension = 3}$$

- $N = 2, k = 2,$

$$\mathbb{P}_2 = vect\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}, \text{ dimension = 6}$$

- $N = 2, k = 3,$

$$\mathbb{P}_3 = vect\{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\}, \text{ dimension = 10}$$

- $N = 3, k = 1,$

$$\mathbb{P}_1 = vect\{1, x, y, z\}, \text{ dimension = 4}$$

- $N = 3, k = 2,$

$$\mathbb{P}_2 = vect\{1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2\}, \text{ dimension = 10}$$

- $N = 2, k = 1,$

$$\mathbb{P}_1 = vect\{1, x, y\}, \text{ dimension = 3}$$

- $N = 2, k = 2,$

$$\mathbb{P}_2 = vect\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}, \text{ dimension = 6}$$

- $N = 2, k = 3,$

$$\mathbb{P}_3 = vect\{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\}, \text{ dimension = 10}$$

- $N = 3, k = 1,$

$$\mathbb{P}_1 = vect\{1, x, y, z\}, \text{ dimension = 4}$$

- $N = 3, k = 2,$

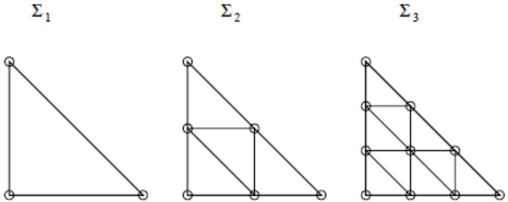
$$\mathbb{P}_2 = vect\{1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2\}, \text{ dimension = 10}$$

On appelle **treillis d'ordre** k l'ensemble (fini)

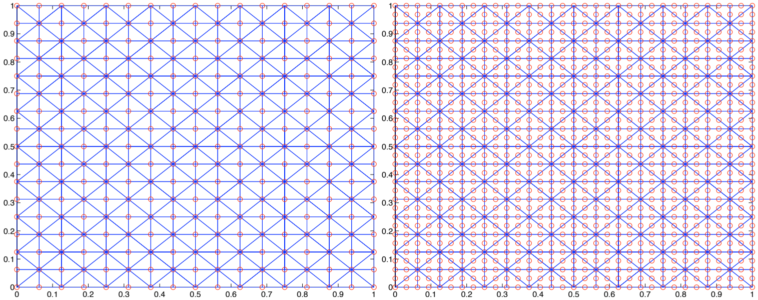
$$\Sigma_k = \left\{ x \in K \text{ tel que } \lambda_j(x) \in \{0, \frac{1}{k}, ..., \frac{k-1}{k}, 1\} \text{ pour } 1 \le j \le N \right\}$$

dont les points sont notés $(\sigma_j)_{1 \le j \le n_k}$.
Pour $k = 1$ il s'agit de l'ensemble des sommets de K, et pour $k = 2$ des sommets et des points milieux des arêtes reliant deux sommets.

Dimension $N = 2$

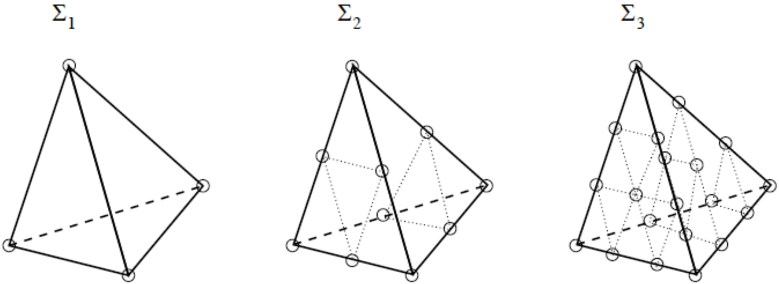


Exemples de maillages



Maillages P1 et P2

Dimension $N = 3$



Unisolvance de Σ_k pour $\mathbb{P}_k$

Lemme Tout polynôme de $\mathbb{P}_k$ est déterminé de manière unique par ses valeurs aux points $(\sigma_j)_{1\leq j\leq n_k}$ du treillis Σ_k . Autrement dit, il existe une base $(\psi_j)_{1\leq j\leq n_k}$ de $\mathbb{P}_k$ telle que

$$\psi_j(\sigma_i) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i,j \leq n_k.$$

Continuité à l'interface entre 2 mailles

Lemme Soit K et K' deux N-simplexes ayant une face commune $\Gamma = \partial K \cap \partial K'$. Alors, leur treillis d'ordre $k \geq 1$, Σ_k et Σ'_k, coïncident sur cette face Γ. De plus, étant donné p_K et $p_{K'}$ deux polynômes de $\mathbb{P}_k$, la fonction v définie par

$$v(x) = \begin{cases} p_K(x) & \text{si } x \in K \\ p_{K'}(x) & \text{si } x \in K' \end{cases}$$

est continue sur $K \cup K'$, si et seulement si p_K et $p_{K'}$ ont des valeurs qui coïncident aux points du treillis sur la face commune Γ.

Preuve. Par construction les treillis Σ_k et Σ'_k coïncident sur leur face commune Γ. Si les polynômes p_K et $p_{K'}$ coïncident aux points de $\Sigma_k \cap \Gamma$, alors par application du Lemme précédent ils sont égaux sur Γ, ce qui prouve la continuité de v.

Définition 6.3.5. Etant donné un maillage $\mathcal{T}_h$ d'un ouvert Ω, la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_k$, ou éléments finis triangulaires de Lagrange d'ordre k, associée à ce maillage, est définie par l'espace discret

$$V_h = \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v\Big|_{K_i} \in \mathbb{P}_k \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

On appelle **noeuds des degrés de liberté** l'ensemble des points (distincts) $(\hat{a}_i)_{1\leq i\leq n_{dl}}$ des treillis d'ordre k de chacun des N-simplexes $K_i \in \mathcal{T}_h$.
On appelle **degrés de liberté** d'une fonction $v \in V_h$ l'ensemble des valeurs de v en ces noeuds $(\hat{a}_i)_{1\leq i\leq n_{dl}}$.
On définit aussi le sous-espace V_{0h} par

$$V_{0h} = \{ v \in V_h \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

Proposition 6.3.7 L'espace V_h est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont la dimension est le nombre de degrés de liberté, et il existe une base $(\phi_i)_{1\leq i\leq n_{dl}}$ de V_h définie par

$$\phi_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n_{dl},$$

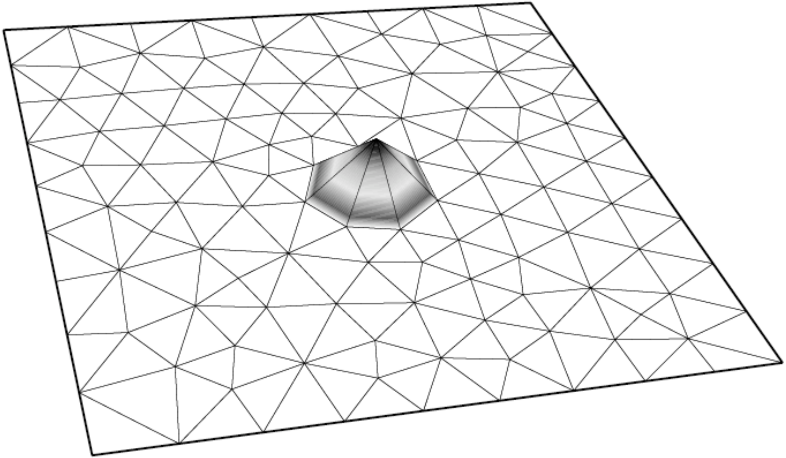
telle que

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} v(\hat{a}_i)\phi_i(x).$$

Preuve: par simple combinaison des Lemmes précédents.

Remarque. L'appellation "éléments finis de Lagrange" veut dire que toute fonction de l'espace V_h est caractérisée pas ses **valeurs ponctuelles** (ses degrés de liberté) aux noeuds $(\hat{a}_j)$. On parle d'éléments finis de Hermite si les degrés de liberté sont les valeurs de la fonction et de ses dérivées partielles d'ordre 1.

Fonction de base $\mathbb{P}_1$ en dimension $N = 2$.



Résolution pratique

On résout le problème modèle par la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_k$.
La formulation variationnelle de l'approximation interne est

$$\text{trouver } u_h \in V_{0h} \text{ tel que } \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_\Omega f v_h \, dx \quad \forall\, v_h \in V_{0h}.$$

On décompose u_h sur la base des $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n_{dl}}$ et on prend $v_h = \phi_i$ ce qui donne

$$\sum_{j=1}^{n_{dl}} u_h(\hat{a}_j) \int_\Omega \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx = \int_\Omega f \phi_i \, dx.$$

Matrice de rigidité

Vecteur inconnu: $U_h = \left(u_h(\hat{a}_j)\right)_{1 \le j \le n_{dl}}$

Second membre: $b_h = \left(\int_\Omega f \phi_i \, dx\right)_{1 \le i \le n_{dl}}$

Matrice de rigidité: $\mathcal{K}_h = \left(\int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i \, dx\right)_{1 \le i,j \le n_{dl}}$

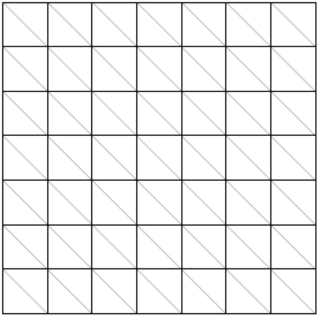
La formulation variationnelle est équivalente au système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h.$$

En général, l'intersection des supports de ϕ_j et ϕ_i est vide et la plupart des coefficients de $\mathcal{K}_h$ sont nuls. La matrice de rigidité $\mathcal{K}_h$ est donc creuse.

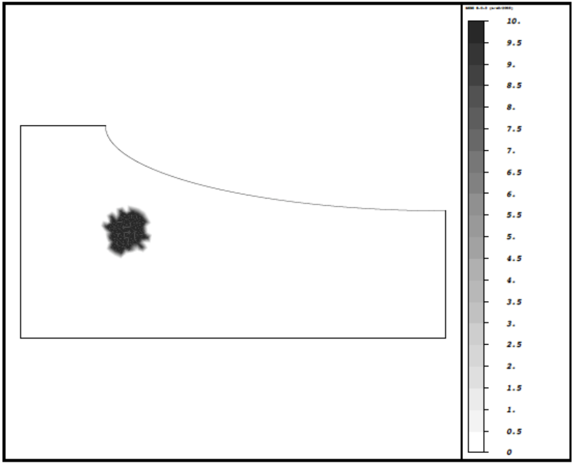
Taille des matrices

La matrice de rigidité $\mathcal{K}_h$ est creuse mais elle est de grande taille!
Exemple: maillage régulier $n \times n$ en dimension $N = 2$

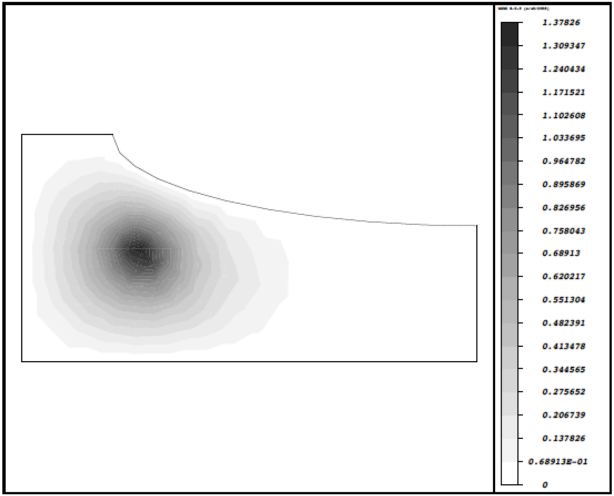


Matrice $\mathcal{K}_h$ d'ordre n^2 (ou bien n^3 en dimension $N = 3$).
Il faut optimiser la résolution du système linéaire !

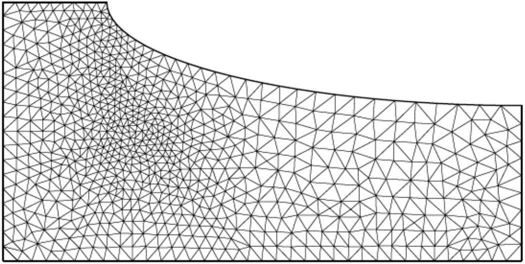
Terme source f



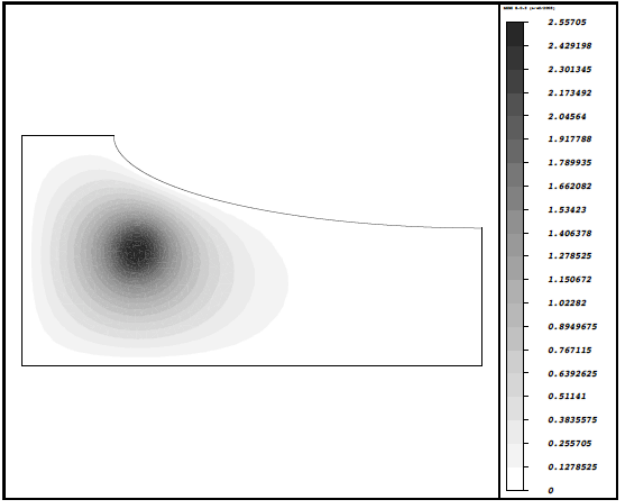
Solution approchée u_h pour le maillage “grossier”



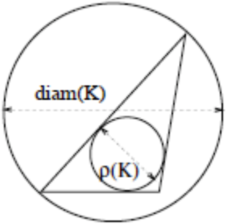
Maillage triangulaire plus fin que le précédent



Solution approchée u_h pour le maillage “fin”



Diamètre $h_K = \mathrm{diam}(K)$ et rondeur $\rho(K)$ d'un triangle K



Définition 6.3.11 Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages de Ω. On dit qu'il s'agit d'une suite de maillages réguliers si

1. la suite $h = \max_{K_i \in \mathcal{T}_h} \mathrm{diam}(K_i)$ tend vers 0,
2. il existe une constante C telle que, pour tout $h > 0$ et tout $K \in \mathcal{T}_h$,

$$1 \leq \frac{\mathrm{diam}(K)}{\rho(K)} \leq C.$$

Théorème 6.3.13 Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages réguliers de Ω. Soit $u \in H^1_0(\Omega)$, la solution exacte, et $u_h \in V_{0h}$, la solution approchée par éléments finis $\mathbb{P}_k$.
La méthode des éléments finis $\mathbb{P}_k$ converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

De plus, si $u \in H^{k+1}(\Omega)$ et si $k + 1 > N/2$, alors on a l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

Remarque. Le Théorème 6.3.13 s'applique à toute méthode d'éléments finis de type Lagrange (aussi pour les éléments finis rectangulaires).
Pour $N = 2$ ou $N = 3$, la condition $k + 1 > N/2$ est satisfaite dès que $k \geq 1$.

Démonstration du Théorème 6.3.13: idée principale
Lemme 6.1.2 de Céa + interpolation ci-dessous.

Définition d'un opérateur d'interpolation r_h**.** Pour toute fonction continue v on définit son interpolée

$$r_h v(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} v(\hat{a}_i)\phi_i(x)$$

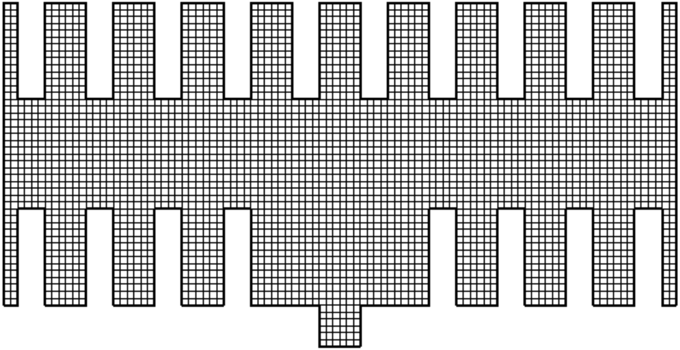
avec $(\hat{a}_i)_{1\le i\le n_{dl}}$ les noeuds des degrés de liberté et $(\phi_i)_{1\le i\le n_{dl}}$ la base de V_{0h} de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_k$.

Proposition 6.3.16 (admise) Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages réguliers de Ω. On suppose que $k+1 > N/2$. Alors, pour tout $v \in H^{k+1}(\Omega)$ l'interpolée $r_h v$ est bien définie, et il existe une constante C, indépendante de h et de v, telle que

$$\|v - r_h v\|_{H^1(\Omega)} \le C h^k \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

Eléments finis rectangulaires

Exemple de maillage rectangulaire en dimension $N = 2$



Définition 6.3.21

Soit Ω un ouvert connexe polyèdrique de $\mathbb{R}^N$. Un maillage rectangulaire de $\overline{\Omega}$ est un ensemble $\mathcal{T}_h$ de N-rectangles (non dégénérés) $(K_i)_{1\leq i\leq n}$ qui vérifient

1. $K_i \subset \overline{\Omega}$ et $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^n K_i$,
2. en dimension $N = 2$, l'intersection $K_i \cap K_j$ de deux rectangles distincts est soit vide, soit un sommet commun, soit une arête commune entière (en dimension $N = 3$ il faut ajouter soit une face commune entière).

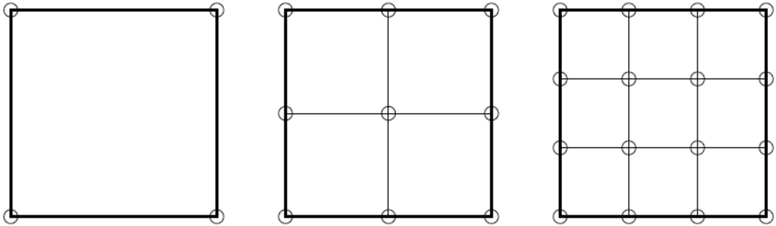
Les sommets (ou noeuds) du maillage $\mathcal{T}_h$ sont les sommets des N-rectangles K_i qui le composent. Par convention, le paramètre h désigne le maximum des diamètres des N-rectangles K_i.

Treillis

Pour tout entier $k \geq 1$ on définit le treillis d'ordre k du N-rectangle K comme l'ensemble (fini)

$$\Sigma_k = \left\{ x \in K \text{ tel que } \frac{x_j - l_j}{L_j - l_j} \in \{0, \frac{1}{k}, ..., \frac{k-1}{k}, 1\} \text{ pour } 1 \leq j \leq N \right\}.$$

Pour $k = 1$ il s'agit de l'ensemble des sommets de K.



- $N=2, k=1$,

$$\mathbb{Q}_1 = vect\{1, x, y, xy\}, \text{ dimension = 4}$$

- $N=2, k=2$,

$$\mathbb{Q}_2 = vect\{1, x, y, xy, x^2, x^2y, xy^2, y^2, x^2y^2\}, \text{ dimension = 9}$$

- $N=2, k=3$,

$$\mathbb{Q}_3 = vect\{1, x, y, xy, x^2, x^2y, xy^2, y^2, x^2y^2, x^3, x^3y,$$
$$x^3y^2, xy^3, x^2y^3, x^3y^3, y^3\}, \text{ dimension = 16}$$

idem en $N=3$...

Lemme 6.3.22 Soit K un N-rectangle. Soit un entier $k \geq 1$. Alors, tout polynôme de $\mathbb{Q}_k$ est déterminé de manière unique par ses valeurs aux points du treillis Σ_k d'ordre k.

Définition 6.3.25. Etant donné un maillage rectangulaire $\mathcal{T}_h$ d'un ouvert Ω, la méthode des éléments finis $\mathbb{Q}_k$ est définie par l'espace discret

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v\Big|_{K_i} \in \mathbb{Q}_k \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

On appelle noeuds des **degrés de liberté** l'ensemble des points $(\hat{a}_i)_{1\leq i\leq n_{dl}}$ des treillis d'ordre k de chacun des N-rectangles $K_i \in \mathcal{T}_h$.

Proposition 6.3.26 L'espace V_h est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont la dimension est le nombre de degrés de liberté n_{dl}. De plus, il existe une base de V_h $(\phi_i)_{1\leq i\leq n_{dl}}$ définie par

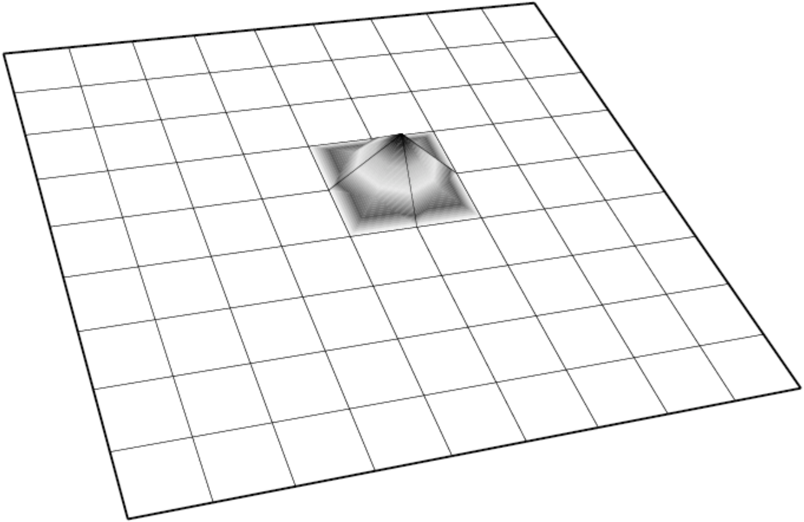
$$\phi_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i,j \leq n_{dl},$$

telle que

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} v(\hat{a}_i)\phi_i(x).$$

Remarque. Il s'agit encore d'éléments finis de Lagrange.
Même résultat de convergence que pour les éléments finis triangulaires.

Fonction de base $\mathbb{Q}_1$ en dimension $N = 2$.



Problème: résoudre le système linéaire dans $\mathbb{R}^n$

$$Ax = b \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et } n \text{ grand !}$$

On veut des algorithmes numériques **efficaces et stables !**

- Efficacité = minimiser le temps de calcul et la place en mémoire.
- Stabilité = ne pas amplifier les erreurs d'arrondi.

Deux types de méthodes:

- Méthodes directes (solution exacte en un nombre fini d'opérations).
- Méthodes itératives (suite de solutions approchées).

Définition 13.1.1 norme matricielle subordonnée
$\|A\| = \max_{x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
Définition 13.1.9 On appelle conditionnement d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, relatif à une norme matricielle subordonnée, la valeur définie par

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|$$

Proposition 13.1.10 Soit A une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n, b \neq 0$.

1. Si $Ax = b$ et $A(x+\delta x) = b + \delta b$, alors on a
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$
2. Si $Ax = b$ et $(A+\delta A)(x+\delta x) = b$, alors on a
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mais

$$b = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mais

$$b = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}, \; {\color{red} x = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -11 \end{pmatrix}}$$

Démonstration.

1. $A\delta x = \delta b$ donc $\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\|$.
2. $A\delta x = -\delta A(x + \delta x)$, donc $\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|x + \delta x\|$.

Exercice.
Si A est symétrique réelle définie positive, on trouve

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_1(A)},$$

où $0 < \lambda_1(A) \leq ... \leq \lambda_n(A)$ sont les valeurs propres de A.

Exemple

Pour les éléments finis $\mathbb{P}_1$ appliqués au Laplacien, la matrice de rigidité est

$$\mathcal{K}_h = h^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

dont le conditionnement est $\mathrm{cond}_2(\mathcal{K}_h) \approx \dfrac{4}{\pi^2 h^2}$ pour $h \approx 0$.

La matrice de rigidité $\mathcal{K}_h$ est mal conditionnée.

Il faut faire attention à la stabilité dans la résolution des systèmes linéaires issus de la méthode des éléments finis.

13.1.3 Méthodes directes

Matrice réelle inversible A d'ordre n.

- Elimination de Gauss.
- Factorisation LU.
- Factorisation de Cholesky pour les matrices symétriques.

Caractéristiques:

- Mémoire requise: de l'ordre de n^2 réels.
- Temps nécessaire: de l'ordre de n^3 opérations arithmétiques.

Avantage: simple, robuste, précis.
Inconvénient: trop chères, voire impossibles, si n est grand (ce qui est systématique en 3-D).

Factorisation LU

Il s'agit de la méthode d'élimination de Gauss sans pivot.

Proposition 13.1.15 Soit une matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ d'ordre n. Sous une hypothèse technique (vérifiée si A est définie positive), il existe un unique couple de matrices triangulaires (L, U) tel que $A = LU$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \dots & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Intérêt: il est facile de résoudre des systèmes triangulaires.

Calcul pratique de la factorisation LU

$$A = LU \Rightarrow a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} l_{i,k} u_{k,j} = \sum_{k=1}^{min(i,j)} l_{i,k} u_{k,j}.$$

Au fur et à mesure qu'on lit les colonnes de A, on en déduit les coefficients des colonnes de L et de U.

Par récurrence: on a déjà calculé les colonnes 1 à $j-1$ de L et de U.

Colonne j de A: on calcule la j-ème colonne de L et de U

$$
\begin{array}{lcl}
a_{1,j} = l_{1,1} u_{1,j} & \Rightarrow & u_{1,j} = a_{1,j} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j,j} = l_{j,1} u_{1,j} + \cdots + l_{j,j} u_{j,j} & \Rightarrow & u_{j,j} = a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k} u_{k,j} \\
a_{j+1,j} = l_{j+1,1} u_{1,j} + \cdots + l_{j+1,j} u_{j,j} & \Rightarrow & l_{j+1,j} = \frac{a_{j+1,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j+1,k} u_{k,j}}{u_{jj}} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n,j} = l_{n,1} u_{1,j} + \cdots + l_{n,j} u_{j,j} & \Rightarrow & l_{n,j} = \frac{a_{n,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{n,k} u_{k,j}}{u_{jj}}
\end{array}
$$

Compte d'opérations

Pour n grand on ne compte que les multiplications ou divisions.

- factorisation LU : le nombre d'opérations N_{op} est

$$N_{op} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (1 + \sum_{k=j+1}^{n} 1),$$

  qui, au premier ordre, donne $N_{op} \approx n^3/3$.

- substitution (ou remontée-descente sur les deux systèmes triangulaires) : le nombre d'opérations N_{op} est

$$N_{op} = 2\sum_{j=1}^{n} j,$$

  qui, au premier ordre, donne $N_{op} \approx n^2$.

Proposition 13.1.19 Soit A une matrice symétrique réelle, définie positive. Il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure, telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs, et qui vérifie

$$A = BB^*.$$

$$A = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & \dots & b_{n,1} \\ 0 & b_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Méthode du gradient conjugué

Proposition 13.1.39 Soit A une matrice symétrique définie positive, et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit (x_k, r_k, p_k) trois suites définies par les relations de récurrence

$$p_0 = r_0 = b - Ax_0, \text{ et pour } 0 \leq k \begin{cases} x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \\ r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k \\ p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k \end{cases}$$

avec

$$\alpha_k = \frac{\|r_k\|^2}{Ap_k \cdot p_k} \text{ et } \beta_k = \frac{\|r_{k+1}\|^2}{\|r_k\|^2}.$$

Alors, la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ converge en moins de n itérations vers la solution exacte de $Ax = b$

Méthode la plus efficace (avec un préconditionnement pour converger plus vite).