

# Introduction à la théorie du micromagnétisme

François Alouges

2 juin 2009



Ce livre contient les notes d'un cours de Master 2 donné à l'École Polytechnique pendant l'année 2008-2009. Il s'adresse à un public d'étudiants en mathématiques appliquées et a pour ambition de traiter des méthodes mathématiques de base pour l'analyse des modèles utilisés pour décrire les matériaux ferromagnétiques. Un grand soin a été porté pour décrire la physique des problèmes sous-jacents afin que le lecteur comprenne les principes physiques utilisés pour la modélisation. Nous essayons donc de faire un aller-retour permanent entre les description et motivations des modèles et leur analyse mathématique ou numérique. Les exercices donnés en fin de chapitre permettent de clarifier des points qui auraient pu rester obscurs dans le texte principal.

François Alouges, Ecole Polytechnique 2008.



# Table des matières

<b>Contents</b>	<b>2</b>
<b>1 Le micromagnétisme</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 Le modèle du micromagnétisme . . . . .	3
1.2.1 L'énergie extérieure . . . . .	6
1.2.2 L'énergie d'échange . . . . .	6
1.2.3 L'énergie démagnétisante . . . . .	8
1.2.4 L'énergie d'anisotropie . . . . .	9
1.3 Longueurs caractéristiques . . . . .	9
1.4 Mise sans dimension . . . . .	10
<b>2 Le champ démagnétisant</b>	<b>13</b>
2.1 Les principales propriétés . . . . .	13
2.2 Expression du champ démagnétisant en Fourier . . . . .	16
2.3 Les configurations de Landau . . . . .	17
2.4 Matériaux durs-matériaux doux . . . . .	17
2.5 Récapitulatif . . . . .	17
2.6 Exercices . . . . .	19
<b>3 Le problème de minimisation</b>	<b>23</b>
3.1 Existence de solutions . . . . .	23
3.2 Equation d'Euler-Lagrange . . . . .	25
3.3 Convergence de points stationnaires . . . . .	29
3.4 Champ effectif . . . . .	29
3.5 Lien avec les applications harmoniques à valeurs dans la sphère	30
3.6 Récapitulatif . . . . .	30
3.7 Exercices . . . . .	32
<b>4 Particules mono-domaines</b>	<b>35</b>
4.1 Cadre de la $\Gamma$ -convergence . . . . .	35

4.2	Application au problème du micromagnétisme dans les particules monodomaines . . . . .	37
4.3	Courbes d'hysteresis et astroïde de Stoner-Wohlfahrt . . . . .	41
4.3.1	Un premier exemple instructif . . . . .	41
4.3.2	L'astroïde de Stoner-Wohlfahrt . . . . .	44
4.4	$\Gamma$ -convergence et minima locaux . . . . .	45
4.5	Exercices . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Parois et domaines dans les films minces</b>	<b>49</b>
5.1	Heuristique . . . . .	49
5.1.1	Les films minces . . . . .	50
5.1.2	La construction de Van den Berg . . . . .	51
5.2	Les parois de Bloch . . . . .	54
5.2.1	Les parois à $180^\circ$ . . . . .	54
5.2.2	Les parois obliques . . . . .	54
5.3	Les parois de Néel . . . . .	54
5.4	Exercices . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Equation de Landau-Lifschitz</b>	<b>57</b>
6.1	Précession d'un moment magnétique . . . . .	57
6.2	L'équation de Landau-Lifschitz . . . . .	57
6.3	Existence de solutions faibles . . . . .	57
6.4	Remarques . . . . .	57
6.5	Exercices . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Méthodes numériques pour le calcul du champ démagnétisant</b>	<b>59</b>
7.1	Le cas des maillages réguliers . . . . .	59
7.2	Les méthodes intégrales . . . . .	59
7.3	Alternatives par maillages de type exponentiel . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Algorithmes de minimisation pour le calcul de configurations stables</b>	<b>61</b>
<b>9</b>	<b>Discrétisation par éléments finis de l'équation de Landau-Lifschitz</b>	<b>63</b>
<b>10</b>	<b>Quelques problèmes actuels en micromagnétisme mathématique et numérique</b>	<b>65</b>
10.1	Les films minces . . . . .	65
10.2	Les particules vortex . . . . .	65
10.3	Modélisation des MRAM . . . . .	65

*TABLE DES MATIÈRES*

v

**11 Conclusion**

**67**

**Bibliographie**

**69**

**Index**

**70**





# Table des figures

1.1	Historique de l'évolution d'un vortex à l'intérieur d'une particule circulaire sous l'action d'un champ extérieur croissant (première ligne) et décroissant suivant que l'on dépasse (3ème ligne) ou non (2ème ligne) un champ critique expulsant le vortex du matériau. . . . .	2
1.2	Domaines dans un matériau à anisotropie cubique. . . . .	3
1.3	Quelques configurations en domaines dans des particules rectangulaires, ellipsoïdales ou lenticulaires. Ces configurations sont très bien décrites par la construction de Van den Berg. . .	4
1.4	Trois configurations en domaines dans une même particule circulaire. . . . .	5
1.5	Configurations en domaines ou en labyrinthe dans des matériaux mou et dur respectivement. . . . .	6
1.6	Parois de type "cross-tie" difficiles à expliquer avec la théorie des domaines. . . . .	7
2.1	Films ferromagnétiques minces à anisotropie verticale dur et doux. . . . .	17
4.1	Courbe d'hysteresis du problème (4.12). . . . .	43
5.1	Un film mince de matériau ferromagnétique. . . . .	50
5.2	Construction de l'aimantation à partir des caractéristiques issues du bord. . . . .	52
5.3	Deux caractéristiques se coupent. L'aimantation n'est pas définie. . . . .	52
5.4	Deux caractéristiques se coupent en délimitant un domaine $\Lambda$ . . . . .	52
5.5	Construction de Van den Berg de la configuration de Landau. . . . .	53
5.6	Construction de Van den Berg pour un rectangle aux coins arrondis. . . . .	53
5.7	Un autre domaine plus complexe. . . . .	54

5.8	Configuration sur un disque obtenue en collant deux constructions de Van den Berg. . . . .	54
-----	--	----

# Liste des tableaux

1.1	Variables et unités. . . . .	5
1.2	Variables et unités des équations de Maxwell. . . . .	11



# Chapitre 1

## Le micromagnétisme

### 1.1 Introduction

Les matériaux ferromagnétiques sont devenus d'usage courant. On les retrouve bien entendu dans les appareils servant au stockage de l'information numérique comme par exemple les bandes magnétiques ou les disques durs, mais (et c'est moins connu) aussi dans des puces magnétiques dites MRAM (pour "Magnetic Random Access Memory"). Ces puces ont de nombreux avantages par rapport à leur homologues en silicium, en particulier celui de ne nécessiter de l'énergie que pour changer les bits de valeur et non pas pour maintenir le stockage à proprement parler. Elles ne nécessitent pas non plus de rafraîchissement puisque l'information est stockée grâce à l'aimantation d'un aimant permanent. Elles peuvent également, maintenir sans ressource énergétiques de l'information pendant l'extinction de la machine permettant ainsi un redémarrage du système quasi-instantané. Enfin, la lecture et l'écriture sur ce type de mémoire pourrait se révéler beaucoup plus rapide que dans les mémoires en silicium et la capacité d'intégration (nombre de bits stockables par  $\text{mm}^2$ ) semble supérieure de sorte que l'on estime<sup>1</sup> que ce genre de composant devrait rapidement supplanter les mémoires traditionnelles dans les toutes prochaines années.

Les matériaux magnétiques sont encore utilisés dans de nombreuses applications allant de la téléphonie cellulaire à l'absorption radar (pour la furtivité de certains avions) et leur étude est un sujet d'actualité particulièrement actif. On notera par exemple que les deux physiciens Albert Fert et Peter Grünberg ont tous deux reçu le prix Nobel en 2007 pour leurs travaux sur la magnéto-résistance géante (GMR), procédé qui a permis de miniaturiser à l'extrême les têtes de lecture/écriture des disques durs accroissant du

---

<sup>1</sup>Source : [www.mram.org](http://www.mram.org) qui est un site dédié l'actualité concernant ce type de matériel.

même coup leur capacité. Le principe met en œuvre un assemblage en multicouches (ou sandwichs) de matériaux ferromagnétiques et isolants. Malheureusement (ou heureusement ?) la modélisation des matériaux magnétiques n'est pas aussi naturelle qu'on peut le penser et a connu au cours des années de nombreuses variations et changements. Le point de départ consiste à comprendre en partant des équations de Maxwell le champ magnétique créé par un barreau uniformément aimanté (un aimant permanent habituel). Par la suite, Pierre Weiss a proposé en 1907 une théorie, appelée "théorie des domaines" qui consiste à considérer l'aimant comme un assemblage de domaines uniformément aimantés. Leur forme est déterminée par la minimisation de l'énergie magnétostatique et d'une énergie prenant en compte le saut d'aimantation entre les domaines. Cette description semble proche des observations physiques. En effet, on "voit" dans les figures<sup>2</sup> Fig. 1.1-1.6 des configurations qui semblent se présenter sous la forme de domaines séparés par des parois très fines au regard de la taille des domaines. Néanmoins, la

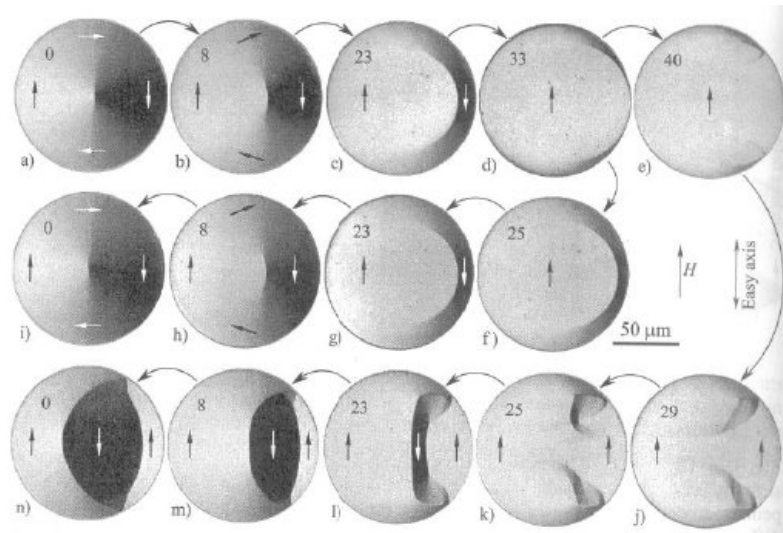


FIG. 1.1 – Historique de l'évolution d'un vortex à l'intérieur d'une particule circulaire sous l'action d'un champ extérieur croissant (première ligne) et décroissant suivant que l'on dépasse (3ème ligne) ou non (2ème ligne) un champ critique expulsant le vortex du matériau.

situation paraît aussi plus compliquée puisque les domaines ne semblent pas uniformément aimantés (voir le vortex Fig. 1.1 par exemple). Aussi, W. F. Brown a proposé, depuis les années 40 la théorie du micromagnétisme dans

<sup>2</sup>Toutes ces photos sont extraites du livre [8] qui est une véritable bible en matière de magnétisme.

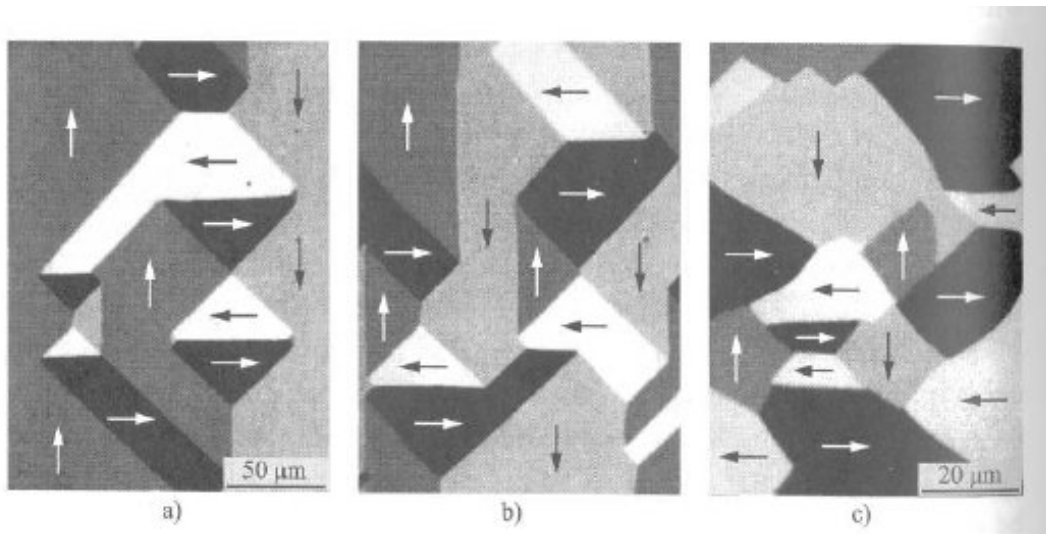


FIG. 1.2 – Domaines dans un matériau à anisotropie cubique.

laquelle l'aimantation est vue comme un continuum et est sujette à minimiser une énergie libre.

Le but de cet ouvrage est de décrire les résultats mathématiques de base sur ce modèle. Nous décrirons aussi le modèle d'évolution de l'aimantation au sein des matériaux ferromagnétiques appelé "équation de Landau-Lifschitz-Gilbert" dans le chapitre 6. On abordera ainsi l'existence de solutions au problème de Cauchy associé ainsi que leur unicité. Dans la deuxième moitié de ce livre, nous aborderons le problème de la conception de schémas numériques pour le calcul approché de solutions de ces problèmes. Nous traiterons aussi bien la question (délicate) du calcul du champ démagnétisant que celle de l'écriture d'algorithmes numériques pour la minimisation de l'énergie. Enfin, la question de trouver des schémas pour discrétiser l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert sera abordée à la fin du volume.

## 1.2 Le modèle du micromagnétisme

Les observations physiques (voir par exemple [8]) rendent compte de structures à l'intérieur des échantillons qui prennent la forme de domaines qui se présentent comme des aimants permanents à l'intérieur desquels l'aimantation varie peu ou pas, séparés par des parois extrêmement fines. La théorie du micromagnétisme, développée par W. F. Brown depuis les années 40 (voir [3]), est une théorie des milieux continus qui consiste à considérer que dans le domaine magnétique existe une distribution de mini-aimants permanents

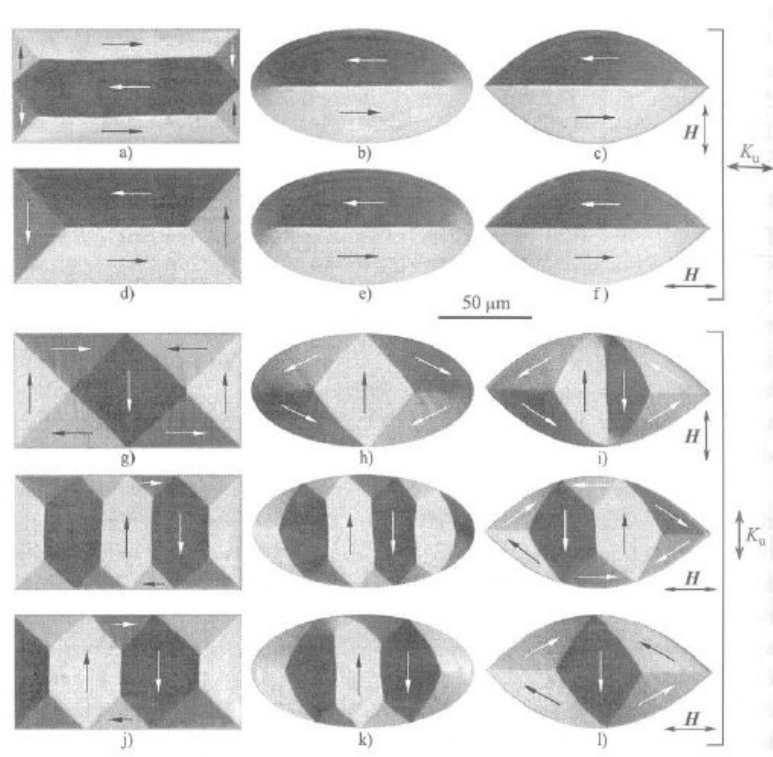


FIG. 1.3 – Quelques configurations en domaines dans des particules rectangulaires, ellipsoïdales ou lenticulaires. Ces configurations sont très bien décrites par la construction de Van den Berg.

décrits par un champ de vecteurs

$$M : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

( $\Omega$  est le domaine tridimensionnel représentant le matériau magnétique), soumis à la contrainte

$$|M(x)| = M_s(T) \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (1.1)$$

L'aimantation à saturation  $M_s(T)$  ne dépend que de la température et fixe ainsi l'amplitude de l'aimantation localement de sorte qu'à température constante, seule la direction de cette aimantation importe (on se placera systématiquement dans cette situation dorénavant de sorte que l'on oubliera par la suite la dépendance de  $M_s$  en fonction de la température  $T$ ).

Les configuration physiquement admissibles sont sélectionnées par la mi-



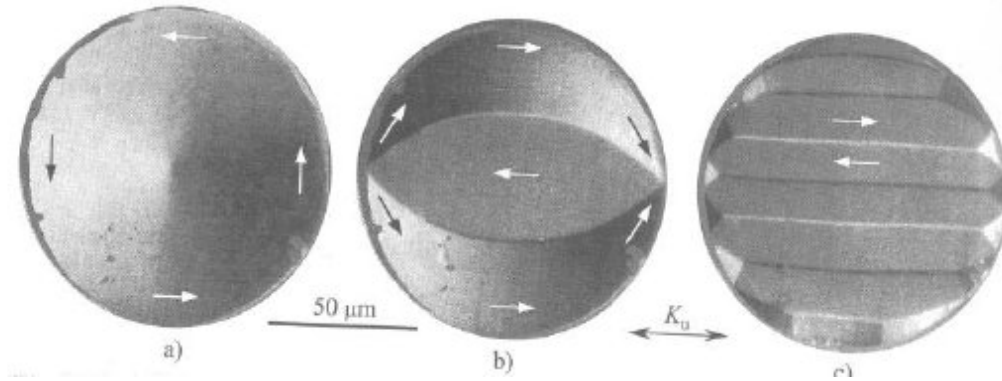


FIG. 1.4 – Trois configurations en domaines dans une même particule circulaire.

nimisation de l'énergie libre (dite de Brown)

$$\mathcal{E}(M) = \frac{A}{M_s^2} \int_{\Omega} |\nabla M|^2 dx + K \int_{\Omega} G\left(\frac{M}{M_s}\right) dx \quad (1.2)$$

$$- \int_{\Omega} H_a \cdot M dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} H_d(M) \cdot M dx$$

que nous allons essayer de comprendre terme à terme.

Notons toutefois qu'il est instructif de savoir dans quelles unités physiques les différentes quantités intervenant dans l'énergie sont considérées et mesurées de façon à se convaincre que l'énergie est effectivement une quantité qui se mesure en joules ( $J$ ). Ces unités sont rappelées dans la Table 1.1.

Notation	Nom	Unité
$A$	Constante d'échange	$J m^{-1}$
$M_s$	Aimantation à saturation	$T$
$K$	Constante d'anisotropie	$J m^{-3}$
$H_a$	Champ extérieur	$A m^{-1}$
$H_d(M)$	Champ démagnétisant	$A m^{-1}$

TAB. 1.1 – Variables et unités.

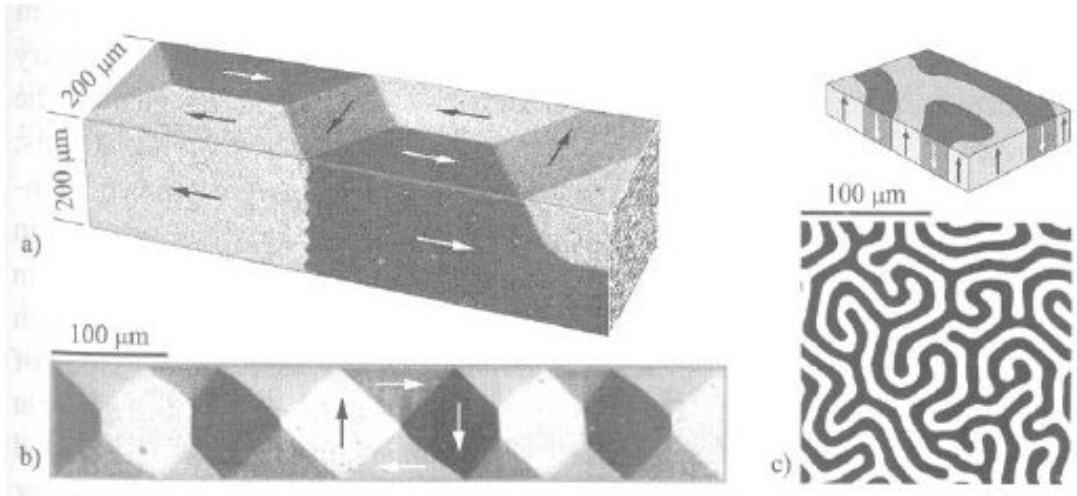


FIG. 1.5 – Configurations en domaines ou en labyrinthe dans des matériaux mou et dur respectivement.

### 1.2.1 L'énergie extérieure

L'énergie extérieure rend compte du fait qu'un échantillon magnétique placé dans un champ extérieur  $H_a$  a tendance à voir son aimantation s'aligner dans la direction du champ. Le principe sous-jacent est que si l'on minimise  $-H_a \cdot M$  pour  $|M| = M_s$ , on obtient  $M = M_s \frac{H_a}{|H_a|}$ . En intégrant sur le domaine magnétique, on obtient de la même façon que la minimisation de

$$\mathcal{E}_{ext}(M) = - \int_{\Omega} H_a \cdot M \, dx, \quad (1.3)$$

sous la contrainte  $|M(x)| = M_s$  donne une solution constante  $M(x) = M_s \frac{H_a}{|H_a|}$  pour tout  $x \in \Omega$  traduisant un alignement uniforme dans le matériau de l'aimantation avec le champ magnétique extérieur.

### 1.2.2 L'énergie d'échange

L'énergie d'échange, quant à elle, rend compte du même phénomène que précédemment, à très petite distance. En effet, lorsque deux spins sont très proches, ils ont tendance à interagir, chaque spin voyant ou subissant l'autre comme un champ extérieur. Ceci a pour effet d'avoir tendance à aligner les spins lorsqu'ils sont voisins ou en termes moins radicaux à affaiblir les variations infinitésimales de l'aimantation.

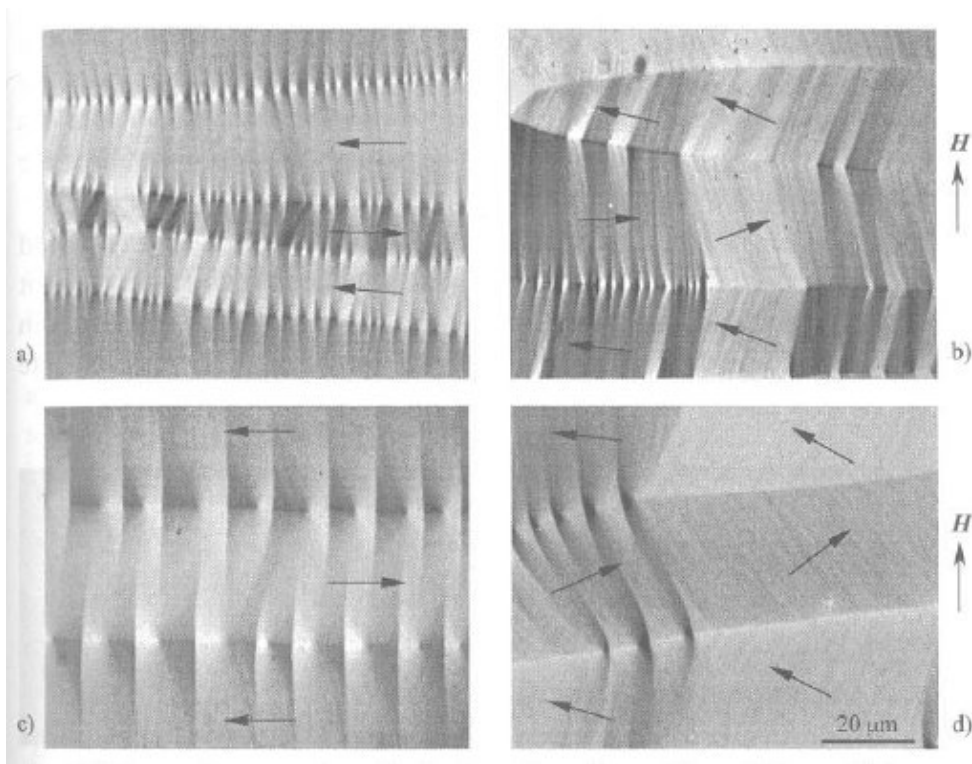


FIG. 1.6 – Parois de type “cross-tie” difficiles à expliquer avec la théorie des domaines.

Imaginons un réseau cubique de taille de maille  $h$  aux sommets  $i$  duquel sont placés des spins  $S_i$  tels que

$$\forall i, |S_i| = S \quad (1.4)$$

soit constant.

On associe à ce réseau l'énergie

$$\mathcal{E} = - \sum_{i,j \text{ voisins}} S_i \cdot S_j,$$

tendant à aligner localement les spins voisins.

En utilisant (1.4), et en introduisant  $N$  le nombre de voisins (ou d'arêtes du réseau), on peut réécrire l'énergie sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -NS + \frac{1}{2} \sum_{i,j \text{ voisins}} |S_i - S_j|^2 \\ &= -NS + \frac{S^2}{2h} \sum_{i,j \text{ voisins}} \frac{|S_i - S_j|^2}{h^2} h^3 \end{aligned}$$

semblable (à la constante  $NS$  près) à une discrétisation de type “différences finies” de  $\int_{\Omega} \left| \nabla \frac{S(x)}{|S(x)|} \right|^2 dx$  de même type que l’énergie d’échange postulée ci-dessus.

Notons toutefois que l’on pourrait compliquer ce terme en prenant une énergie non isotrope du type

$$\int_{\Omega} \left( A \nabla \frac{M}{M_s}, \nabla \frac{M}{M_s} \right) dx,$$

dans laquelle la matrice  $A$  serait définie positive. Cette possibilité, envisagée dans [3] par exemple, semble compliquer inutilement la modélisation et n’est donc jamais retenue en pratique.

### 1.2.3 L’énergie démagnétisante

Le dernier terme dans (1.3) représente l’énergie de la configuration plongée dans le champ magnétique qu’elle produit elle-même. En partant des équations de Maxwell sans charge ni courant et en cherchant des solutions stationnaires, on trouve que le *champ démagnétisant* est déterminé à partir de la distribution d’aimantation  $M$  comme la solution du problème

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\mu_0 H_d(M) + M) = 0, \\ \operatorname{rot} H_d(M) = 0, \\ H_d(M) \rightarrow 0 \text{ à l’infini.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Il faut néanmoins donner un sens précis à ces équations, valables dans l’espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier ainsi qu’à la condition à l’infini. Notons aussi que le fait d’avoir pris la solution stationnaire des équations de Maxwell (on qualifie quelquefois cette approximation de “quasi-statique”) revient à négliger la taille de l’échantillon devant les longueurs que peuvent franchir les ondes électromagnétiques pendant un temps caractéristique d’observation. (Nous verrons lorsque nous parlerons du modèle dynamique que cette approximation est typiquement valable pour des objets dont la taille est de l’ordre de quelques microns.)

Les propriétés du champ démagnétisant conditionnent un grand nombre de structures observées dans la pratique. On a donc décidé de lui consacrer le chapitre 2 entièrement.

### 1.2.4 L'énergie d'anisotropie

Enfin, l'énergie d'anisotropie prend en compte des effets d'anisotropie dus à la structure cristalline du matériau. On en tient compte grâce à une fonction

$$G : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad (1.6)$$

paire et s'annulant sur un ensemble de directions appelées "directions faciles d'aimantation. Dans la pratique 3 cas sont utilisés :

- L'anisotropie uniaxe pour laquelle une seule direction  $u \in \mathbb{S}^2$  est privilégiée, et l'on a

$$K > 0, \quad G(m) = (1 - (m \cdot u)^2).$$

- L'anisotropie planaire qui tend à favoriser les directions d'un plan  $\mathcal{P}$ . En considérant un vecteur  $u \in \mathbb{S}^2$  orthogonal à  $\mathcal{P}$ , on prend en général

$$K < 0, \quad G(m) = (1 - (m \cdot u)^2).$$

- L'anisotropie cubique pour laquelle trois directions mutuellement orthogonales sont faciles. Si les trois directions correspondent aux axes des trois vecteurs de bases, on prend pour  $m = (m_1, m_2, m_3)$

$$K > 0, \quad G(m) = m_1^2 m_2^2 + m_1^2 m_3^2 + m_2^2 m_3^2.$$

## 1.3 Longueurs caractéristiques

Le problème du micromagnétisme contient intrinsèquement plusieurs longueurs caractéristiques. Mises à part les dimensions de l'échantillon, deux longueurs sont présentes dans le problème :

- **La longueur d'échange**  $\Delta = \sqrt{\frac{2A\mu_0}{M_s^2}}$ . Sur des longueurs inférieures à la longueur d'échange (par exemple sur des petites particules dont la taille est inférieure à  $\Delta$ ), l'énergie d'échange est prépondérante par rapport à l'énergie démagnétisante.
- **La largeur des parois de Bloch**  $\Lambda = \sqrt{\frac{A}{K}}$ . Sur des distances inférieures à  $\Lambda$ , les effets dus à l'énergie d'anisotropie sont négligeables par rapport à ceux dus à l'énergie d'échange.
- **Le facteur de qualité**  $Q = \left(\frac{\Delta}{\Lambda}\right)^2 = \frac{2\mu_0 K}{M_s^2}$ . Ce nombre sans dimension mesure la prépondérance des effets dus à l'anisotropie ( $Q \gg 1$ )

par rapport à ceux dus à l'énergie démagnétisante ( $Q \ll 1$ ). Un matériau possédant un grand facteur de qualité est appelé *matériau dur*, les autres (ceux qui vérifient  $Q < 1$ ) sont appelés *matériaux doux*.

## 1.4 Mise sans dimension

Comme nous venons de le voir, les constantes qui interviennent dans le modèle ont une énorme importance du point de vue de la physique des phénomènes. En revanche, en ce qui concerne l'analyse mathématique (existence de solutions, régularité, unicité, etc.), on peut simplifier l'écriture en prenant toutes ces constantes égales à 1. On étudiera ainsi le modèle *purement mathématique* suivant

$$\min_{m \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)} \mathcal{E}(m), \quad (1.7)$$

où

$$H^1(\Omega, \mathbb{S}^2) = \{m \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ tel que } |m(x)| = 1 \text{ p.p.t. } x \in \Omega\} \quad (1.8)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(m) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx - \int_{\Omega} h \cdot m dx \\ - \frac{1}{2} \int_{\Omega} h_d(m) \cdot m dx + \int_{\Omega} G(m) dx. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Le "pseudo" champ démagnétisant  $h_d(m)$  étant solution du problème

$$\begin{cases} \operatorname{div} (h_d(m) + m) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{rot} h_d(m) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.10)$$

**Exercices** Les équations de Maxwell régissent l'évolution du champ électromagnétique au cours du temps. Dans un matériau magnétique de distribution de densité d'aimantation  $M$ , elles s'écrivent

$$\begin{cases} \operatorname{div} B = 0, \\ \operatorname{div} D = \rho, \\ \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Dans les équations précédentes,  $B$  est l'induction magnétique,  $D$  l'induction électrique,  $H$  et  $E$  les champs magnétiques et électriques respectivement,  $\rho$  est la densité de charges, et  $J$  la densité de courant.

On remarquera que le système n'est pas fermé (il y a beaucoup moins d'équations que d'inconnues) et on lui adjoint des lois de fermeture qui dépendent du matériau. Dans un matériau magnétique possédant une distribution de densité d'aimantation  $M$ , on rajoute

$$\begin{cases} D = \varepsilon_0 E, \\ B = \mu_0 H + M. \end{cases} \quad (1.12)$$

Ici,  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement les permittivité électrique et perméabilité magnétique du vide.

Les unités couramment utilisées sont données dans la table 1.4.

variable	unité	valeur
$B$	T ( $\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$ )	
$H$	$\text{A m}^{-1}$	
$D$	$\text{C m}^{-2}$ ou $\text{A m}^{-2} \text{s}$	
$E$	$\text{kg m s}^{-3} \text{A}^{-1}$	
$\rho$	$\text{C m}^{-3}$	
$J$	$\text{C m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ou $\text{A m}^{-2}$	
$\mu_0$	$\text{kg m A}^{-2} \text{s}^{-2}$	$4\pi \cdot 10^{-7}$
$\varepsilon_0$	$\text{kg}^{-1} \text{m}^{-3} \text{A}^2 \text{s}^4$	
$M$	T ( $\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$ )	

TAB. 1.2 – Variables et unités des équations de Maxwell.





# Chapitre 2

## Le champ démagnétisant

### 2.1 Les principales propriétés

Dans cette section, nous allons donner et démontrer les propriétés de base du champ démagnétisant, et plus précisément de l'opérateur

$$h_d : m \mapsto h_d(m) \quad (2.1)$$

que nous avons vu et défini dans le chapitre 1.4.

En relevant le champ démagnétisant à l'aide de son potentiel  $h_d(m) = -\nabla\phi_d(m)$ , il faut résoudre

$$\Delta\phi_d(m) = \operatorname{div} m, \quad (2.2)$$

au sens des distributions  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ , et donc la formulation variationnelle adaptée au problème est

Trouver  $\phi_d(m) \in W$ , tel que  $\forall\psi \in W$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi_d(m) \cdot \nabla\psi \, dx = \int_{\Omega} m \cdot \nabla\psi \, dx, \quad (2.3)$$

dans laquelle l'espace de Hilbert  $W$  est à définir de façon à ce que la forme bilinéaire

$$a(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, dx \quad (2.4)$$

soit coercive sur  $W$ . On montre (voir l'exercice ?? pour tous les détails) que l'on peut trouver  $W$  comme le complété de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  pour la norme

$$\|\phi\|_{\dot{H}^1} = \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui dérive du produit scalaire donné par (2.4), de sorte que  $a(\cdot, \cdot)$  est naturellement coercive. De plus on a la caractérisation suivante de  $W$  (souvent appelé espace de “Beppo Levi” dans la littérature)

$$W = \left\{ \phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \text{ tel que } \nabla \phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \frac{\phi(x)}{\sqrt{1+|x|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\}. \quad (2.5)$$

L’application directe du théorème de Lax-Milgram donne alors l’existence et l’unicité d’une solution de (2.3), pour toute distribution d’aimantation  $m \in L^2(\Omega)$ .

**Propriété 1.**  $h_d : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$  est un opérateur linéaire qui vérifie  $\|h_d\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\mathbb{R}^3))} \leq 1$ .

*Démonstration.* La linéarité de  $h_d$  est claire. Par ailleurs, comme  $\phi_d(m) \in W$ , on sait déjà que  $h_d(m) = -\nabla \phi_d(m) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . Ensuite, en testant la formulation variationnelle (2.3) avec  $\psi = \phi_d(m)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_d(m)|^2 dx &= \int_{\Omega} m \cdot \nabla \phi_d(m) dx \\ &\leq \|m\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi_d(m)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|m\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi_d(m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|h_d(m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|m\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

En posant

$$\bar{m} = \begin{cases} m \text{ sur } \Omega, \\ 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \end{cases}$$

on a que l’induction magnétique  $b = \bar{m} + h_d(m) \in L^2(\mathbb{R}^3)$  vérifie  $\operatorname{div} b = 0$ . Il existe donc  $\psi \in \mathbb{W} = \{(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \text{ tel que } \psi_i \in W\}$  tel que

$$b = \operatorname{rot} \psi,$$

ce qui peut encore s’écrire

$$\bar{m} = \nabla \phi_d(m) + \operatorname{rot} \psi. \quad (2.6)$$

Cette décomposition s’appelle la “décomposition de Helmholtz” ou de “Hodge-de Rham” (suivant que l’on parle de quantités physiques ou de formes différentielles). Il s’agit d’une décomposition de  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . On renvoie aussi le lecteur à l’exercice 4 pour avoir une preuve directe sur cette décomposition.

**Proposition 1.** *On a  $L^2(\mathbb{R}^3) = \nabla W \oplus \text{rot } \mathbb{W}$ , la somme directe étant orthogonale.*

*Démonstration.* On sait déjà que

$$L^2(\mathbb{R}^3) = \nabla W + \text{rot } \mathbb{W}$$

d'après la décomposition de Helmholtz. Il reste à montrer que la décomposition est orthogonale. Soit  $\phi \in W$  et  $\psi \in \mathbb{W}$ . Comme  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  (resp.  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ) est dense dans  $W$  (resp.  $\mathbb{W}$ ), on peut trouver une suite  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3), \quad (2.7)$$

$$\psi_n \rightarrow \psi \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3). \quad (2.8)$$

Or on a par intégration par parties

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_n \cdot \text{rot } \psi_n \, dx = 0. \quad (2.9)$$

Ceci donne le résultat, en passant à la limite grâce à (2.7, 2.8).  $\square$

Les deux propositions précédentes montrent qu'en fait  $h_d(m)$  n'est rien d'autre que la projection dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  de  $-\bar{m}$  sur les champs de gradient parallèlement aux rotationnels.

**Proposition 2.** *L'énergie démagnétisante est toujours positive ou nulle. Elle est nulle si et seulement si*

$$\text{div } m = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (2.10)$$

$$m \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.11)$$

*Démonstration.* On a déjà vu que l'énergie démagnétisante est

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{dem} &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} m \cdot h_d(m) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m)|^2 \, dx \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Cette énergie s'annule si et seulement si  $h_d(m) = 0$  ou autrement dit que

$$\text{div } \bar{m} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Ceci, compte tenu du fait que  $m \in H^1(\Omega)$  est équivalent à (2.10, 2.11).  $\square$

**Proposition 3.** Si  $m, n \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} h_d(m) \cdot n \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} m \cdot h_d(n) \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} h_d(m) \cdot h_d(n) \, dx. \quad (2.12)$$

*Démonstration.* En utilisant la formulation variationnelle (2.3) et en la testant avec  $\psi = \phi_d(n)$ , on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_d(m) \cdot \nabla \phi_d(n) \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} m \cdot \nabla \phi_d(n) \, dx. \quad (2.13)$$

On obtient ensuite (2.12) en interchangeant les rôles de  $m$  et  $n$ .  $\square$

**Proposition 4.** On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \phi_d(m)(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\operatorname{div} m(y)}{|x-y|} \, dy + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{m(y) \cdot n(y)}{|x-y|} \, d\sigma(y). \quad (2.14)$$

*Démonstration.* La solution fondamentale dans  $\mathbb{R}^3$  de l'opérateur  $-\Delta$  est  $G(x) = \frac{1}{4\pi|x|} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ , c'est-à-dire que l'on a

$$-\Delta G = \delta_0,$$

où  $\delta_0$  est la masse de Dirac en 0. Ensuite, comme  $\operatorname{div} \bar{m}$  est à support compact, (égal à  $\bar{\Omega}$ ), on peut convoler  $G$  et  $\operatorname{div} \bar{m}$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \phi_d(m) &= -G \star \operatorname{div} \bar{m} \\ &= \frac{1}{4\pi|x|} \star (\operatorname{div} m \chi_{\Omega} - m \cdot n \delta_{\partial\Omega}), \end{aligned}$$

qui est une autre écriture de (2.14).  $\square$

L'écriture sous la forme (2.14) fait intervenir les deux quantités  $\operatorname{div} m$  à l'intérieur du volume et  $m \cdot n$  sur le bord qui par analogie avec l'électrostatique sont respectivement appelées *charges volumiques* et *charges surfaciques*. La présence de charges (volumiques ou surfaciques) génère automatiquement un champ démagnétisant et donc une énergie démagnétisante positive.

## 2.2 Expression du champ démagnétisant en Fourier

L'opérateur  $h_d$  vu comme opérateur de  $L^2(\mathbb{R}^3)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  est un opérateur qui a un symbole. En effet, en effectuant la transformée de Fourier de (??), on trouve

$$|\xi|^2 \hat{\phi}_d(m)(\xi) = i\xi \cdot \bar{m},$$

d'où l'on déduit que

$$\hat{h}_d(m) = -i\xi\hat{\phi}_d(m)(\xi) = -\frac{\xi(\xi \cdot \hat{m})}{|\xi|^2}.$$

Le symbole

$$a(\xi) = -\frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2}$$

est une trace du fait que l'on peut écrire formellement

$$h_d(m) = \nabla\Delta^{-1}\operatorname{div} \bar{m}.$$

Comme  $|a(\xi)| \leq 1$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ , on voit tout de suite (grâce à l'égalité de Parseval) que

$$h_d : L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3),$$

est continu et que  $\|h_d\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^3), L^2(\mathbb{R}^3))} \leq 1$ .

On montre aussi, grâce à la théorie symbolique que  $h_d : L^p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ . (voir [11]).

## 2.3 Les configurations de Landau

## 2.4 Matériaux durs-matériaux doux

Imaginons un film horizontal mince réalisé avec un matériau à anisotropie verticale (voir Fig. 2.1). Si le facteur de qualité  $Q$  est très grand devant 1 (le matériau est dur), les configurations auront tendance à être verticales (vers le haut ou vers), l'anisotropie étant prépondérante. Inversement, pour  $Q \ll 1$ , c'est-à-dire pour des matériaux doux, les configurations verticales créent de grosses charges de surfaces (sur le dessus et le dessous de l'échantillon) qui contribuent d'autant dans le champ démagnétisant. Dans ce dernier cas, on diminuera de beaucoup l'énergie en ayant des configurations planes

FIG. 2.1 – Films ferromagnétiques minces à anisotropie verticale dur et doux.

## 2.5 Récapitulatif

Le problème du micromagnétisme est un problème de minimisation faisant intervenir quatre termes d'énergie qui sont compétitifs. Le système sera

donc frustré en général. En effet, l'énergie d'échange est minimale pour des configurations constantes, l'énergie extérieure est minimale pour des configurations alignées et dans la direction du champ magnétique externe, l'anisotropie sera minimale si l'aimantation se positionne presque partout dans des directions faciles et l'énergie démagnétisante sera minimale pour des configurations à divergence nulle et tangentes au bord de l'objet. Ces dernières contraintes sont en général incompatibles avec les premières.

## 2.6 Exercices

---

### Exercice 2.1

Le but de cet exercice est de donner le bon cadre variationnel pour résoudre un Laplacien en domaine non borné. C'est typiquement ce qu'il faut faire lorsque l'on veut calculer le potentiel démagnétisant induit par une distribution d'aimantation.

On considère un domaine borné et régulier  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , et une distribution d'aimantation  $m \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Le potentiel démagnétisant  $\phi_d(m)$  est une solution de la formulation variationnelle

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_d(m) \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} m \cdot \nabla \psi \, dx \quad (2.15)$$

pour toute fonction-test  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ .

Sur des domaines bornés l'existence (et l'unicité) de solution à ce type de problème s'obtient en général par l'utilisation du théorème de Lax-Milgram. Ici, la forme bilinéaire

$$a(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx \quad (2.16)$$

empêche de poser le problème dans  $H^1(\mathbb{R}^3)$  (déjà, dans les domaines bornés, on ne peut pas avec une telle forme bilinéaire résoudre des problèmes dans  $H^1(\Omega)$  et l'on doit rajouter une condition au bord de type Dirichlet pour pouvoir résoudre. La coercivité dans ce cas se montre grâce à l'inégalité de Poincaré). Dans le domaine non borné  $\mathbb{R}^3$ , on construit un analogue de  $H_0^1$ . Cet espace s'appelle l'espace de Beppo-Levi,  $BL^1$  que l'on introduit dans cet exercice.

1. Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \phi(r)^2 \, dr \leq 4 \int_0^{+\infty} (r^2 \phi'(r))^2 \, dr. \quad (2.17)$$

On pourra utiliser pour cela une intégration par parties en écrivant  $\phi(r)^2 = 1 \times \phi(r)^2$ .

2. Montrer que pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1 + |x|^2} \, dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi(x)|^2 \, dx. \quad (2.18)$$

On pourra passer en coordonnées sphériques et utiliser l'estimation de la question précédente.

3. On pose

$$BL^1 = \left\{ \phi \text{ tel que } \frac{\phi}{\sqrt{1+|x|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \nabla\phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\} \quad (2.19)$$

muni du produit scalaire

$$(\phi, \psi)_{BL^1} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)\psi(x)}{1+|x|^2} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi(x) \cdot \nabla\psi(x) dx. \quad (2.20)$$

Montrer que  $BL^1$  est un espace de Hilbert. Montrer que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  est dense dans  $BL^1$ .

4. En utilisant les questions précédentes montrer que  $BL^1$  muni du produit scalaire

$$(\phi, \psi)_{\dot{H}^1} = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi(x) \cdot \nabla\psi(x) dx \quad (2.21)$$

est aussi un espace de Hilbert. On montrera que les normes sous-jacentes  $\|\cdot\|_{BL^1}$  et  $\|\cdot\|_{\dot{H}^1}$  sont en fait équivalentes.

5. Résoudre le problème du potentiel démagnétisant dans  $(BL^1, \|\cdot\|_{\dot{H}^1})$ .

6. Montrer que  $BL^1 \neq H^1(\mathbb{R}^3)$ .

7. Refaire la théorie en dimension 2. (Attention, bien que la technique soit exactement la même il est plus délicat de trouver les poids dans la définition de l'espace.)

### Exercice 2.2

Etant donné un ouvert  $\Omega$  borné dans  $\mathbb{R}^3$ , et une distribution d'aimantation  $m \in H^1(\Omega)$ , montrer que le potentiel démagnétisant  $\phi_d(m)$  généré par  $m$  et solution du problème (2.15) vérifie le problème de transmission

$$\begin{cases} \Delta\phi_d(m) = \operatorname{div} m \text{ dans } \Omega, \\ \Delta\phi_d(m) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ [\phi_d(m)] = 0 \text{ à travers } \partial\Omega, \\ \left[ \frac{\partial\phi_d(m)}{\partial n} \right] = -m \cdot n \text{ à travers } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.22)$$

On écrira pour cela la formulation variationnelle vérifiée par  $\phi_d(m)$  et on utilisera des fonctions test adaptées.

### Exercice 2.3



1. Soit  $\omega$  un ouvert borné et régulier. On considère aussi  $m \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , et l'on étend  $m$  en dehors de  $\Omega$  en posant

$$\bar{m}(x) = \begin{cases} m(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.23)$$

Montrer que

$$\operatorname{div} \bar{m} = \operatorname{div} m \chi_\Omega + m \cdot n \delta_{\partial\Omega} \quad (2.24)$$

au sens des distributions  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

Dans l'équation précédente,  $n$  est la normale sortante à  $\partial\Omega$ ,  $\chi_\Omega$  est la fonction caractéristique de  $\Omega$  et  $\delta_{\partial\Omega}$  est la mesure 2 dimensionnelle du bord définie comme distribution par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad \langle \delta_{\partial\Omega}, \phi \rangle = \int_{\partial\Omega} \phi(x) d\sigma_x. \quad (2.25)$$

2. Soit  $(\Omega_i)_{i=1, \dots, N}$  des ouverts disjoints tels que  $\mathbb{R}^3 = \cup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$ . On considère  $m_i \in H^1(\Omega_i)$  et on pose

$$\bar{m}(x) = m_i(x) \text{ si } x \in \Omega_i. \quad (2.26)$$

Calculer  $\operatorname{div} \bar{m}$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ .

#### Exercice 2.4 Décomposition de Helmholtz

Le but de cet exercice est de montrer directement que pour  $m \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , il existe des fonctions  $\phi$  et  $\psi$  telles que

$$m = \nabla \phi + \operatorname{rot} \psi.$$

On pose pour tout l'exercice

$$BL^1 = \left\{ \phi \text{ tel que } \frac{\phi}{\sqrt{1+|x|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \nabla \phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\} \quad (2.27)$$

et

$$\mathbb{B}L^1 = \{ \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \text{ tel que } \psi_i \in BL^1 \text{ pour } i = 1, \dots, 3 \}. \quad (2.28)$$

1. Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$  tel que  $\Delta u = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ . Montrer que  $u = 0$  (on pourra passer en Fourier).

2. Soit  $m \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ . Montrer qu'il existe un unique couple  $(\phi, \psi) \in BL^1 \times \mathbb{BL}^1$  solution de

$$\begin{aligned} \forall \phi' \in BL^1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \cdot \nabla \phi' \, dx &= \int_{\mathbb{R}^3} m \cdot \nabla \phi' \, dx \\ \forall \psi' \in \mathbb{BL}^1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \psi \cdot \nabla \psi' \, dx &= \int_{\mathbb{R}^3} m \cdot \text{rot } \psi' \, dx. \end{aligned}$$

Montrer ensuite que  $\text{div } \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  vérifie

$$\Delta \text{div } \psi = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),$$

et en déduire que  $\text{div } \psi = 0$ .

3. On pose  $\theta = m - \nabla \phi - \text{rot } \psi$ . Montrer que  $\theta \in L^2$  vérifie

$$\begin{cases} \text{div } \theta = 0, \\ \text{rot } \theta = 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

et en déduire que  $\theta = 0$

4. En Fourier : On construit  $\phi$  et  $\psi$  par transformée de Fourier inverse de

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\xi) = \frac{i\xi \cdot \hat{m}(\xi)}{|\xi|^2}, \\ \hat{\psi}(\xi) = \frac{i\xi \wedge \hat{m}(\xi)}{|\xi|^2}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Montrer que  $m = \nabla \phi + \text{rot } \psi$ , que  $\text{div } \psi = 0$ .

**Exercice 2.5** Champ démagnétisant d'une boule uniformément aimantée

Montrer que si  $\omega$  est une boule et que  $m$  est constant sur  $\Omega$ , alors le champ démagnétisant est constant *sur le domaine*  $\Omega$  et que l'on a

$$h_d(m) = -\frac{1}{3}m.$$

En dehors de  $\Omega$  bien entendu, cette relation n'est plus vérifiée (puisque  $m = 0$  en particulier).

# Chapitre 3

## Le problème de minimisation

Dans ce chapitre nous étudions le problème de minimisation. Afin d'alléger les calculs, nous travaillerons avec le modèle donné par les équations (1.7-1.10) (dans lequel toutes les constantes sont égales à 1). La méthode utilisée est extrêmement standard et porte le nom de "méthode directe du calcul des variations". Comme nous le verrons, cette méthode fournit l'existence d'une solution mais pas l'unicité.

### 3.1 Existence de solutions

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Il existe une solution au problème (1.7-1.10).*

*Démonstration.* Pour la preuve du théorème 1, on utilise la *méthode directe* du calcul des variations. Celle-ci consiste à effectuer les étapes suivantes :

1. On montre que  $\inf_{m \in H} \mathcal{E}(m)$  existe, c'est-à-dire que l'on montre que l'énergie est uniformément minorée.
2. On considère ensuite une suite minimisante  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , c'est-à-dire une suite d'éléments de  $H$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(m_n) = \inf_{m \in H} \mathcal{E}(m), \quad (3.1)$$

et l'on montre que la borne sur l'énergie induite par (3.1) entraîne que  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1 \supset H$ .

3. Comme  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert, on peut extraire de  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite  $(m_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement dans  $H^1(\Omega)$

$$m_{n_k} \rightharpoonup m_\infty \text{ faiblement dans } H^1(\Omega).$$

4. Enfin, on montre que  $m_\infty \in H$  et que

$$\mathcal{E}(m_\infty) = \inf_{m \in H} \mathcal{E}(m),$$

c'est-à-dire que  $m_\infty$  est une solution du problème. En général, cette dernière étape se fait en montrant que l'énergie est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de  $H^1(\Omega)$ .

Passons maintenant à l'application dans le cas du problème considéré.

1. Les énergies d'échange et démagnétisante sont positives, l'énergie d'anisotropie est bornée (attention, elle n'est pas nécessairement positive) puisque  $G$  est bornée. Appelant

$$\bar{G} = \max_{m \in \mathbb{S}^2} G(m),$$

on a

$$\forall m \in H, \mathcal{E}(m) \geq -|h||\Omega| - |K||\Omega|\bar{G},$$

montrant que l'énergie est minorée.

2. On a  $|m_n(x)| = 1$  p.p.t.  $x \in \Omega$ , soit

$$\|m_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = |\Omega|, \quad (3.2)$$

ce qui montre que  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ . Par ailleurs, L'ensemble  $H$  est inclus dans  $H(\Omega)$  et la suite minimisante a une énergie bornée

$$\exists C, \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{E}(n) \leq C.$$

De (3.2), on déduit que

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} m \cdot h_d(m) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m)|^2 dx \\ &\leq \|m\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ (d'après (??))} \\ &= |\Omega|. \end{aligned} \quad (3.3)$$

On en déduit la borne

$$\int_{\Omega} |\nabla m_n|^2 dx \leq C + |\Omega| + |h||\Omega| + |K||\Omega|\bar{G},$$

qui montre, à l'aide de (3.2) que la suite  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément majorée dans  $H^1(\Omega)$ .

3. On extrait donc une sous-suite  $(m_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$m_{n_k} \rightharpoonup m_\infty \text{ faiblement dans } H^1(\Omega)$$

et, grâce au lemme de Rellich ( $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  de façon compacte), on peut supposer

$$m_{n_k} \rightarrow m_\infty \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p.}$$

4. Enfin, on montre que  $\mathcal{E}(m_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(m_{n_k})$ . En effet, l'énergie d'échange est semicontinue inférieurement pour la convergence faible  $H^1$ , l'énergie extérieure est continue pour la convergence  $L^2$  forte, de même que l'énergie démagnétisante et l'énergie d'anisotropie passe à la limite par convergence dominée. Il reste juste à prendre en compte la contrainte, mais la convergence presque partout de  $(m_{n_k})_{k \geq 0}$  vers  $m_\infty$  et le fait que  $|m_{n_k}(x)| = 1$  p.p. montre en passant à la limite que  $|m_\infty(x)| = 1$  p.p. sur  $\Omega$ . □

**Remarque 1.** *Dans le cas où  $h = 0$ , il n'y a pas d'énergie extérieure et l'énergie est paire. Comme l'espace de minimisation est lui même pair et ne contient pas  $m = 0$ , il ne peut y avoir unicité de la solution au problème (1.7-1.10). En pratique, pour des champs magnétiques  $h \neq 0$  relativement faibles, on ne peut espérer avoir unicité. Toutefois, pour des champs très importants  $|h| \gg 1$ , l'énergie extérieure devient prépondérante et l'on s'attend donc à avoir une solution qui s'aligne avec le champ. Ceci pourrait avoir une incidence sur l'unicité de la solution.*

## 3.2 Equation d'Euler-Lagrange

**Théorème 2.** *L'équation d'Euler-Lagrange associée au problème de minimisation est (au sens des distributions)*

$$-\Delta m - h - h_d(m) + \nabla_m G(m) = \lambda m, \quad (3.4)$$

où la fonction  $\lambda \in L^1(\Omega)$  est donnée par

$$\lambda = |\nabla m|^2 - h \cdot m - h_d(m) \cdot m + \nabla_m G(m) \cdot m. \quad (3.5)$$

*Idée directrice.* L'équation d'Euler-Lagrange traduit le fait que le gradient fonctionnel de l'énergie est aligné avec le gradient de la contrainte, le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  dépendant de  $x$  puisqu'il y a une contrainte en tout

point  $x$  de  $\Omega$ . La valeur de  $\lambda$  se calcule *formellement* en faisant le produit scalaire de (3.4) avec  $m$ . On obtient ainsi (toujours formellement)

$$\lambda = (-\Delta m - h - h_d(m) + \nabla_m G(m)) \cdot m,$$

ce qui redonne (2) en tenant compte du fait que (pour des fonctions  $m$  régulières)

$$-\Delta m \cdot m = |\nabla m|^2,$$

qui se déduit aisément de  $\Delta(|m|^2) = 0$ . □

*Démonstration rigoureuse.* Bien entendu le calcul précédent donne une idée du résultat qu'il convient de justifier. En particulier la dernière égalité n'a pas de sens puisqu'a priori,  $-\Delta m$  est seulement une distribution ( $m$  n'a qu'une régularité  $H^1$ ) et que l'on ne peut pas calculer  $-\Delta m \cdot m$ . On procède donc différemment en effectuant des variations de l'énergie autour d'un minimum  $m$  qui doivent respecter la contrainte. Ainsi, on considère  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , et pour  $\tau$  assez petit (par exemple  $|\tau| < \tau_0 = \frac{1}{2\|\phi\|_\infty}$ ) on définit  $m_\tau \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$  par

$$\forall x \in \Omega, m_\tau(x) = \frac{m(x) + \tau\phi(x)}{|m(x) + \tau\phi(x)|}.$$

Ensuite, on écrit que

$$\forall \tau \in ]-\tau_0, \tau_0[, \mathcal{E}(m_\tau) \geq \mathcal{E}(m),$$

ou plus précisément,

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{E}(m_\tau)|_{\tau=0} = 0.$$

La linéarité permet d'étudier séparément les quatre termes de l'énergie. Néanmoins, on commence par calculer  $\frac{\partial m_\tau}{\partial \tau}|_{\tau=0}$  en faisant un développement limité de  $m_\tau$  en  $\tau$  au voisinage de  $\tau = 0$ . On a

$$\begin{aligned} m_\tau &= (m + \tau\phi)|m + \tau\phi|^{-1}, \\ &= (m + \tau\phi)(1 + 2\tau\phi \cdot m + o(\tau))^{-\frac{1}{2}}, \\ &= m + \tau(\phi - (\phi \cdot m)m) + o(\tau), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{\partial m_\tau}{\partial \tau}|_{\tau=0} = \phi - (\phi \cdot m)m.$$

**1. L'énergie d'échange**

On a<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla m_{\tau}|^2 dx \Big|_{\tau=0} &= \int_{\Omega} \nabla m \cdot \nabla (\phi - (\phi \cdot m)m) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla m \cdot \nabla \phi - |\nabla m|^2 (\phi \cdot m) dx \quad (3.6) \end{aligned}$$

car,  $m$  étant de module constant en tout point vérifie  $m \cdot \frac{\partial m}{\partial x_i} = 0$  pour tout  $i = 1, 2, 3$  et p.p. sur  $\Omega$ .

**2. L'énergie extérieure**

Pour l'énergie extérieure, c'est plus simple puisque l'on a

$$\frac{d}{d\tau} - \int_{\Omega} h \cdot m_{\tau} dx \Big|_{\tau=0} = - \int_{\Omega} h \cdot (\phi - \phi \cdot m)m dx \quad (3.7)$$

**3. L'énergie démagnétisante**

En ce qui concerne l'énergie démagnétisante, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} h_d(m_{\tau}) \cdot m_{\tau} dx \Big|_{\tau=0} &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} h_d(\phi - (\phi \cdot m)m) \cdot m dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} h_d(m) \cdot (\phi - (\phi \cdot m)m) dx \\ &= - \int_{\Omega} h_d(m) \cdot (\phi - (\phi \cdot m)m) dx \quad (3.8) \end{aligned}$$

d'après (2.12).

**4. L'énergie d'anisotropie**

Pour ce terme, on a

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} G(m_{\tau}) dx \Big|_{\tau=0} = \int_{\Omega} \nabla_m G(m) \cdot (\phi - (\phi \cdot m)m) dx. \quad (3.9)$$

En regroupant les quatre composantes trouvées précédemment (3.6,3.7,3.8,3.9),

---

<sup>1</sup>Bien entendu, toutes les dérivations sous le signe intégral que nous allons faire maintenant sont à justifier et font l'objet de l'exercice 3.1.

on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\tau} \mathcal{E}(m_\tau) \Big|_{\tau=0} \\
&= \int_{\Omega} \nabla m \cdot \nabla \phi - (h + h_d(m) - \nabla_m G(m)) \cdot \phi \, dx \\
&\quad - \int_{\Omega} (|\nabla m|^2 - (h + h_d(m) - \nabla_m G(m)) \cdot m) (m \cdot \phi) \, dx
\end{aligned} \tag{3.10}$$

ce qui est bien le résultat annoncé dans le théorème 2.  $\square$

L'équation d'Euler-Lagrange a aussi une autre version complètement équivalente.

**Théorème 3.** *De manière équivalente,  $m \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$  est solution de l'équation d'Euler-Lagrange (3.4) si et seulement si  $m$  vérifie au sens des distributions*

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial m}{\partial x_i} \wedge m \right) - (h + h_d(m) - \nabla_m G(m)) \wedge m = 0. \tag{3.11}$$

*Démonstration.* On constate (par densité) que la formulation faible (3.10) a lieu non seulement pour des fonctions test  $\phi$  de  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , mais aussi pour des fonctions test  $\phi$  de  $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . On considère donc  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et on prend  $\phi = m \wedge \psi$ . L'équation (3.10) devient

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \nabla m \cdot \nabla \phi - (h + h_d(m) - \nabla_m G(m)) \cdot \phi \, dx \\
&= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial m}{\partial x_i} \wedge \psi + \frac{\partial m}{\partial x_i} \cdot m \wedge \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dx \\
&\quad - \int_{\Omega} (h + h_d(m) - \nabla_m G(m)) \cdot m \wedge \psi \, dx.
\end{aligned}$$

Le premier terme est nul, et il reste

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial m}{\partial x_i} \wedge m \, dx - \int_{\Omega} \psi \cdot ((h + h_d(m) - \nabla_m G(m)) \wedge m) \, dx \tag{3.12}$$

ce qui signifie exactement que  $m$  vérifie (3.11) au sens des distributions. De même, on voit que (3.12) a encore un sens (toujours par densité) lorsque la fonction test  $\psi$  est dans  $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . On teste de nouveau avec  $\psi = m \wedge \phi$  pour  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et on obtient de nouveau (3.10).  $\square$



### 3.3 Convergence de points stationnaires

Un des avantages de cette deuxième formulation est qu'elle permet des convergences plus facilement. A titre d'exemple d'illustration, on donne le résultat suivant :

**Théorème 4.** *Soit  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$  de points stationnaires (solutions de (3.4) ou (3.11)) bornée dans  $H^1$ . Alors on peut en extraire une sous suite qui converge vers un élément de  $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$  qui est aussi une solution de (3.4) et (3.11).*

*Démonstration.* Sachant que  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1$ , on peut en extraire une sous-suite (que l'on note toujours  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) qui vérifie

$$\begin{aligned} m_n &\rightharpoonup m_\infty \text{ faiblement dans } H^1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \\ m_n &\rightarrow m_\infty \text{ fortement dans } L^2 \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \\ m_n &\rightarrow m_\infty \text{ p.p. quand } n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

de sorte que  $m_\infty \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ . Ensuite on prend l'équation d'Euler-Lagrange sous la forme (3.12),  $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial m_n}{\partial x_i} \wedge m_n dx - \int_{\Omega} \psi \cdot ((h + h_d(m_n)) - \nabla_m G(m_n)) \wedge m_n dx \quad (3.13)$$

et l'on fait passer tous les termes à la limite. Le premier terme passe à la limite du fait que

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_n}{\partial x_i} &\rightharpoonup \frac{\partial m_\infty}{\partial x_i} \text{ faiblement dans } L^2 \\ m_n &\rightarrow m_\infty \text{ fortement dans } L^2. \end{aligned}$$

Le terme contenant le champ démagnétisant passe aussi à la limite puisque par continuité de  $h_d$  sur  $L^2$ , on a

$$h_d(m_n) \rightarrow h_d(m_\infty) \text{ fortement dans } L^2.$$

Les autres termes passent à la limite par convergence dominée. Ainsi,  $m_\infty$  vérifie aussi (3.11) et donc est un point stationnaire de l'énergie.  $\square$

### 3.4 Champ effectif

Lorsque l'on reprend les notations du problème physique (avec les constantes physiques), l'équation d'Euler-Lagrange devient

$$-\frac{2A}{M_s^2} \Delta M - H_a - H_d(M) + \frac{K}{M_s} \nabla_m G \left( \frac{M}{M_s} \right) = \lambda M.$$

Le terme de gauche de cette équation a la dimension d'un champ magnétique et on le nomme (au signe près) le *champ effectif* ou parfois *champ total*.

$$\begin{aligned} H_{eff} &= -\frac{\partial \mathcal{E}(M)}{\partial M}, \\ &= \frac{2A}{M_s^2} \Delta M + H_a + H_d(M) - \frac{K}{M_s} \nabla_m G \left( \frac{M}{M_s} \right). \end{aligned}$$

L'équation d'Euler-Lagrange traduit donc le fait que pour un point stationnaire, le champ total vu par le matériau est aligné avec l'aimantation.

On comprend aussi maintenant l'introduction du facteur  $\frac{1}{2}$  dans l'énergie démagnétisante. En effet, l'énergie démagnétisante étant quadratique, ce facteur  $\frac{1}{2}$  permet lorsque l'on écrit l'équation d'Euler-Lagrange d'avoir un champ total dans lequel le champ démagnétisant s'ajoute au champ total. Nous verrons plus tard, que ce champ démagnétisant a tendance à compenser (au moins pour des petits champs extérieurs) en s'opposant au champ  $H_a$ . Il *démagnétise* donc la particule.

### 3.5 Lien avec les applications harmoniques à valeurs dans la sphère

La majeure partie des techniques exposées dans ce paragraphe viennent directement de techniques développées pour l'étude des applications harmoniques à valeurs dans la sphère. En tout état de cause, ce qui permet de faire fonctionner les méthodes employées est que l'énergie du micromagnétisme peut être vue comme une perturbation de l'énergie de Dirichlet. Minimiser l'énergie de Dirichlet sous la contrainte d'être à valeurs dans la sphère unité permet précisément de trouver des applications harmoniques à valeurs dans la sphère. Ce sujet fut l'objet d'un grand nombre de publications dans les années 90. On citera à titre d'exemple [5] et [6] et les références présentes dans ces articles. Plus récemment le livre de F. Hélein [7] est aussi une excellente référence.

### 3.6 Récapitulatif

Pour l'existence de solution au problème de minimisation, on utilise la méthode directe du calcul des variations. Le terme principal est le terme d'échange et les autres termes peuvent être vus comme des perturbations de

celui-là. De même, en ce qui concerne la convergence de configurations stationnaires vers une configuration stationnaire, les techniques introduites pour l'étude des applications harmoniques à valeurs dans la sphère se montrent tout à fait adaptées. De nouveau tous les termes sont des perturbations face à l'énergie d'échange.

### 3.7 Exercices

**Exercice 3.1** Justification des derivations sous le signe somme qui permettent de trouver l'équation d'Euler.

On prend  $m$  un minimiseur de l'énergie micromagnétique et  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Pour  $\tau$  suffisamment petit, on considère  $m_\tau \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$  défini par

$$\forall x \in \Omega, m_\tau(x) = \frac{m(x) + \tau\phi(x)}{|m(x) + \tau\phi(x)|}. \quad (3.14)$$

Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} |\nabla m_\tau|^2 dx &= 2 \int_{\Omega} \nabla m_\tau \cdot \nabla \frac{\partial m_\tau}{\partial \tau} dx \\ \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} h \cdot m_\tau dx &= \int_{\Omega} h \cdot \frac{\partial m_\tau}{\partial \tau} dx \\ \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} h_d(m_\tau) \cdot m_\tau dx &= 2 \int_{\Omega} h_d(m_\tau) \cdot \frac{\partial m_\tau}{\partial \tau} dx \\ \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} \phi(m_\tau) dx &= \int_{\Omega} \nabla_m \phi(m_\tau) \cdot \frac{\partial m_\tau}{\partial \tau} dx \end{aligned}$$

**Exercice 3.2** On considère pour  $g = (g_0, g_1) \in (\mathbb{S}^2)^2$  le problème de minimisation

$$\min_{m \in H_g^1([0,1], \mathbb{S}^2)} \int_0^1 \left| \frac{dm}{dt} \right|^2 dt \quad (3.15)$$

où  $H_g^1([0,1], \mathbb{S}^2) = \{m \in H^1([0,1], \mathbb{S}^2) \text{ tel que } m(0) = g_0, m(1) = g_1\}$ .

- Montrer que le problème de minimisation (3.15) a toujours une solution.
- Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème (3.15).
- Résoudre l'équation d'Euler-Lagrange précédente et calculer explicitement la (ou les) solution(s). On commencera par montrer que  $\left| \frac{dm}{dt} \right|^2 = Cte$ . On pourra distinguer les cas  $g_0 = -g_1$  et  $g_0 \neq -g_1$ .

**Exercice 3.3** Singularités dans les applications harmoniques. On considère  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ouvert borné et régulier, et  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Enfin on considère

le problème de minimisation

$$\min_{m \in H_g^1(\Omega, \mathbb{S}^2)} \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx \quad (3.16)$$

où  $H_g^1(\Omega, \mathbb{S}^2) = \{m \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2) \text{ tel que } m|_{\partial\Omega} = g\}$ .

- Montrer que le problème de minimisation (3.15) a toujours une solution.
- Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème (3.16).
- Montrer que si  $\Omega$  contient 0 et si  $g(x) = \frac{x}{|x|}$ , alors  $m(x) = \frac{x}{|x|}$  est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange. Conclure qu'il existe des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange qui ne sont pas régulières ( $m \in H^1(\Omega)$  mais  $m \notin C^\infty(\Omega)$ ).



# Chapitre 4

## Particules mono-domaines

Lorsque les particules magnétiques considérées sont d'une taille inférieure à la longueur d'échange, on imagine que l'énergie d'échange est prépondérante et que la distribution d'aimantation varie très peu à l'intérieur de l'échantillon. Une bonne approximation doit alors être obtenue en considérant des distributions constantes (en espace) et en minimisant l'énergie sous cette contrainte supplémentaire. Néanmoins, pour donner un cadre rigoureux à cette intuition, il faut pouvoir considérer des suites de problèmes de minimisation dépendant d'un paramètre (la taille  $\lambda$  de la particule) et considérer la "limite" de ces problèmes de minimisation lorsque  $\lambda$  tend vers 0. Faire converger des problèmes de minimisation dépendant d'un paramètre n'est pas, a priori, évident et peut se faire en utilisant la théorie de la  $\Gamma$ -convergence. Le but de ce chapitre est de donner les principes de base de cette théorie et de l'appliquer au problème en question. La plupart du matériel de ce chapitre provient de [4] et nous renvoyons le lecteur intéressé par obtenir de plus amples informations sur la  $\Gamma$ -convergence au livre pédagogique d'A. Braides [1] ou au polycopié [2].

### 4.1 Cadre de la $\Gamma$ -convergence

Dans cette partie, on se place dans un espace de Hilbert<sup>1</sup>  $H$ , et l'on considère le problème de minimisation dépendant du paramètre  $\lambda > 0$

$$(P_\lambda) \quad \min_{u \in H} \mathcal{E}_\lambda(u).$$

---

<sup>1</sup>Nous décrivons ici la  $\Gamma$ -convergence dans les espaces de Hilbert. Il existe aussi des développements plus raffinés, par exemple dans les espaces de Banach, voire les espaces métriques [2].

dans lequel

$$\mathcal{E}_\lambda : H \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}.$$

De même, nous considérons le problème (qui sera le problème limite lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ )

$$(P_0) \quad \min_{u \in H} \mathcal{E}_0(u).$$

où

$$\mathcal{E}_0 : H \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}.$$

On considère enfin une topologie  $\mathcal{T}$  pour la convergence dans  $H$  (généralement la topologie forte ou faible)

**Définition 1.** *On dit que la famille de problèmes de minimisation  $(P_\lambda)_{\lambda>0}$   $\Gamma$ -converge vers  $P_0$  lorsque  $\lambda$  tend vers 0 si l'on a les deux propriétés suivantes pour tout  $u_0 \in H$  :*

- *Pour toute famille  $(u_\lambda)_{\lambda>0}$  convergeant vers  $u_0$  pour la topologie  $\mathcal{T}$ , on a*

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(u_\lambda) \geq \mathcal{E}_0(u_0). \quad (4.1)$$

- *Il existe une famille  $(u_\lambda)_{\lambda>0}$  convergeant vers  $u_0$  pour la topologie  $\mathcal{T}$ , telle que l'on ait*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(u_\lambda) = \mathcal{E}_0(u_0). \quad (4.2)$$

On note alors  $\mathcal{E}_\lambda \xrightarrow{\Gamma(\mathcal{T})} \mathcal{E}_0$ .

**Remarque 2.** *Le cadre de la  $\Gamma$ -convergence ne fournit pas le problème limite  $P_0$ . Il faut le proposer et démontrer que c'est celui-ci qui convient. En pratique, on détermine  $P_0$  en essayant de trouver la limite de  $\mathcal{E}_\lambda(u_\lambda)$  pour des suites  $(u_\lambda)_{\lambda>0}$  qui convergent vers  $u_0$ . Cette limite candidate sera  $\mathcal{E}_0(u_0)$ .*

**Remarque 3.** *Le gros avantage des deux propriétés à démontrer pour avoir  $\Gamma$ -convergence d'une famille de problèmes de minimisation est qu'elle ne font en aucune façon intervenir le fait que  $u_0$  (resp.  $u_\lambda$ ) est ou n'est pas un minimiseur de  $\mathcal{E}_0$  (resp.  $\mathcal{E}_\lambda$ ). On a ainsi deux propriétés "génériques" à démontrer.*

Le principal résultat qui a fait le succès de cette théorie est la convergence des minimiseurs.

**Théorème 5.** *Soit  $(u_\lambda)_{\lambda>0}$  une famille de minimiseurs pour les problèmes de minimisation  $(P_\lambda)$ . On suppose que  $\mathcal{E}_\lambda \xrightarrow{\Gamma(\mathcal{T})} \mathcal{E}_0$ , et que de  $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ , on peut extraire une sous suite convergeant vers  $u_0$  dans  $H$  pour la topologie  $\mathcal{T}$ . Alors  $u_0$  est une solution de  $(P_0)$  et de plus*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(u_\lambda) = \mathcal{E}_0(u_0). \quad (4.3)$$



## 4.2. APPLICATION AU PROBLÈME DU MICROMAGNÉTISME DANS LES PARTICULES MONODOMAINES

*Démonstration.* On considère donc  $(u_\lambda)_{\lambda>0}$  de  $H$  telle que

$$\forall \lambda > 0, u_\lambda \text{ minimise } \mathcal{E}_\lambda \text{ dans } H.$$

On suppose aussi que l'on peut extraire de  $(u_\lambda)_{\lambda>0}$  une sous suite (que l'on note toujours  $(u_\lambda)_{\lambda>0}$  par commodité, qui converge dans  $H$  pour la topologie  $\mathcal{T}$  vers  $u_0 \in H$ ).

D'après la première propriété de la  $\Gamma$ -convergence, on a nécessairement que

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(u_\lambda) \geq \mathcal{E}_0(u_0). \quad (4.4)$$

Par ailleurs, la deuxième propriété de la  $\Gamma$ -convergence entraîne que pour tout  $v_0 \in H$ , il existe une suite  $(v_\lambda)_{\lambda>0}$  d'éléments de  $H$  telle que

$$\begin{aligned} v_\lambda &\xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} v_0 \text{ pour la topologie } \mathcal{T} \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(v_\lambda) &= \mathcal{E}_0(v_0). \end{aligned}$$

On a donc puisque  $(u_\lambda)_{\lambda>0}$  est une famille de minimiseurs

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(v_0) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(v_\lambda) \\ &\geq \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(u_\lambda) \\ &\geq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(u_\lambda) \\ &\geq \mathcal{E}_0(u_0) \end{aligned}$$

ce qui montre que  $u_0$  est une solution du problème de minimisation  $P_0$ . La relation (4.3) s'obtient en considérant  $v_0 = u_0$ . Les inégalités précédentes deviennent alors toutes des égalités.  $\square$

## 4.2 Application au problème du micromagnétisme dans les particules monodomaines

Afin d'étudier des petits échantillons ferromagnétiques, on va considérer un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  borné et le mettre à l'échelle en prenant, pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\Omega_\lambda = \lambda\Omega$ . On posera aussi, pour  $m \in H^1(\Omega_\lambda)$ ,

$$m_\lambda(x) = m\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

de sorte que  $m_\lambda \in H^1(\Omega)$  est défini sur un ouvert fixe qui ne dépend pas de  $\lambda$ . En calculant ensuite l'énergie micromagnétique en fonction de  $\lambda$ , on trouve sans difficulté

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(m) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\lambda} |\nabla m|^2 dx - \int_{\Omega_\lambda} h \cdot m dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\lambda} h_d(m) \cdot m dx + \int_{\Omega_\lambda} G(m) dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_\lambda} |\nabla m_\lambda|^2 dx - \lambda^3 \int_{\Omega} h \cdot m_\lambda dx \\
&\quad - \frac{\lambda^3}{2} \int_{\Omega_\lambda} h_d(m_\lambda) \cdot m_\lambda dx + \lambda^3 \int_{\Omega} G(m_\lambda) dx \quad (4.5) \\
&=: \mathcal{E}'(m_\lambda).
\end{aligned}$$

(Le seul terme qui ne soit pas complètement évident dans le calcul précédent est l'énergie démagnétisante et il faut remarquer que  $h_d$  est en fait un multiplicateur de Fourier dont le symbole est homogène de degré 0.)

On enfin pour  $m_\lambda \in H^1(\Omega, \mathcal{S}^2)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\lambda(m_\lambda) &= \frac{\mathcal{E}'(m_\lambda)}{\lambda^3} \\
&= \frac{1}{2\lambda^2} \int_{\Omega_\lambda} |\nabla m_\lambda|^2 dx - \int_{\Omega} h \cdot m_\lambda dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\lambda} h_d(m_\lambda) \cdot m_\lambda dx + \int_{\Omega} G(m_\lambda) dx,
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{E}_\lambda(m_\lambda) = +\infty$$

si  $m_\lambda \notin H^1(\Omega, \mathcal{S}^2)$ .

On pense que le facteur  $\frac{1}{2\lambda^2}$  doit pénaliser les configurations non constantes et l'on est ainsi amené à poser

$$H_0 = \{m \in H^1(\Omega, \mathcal{S}^2) \text{ tel que } m \text{ est constant sur } \Omega\}, \quad (4.6)$$

et

$$\mathcal{E}_0(m_\lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{si } m_\lambda \notin H_0 \\ \int_{\Omega} h \cdot m_\lambda dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\lambda} h_d(m_\lambda) \cdot m_\lambda dx + \int_{\Omega} G(m_\lambda) dx & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.7)$$

On va ensuite montrer le théorème suivant

## 4.2. APPLICATION AU PROBLÈME DU MICROMAGNÉTISME DANS LES PARTICULES MONO-

**Théorème 6.** *On a*

$$\mathcal{E}_\lambda \xrightarrow{\Gamma(H^1)} \mathcal{E}_0 \text{ lorsque } \lambda \rightarrow 0, \quad (4.8)$$

où la convergence à lieu par rapport à la topologie forte dans  $H^1(\Omega)$ .

*Démonstration.* Il s'agit de montrer les deux propriétés (4.1-4.2) de la définition de la  $\Gamma$ -convergence. On prend donc  $m_0 \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , et on sépare l'étude en plusieurs cas.

**1er cas.** Si  $m_0 \notin H^1(\Omega, \mathcal{S}^2)$ .

On a  $\mathcal{E}_0(m_0) = +\infty$ , et l'on ne peut pas trouver de suite  $m_\lambda \in H^1(\Omega, \mathcal{S}^2)$  qui converge vers  $m_0$  donc

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(m_\lambda) = +\infty,$$

pour toute suite  $(m_\lambda)$  qui converge vers  $m_0$  dans  $H^1$ , ce qui établit le résultat.

**2ème cas.** Si  $m_0 \in H^1(\Omega, \mathcal{S}^2)$  n'est pas constant.

Soit  $(m_\lambda)_{\lambda>0}$  une famille qui converge vers  $m_0$  dans  $H^1$ . Puisque  $m_0$  n'est pas constant, alors  $\liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2\lambda^2} \int_{\Omega} |\nabla m_\lambda|^2 dx = +\infty$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(m_\lambda) &\geq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2\lambda^2} \int_{\Omega} |\nabla m_\lambda|^2 dx - |h||\Omega| \\ &= +\infty \\ &= \mathcal{E}_0(m_0) \end{aligned}$$

ce qui montre (4.1). On démontre (4.2) dans ce cas en prenant  $\forall \lambda > 0$ ,  $m_\lambda = m_0$ .

**3ème cas.** Si  $m_0 \in H^1(\Omega, \mathcal{S}^2)$  est constant.

Dans ce dernier cas, en prenant  $m_\lambda = m_0$ , on a

$$\mathcal{E}_\lambda(m_\lambda) = \mathcal{E}_0(m_0)$$

ce qui démontre (4.2). Pour (4.1), on considère une famille  $(m_\lambda)_{\lambda>0}$  telle que  $m_\lambda \rightarrow m_0$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  fortement dans  $H^1$ , et l'on considère le cas où  $m_\lambda \in H^1(\Omega, \mathcal{S}^2)$  (sinon  $\liminf_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(m_\lambda) = +\infty$  et il n'y a rien à démontrer).

Comme  $m_\lambda \rightarrow m_0$  fortement dans  $L^2$  on a

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} - \int_{\Omega} h \cdot m_\lambda dx &= - \int_{\Omega} h \cdot m_0 dx \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \int_{\Omega} h_d(m_\lambda) \cdot m_\lambda dx &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} h_d(m_0) \cdot m_0 dx \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Omega} G(m_\lambda) dx &= \int_{\Omega} G(m_0) dx \end{aligned}$$

(la dernière égalité s'obtenant en extrayant une éventuelle sous suite de  $(m_\lambda)_{\lambda>0}$ ), de sorte que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_0(m_\lambda) = \mathcal{E}_0(m_0). \quad (4.9)$$

Enfin, puisque  $\mathcal{E}_\lambda(m_\lambda) = \mathcal{E}_0(m_\lambda) + \frac{1}{2\lambda^2} \int_{\Omega} |\nabla m_\lambda|^2 dx$  on déduit (4.1).  $\square$

**Remarque 4.** Dans le problème de minimisation  $P_0$ , plusieurs termes sont faciles à calculer puisque les configurations pertinentes sont constantes en espace. Ainsi, si  $m = \bar{m}\chi_\Omega$ , on a

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} h \cdot m dx &= -|\Omega|h \cdot \bar{m}, \\ \int_{\Omega} G(m) dx &= |\Omega|G(\bar{m}). \end{aligned}$$

En revanche, l'énergie démagnétisante n'a pas d'expression explicite. Elle "voit" la forme du domaine  $\Omega$  et pas seulement son volume. Ainsi, en écrivant  $\bar{m} = \sum_{i=1}^3 \bar{m}_i e_i$ , on a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{\Omega} h_d(m) \cdot m dx &= -\frac{1}{2} \bar{m} \cdot \int_{\Omega} h_d(\bar{m}\chi_\Omega) dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \bar{m}_i \bar{m}_j \int_{\Omega} h_d(e_i) \cdot e_j dx \\ &= (D\bar{m}, \bar{m}), \end{aligned}$$

où  $D$  est la matrice  $3 \times 3$  donnée par

$$D_{ij} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} h_d(e_i) \cdot e_j dx.$$

On voit sans peine grâce aux propriétés du champ démagnétisant (??) et (??) que  $D$  est une matrice symétrique positive dont toutes les valeurs propres sont comprises entre 0 et  $|\Omega|/2$ . Néanmoins, l'expression explicite de la matrice  $D$  ne peut être obtenue que dans quelques cas de domaines  $\Omega$  particuliers (comme par exemple les ellipsoïdes, voir [10]).

## 4.3 Courbes d'hysteresis et astroïde de Stoner-Wohlfahrt

Il paraît naturel d'étudier le problème limite

$$\min_{\bar{m} \in \mathcal{S}^2} \mathcal{E}_0(\bar{m}\chi_\Omega), \quad (4.10)$$

ou, ce qui revient au même d'après la remarque 4

$$\min_{\bar{m} \in \mathcal{S}^2} (D\bar{m}, \bar{m}) + |\Omega| (G(\bar{m}) - (h, \bar{m})) \quad (4.11)$$

en fonction du paramètre  $h \in \mathbb{R}^3$ .

### 4.3.1 Un premier exemple instructif

Il s'avère que le problème précédent est déjà trop complexe pour comprendre exactement ce qu'il se passe. On le simplifie de façon drastique en faisant une étude de la stabilité de  $m = \pm e_1$  dans un cas où la direction  $Ox$  est "énormément" privilégiée. Ainsi nous allons supposer

- que l'anisotropie est uniaxe dans la direction  $Ox$  :  $G(m) = m_2^2$
- que la matrice  $D$  se diagonalise dans les trois directions  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  (nous reviendrons sur cette hypothèse qui s'avère naturelle pour les particules d'épaisseur fine),

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix},$$

avec  $0 < d_1 < d_2 < d_3 \leq \frac{|\Omega|}{2}$ .

- que le champ  $h$  n'a qu'une composante horizontale  $h = (h, 0, 0)$  (nous relaxerons cette contrainte ensuite),
- que les aimantations appartiennent au plan  $Oxy$  et plus précisément nous étudierons la stabilité de  $m = \pm e_1$ ,
- que  $|\Omega| = 1$ .

Quitte à tout diviser par une constante, et en utilisant  $m_1^2 + m_2^2 = 1$ , on se ramène ainsi au problème

$$\min_{m \in \mathcal{S}^1} \alpha m_1^2 - hm_1,$$

où  $\alpha = d_1 - d_2 - 1 < 0$ . On pose dans la suite  $\mathcal{F}(m) = \alpha m_1^2 - hm_1$ .

On a alors la proposition suivante :

**Proposition 5.** *La solution du problème de minimisation est*

$$m = \begin{cases} e_1 & \text{si } h > 0, \\ -e_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Par symétrie, il suffit de faire le cas où  $h > 0$ . On a alors

$$\forall m \in \mathcal{S}^2, \mathcal{F}(m) \geq \alpha - h = \mathcal{F}(e_1),$$

dans laquelle la première inégalité est stricte si  $m \neq e_1$ .  $\square$

Toutefois, si  $e_1$  est le minimiseur global de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{S}^1$ , pour  $h > 0$ ,  $e_1$  reste stable pour des champs magnétiques légèrement négatifs.

**Proposition 6.**  *$m = e_1$  est un minimum local de  $\mathcal{F}$  pour tout  $h$  tel que*

$$h > 2\alpha. \quad (4.12)$$

*Démonstration.* On considère des variations de  $e_1$  de la forme  $m = (\sqrt{1 - \epsilon^2}, \epsilon)$  pour  $|\epsilon| < \frac{1}{2}$ , et l'on fait un développement limité de  $\mathcal{F}(m_\epsilon)$  au voisinage de  $\epsilon = 0$ . On trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(m_\epsilon) &= \alpha m_{\epsilon,1}^2 - h m_{\epsilon,1} \\ &= \alpha(1 - \epsilon^2) - h\sqrt{1 - \epsilon^2} \\ &= \alpha - h + \epsilon^2 \left( -\alpha + \frac{h}{2} \right) + O(\epsilon^4). \end{aligned}$$

Lorsque  $h > 2\alpha$  le coefficient en  $\epsilon^2$  est positif montrant que  $m = e_1$  est un minimum local stable.  $\square$

Enfin, pour  $h < 2\alpha$  on a le résultat suivant

**Proposition 7.** *Sous la condition*

$$|h| > 2|\alpha| \quad (4.13)$$

*les seuls points critiques de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{S}^1$  sont  $m = \pm e_1$ .*

### 4.3. COURBES D'HYSTERESIS ET ASTROÏDE DE STONER-WOHLFAHRT 43

*Démonstration.* L'équation d'Euler-Lagrange du problème est

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial m}(m) = \lambda m,$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 2\alpha m_1 - h \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit que  $m_2 = 0$  (l'équation  $2\alpha m_1 - h = 0$  n'a pas de solution  $m_1 \in [-1, 1]$  sous la condition (4.13)).  $\square$

On a alors la courbe suivante qui montre la stabilité (ou l'instabilité) de  $m = \pm e_1$ . Ainsi, pour des champs magnétiques  $h$  très grands, l'échantillon

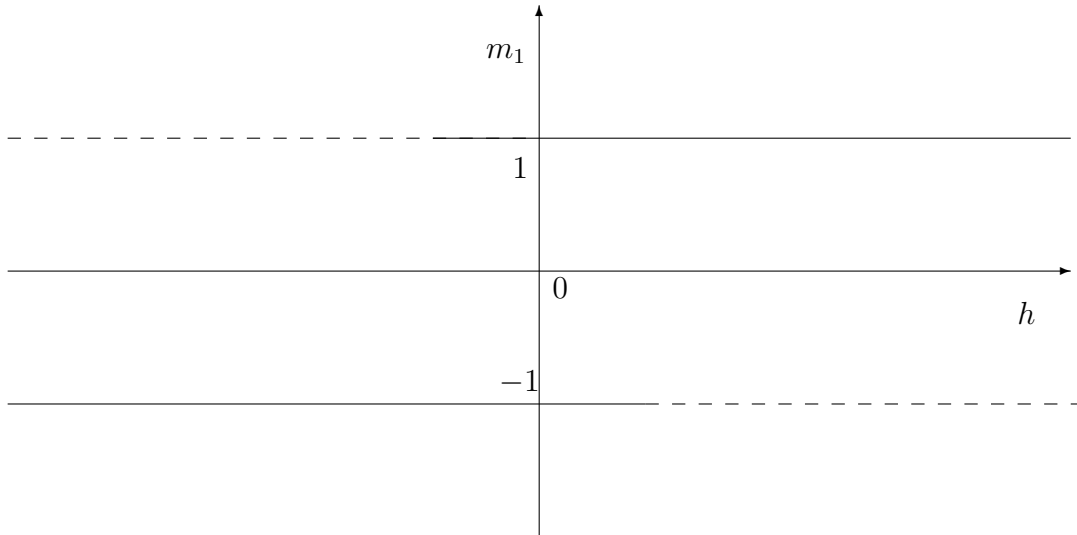


FIG. 4.1 – Courbe d'hysteresis du problème (4.12).

est saturé dans la direction du champ magnétique,  $m = e_1$ . Lorsque l'on diminue le champ, l'aimantation reste égale à  $e_1$  tant que  $h > 0$ . Ensuite on diminue toujours, c'est-à-dire que l'on change la direction du champ  $m = e_1$  reste stable tant que  $h > 2\alpha$  bien que ce ne soit pas un minimiseur global (seulement local). En dessous de  $h = 2\alpha$ , l'aimantation change brutalement de direction,  $e_1$  devient instable au profit de  $m = -e_1$  qui sature l'échantillon dans l'autre direction. En remontant le champ magnétique extérieur, la bifurcation a lieu en  $h = -2\alpha$ . L'aimantation solution dépend non seulement du champ extérieur, mais aussi de la direction de laquelle on vient (ou de l'histoire passée). Ce phénomène s'appelle l'*hysteresis*.

### 4.3.2 L'astroïde de Stoner-Wohlfahrt

Une généralisation de la situation précédente s'obtient en considérant maintenant  $h = (h_1, h_2)$ , et l'on cherche les bifurcations en 2d maintenant. On peut aussi, pour simplifier l'étude paramétrer  $m$  sous la forme  $m = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ . L'énergie (en fonction de  $\phi$ ) prend maintenant la forme (où l'on a regroupé l'anisotropie et le terme démagnétisant en une unique fonction  $g(\phi)$ )

$$\mathcal{F}(\phi) = g(\phi) - h_1 \cos(\phi) - h_2 \sin(\phi).$$

Dorénavant, les points critiques de  $\mathcal{F}$  sont solutions de  $\mathcal{F}'(\phi) = 0$  ou encore

$$g'(\phi) + h_1 \sin(\phi) - h_2 \cos(\phi) = 0, \quad (4.14)$$

alors que la stabilité est caractérisée par

$$\mathcal{F}''(\phi) = g''(\phi) + h_1 \cos(\phi) + h_2 \sin(\phi) > 0.$$

Les changements de comportement (stabilité-instabilité) de la solution sont alors obtenus lorsque  $\mathcal{F}''$  s'annule et change de signe, de sorte que l'on cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} g'(\phi) + h_1 \sin(\phi) - h_2 \cos(\phi) = 0, \\ g''(\phi) + h_1 \cos(\phi) + h_2 \sin(\phi) = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

On détermine les champs magnétiques critiques en résolvant ce système en  $h = (h_1, h_2)$ . On trouve aisément

$$h_1 = -g'(\phi) \sin(\phi) - g''(\phi) \cos(\phi), \quad (4.16)$$

$$h_2 = g'(\phi) \cos(\phi) - g''(\phi) \sin(\phi). \quad (4.17)$$

Le cas d'une anisotropie uniaxe dans la direction horizontale se traite en prenant  $g(\phi) = \sin^2(\phi)$  et le système (4.17-4.17) devient alors

$$h_1 = -2 \cos^3(\phi), \quad (4.18)$$

$$h_2 = 2 \sin^3(\phi). \quad (4.19)$$

Ceci est l'équation paramétrique d'une astroïde qui a été décrite dans [13] la première fois. Par ailleurs, en posant  $h(\phi) = 2(-\cos^3(\phi), \sin^3(\phi))$ , l'astroïde de Stoner-Wohlfahrt peut être vue comme l'enveloppe de la famille de droites d'équations

$$D_\phi : (h - h(\phi)) \cdot (\sin(\phi), -\cos(\phi)) = 0.$$

Cela montre que pour un champ donné, les seules solutions de (4.14), sont les valeurs de  $\phi$  pour lesquelles

$$h - h(\phi) \parallel m.$$



On obtient donc, pour un champ magnétique  $h$  donné, des solutions en cherchant les droites passant par  $h$  et tangentes à l'astroïde. Ces droites sont au nombre de 2 si  $h$  est en dehors de l'astroïde et 4 sinon. Par ailleurs, les aimantations solutions sont dirigées par les droites en question. Cette représentation "géométrique" de la solution a été proposée dans [12].

Des généralisations de la méthode à des anisotropies non quadratiques sont possibles et modifient la forme de l'astroïde qui va maintenant se déformer en fonction de l'anisotropie. D'autres directions de généralisation ont par ailleurs été explorées comme par exemple la situation tridimensionnelle. L'astroïde devient une surface beaucoup plus compliquée à caractériser (voir par exemple [14]).

L'exemple précédent montre que l'étude des minimiseurs globaux de l'énergie du micromagnétisme est insuffisante. Il faut aussi concentrer notre attention sur les minimiseurs locaux qui sont responsables de la courbe d'hysteresis de réponse du matériau à un champ magnétique. Le travail fourni dans la première partie de ce chapitre se révèle donc insuffisant puisque, pour l'instant, la théorie de la  $\Gamma$ -convergence que nous avons développée est incapable de traiter les minimas locaux. Il existe néanmoins une extension de cette théorie due à l'origine à Kohn et Sternberg [9] qui permet de comprendre le comportement des minimas locaux vis-à-vis de la  $\Gamma$ -convergence. C'est ce que nous allons décrire maintenant dans le cadre précédent des particules monodomaines.

## 4.4 $\Gamma$ -convergence et minima locaux

L'application de la théorie de la  $\Gamma$ -convergence pour des minimiseurs locaux a été établie dans [9]. Appliquée à notre problème l'énoncé devient le suivant.

**Théorème 7.** *Soit  $m_0$  un minimiseur local strict de  $\mathcal{E}_0$  pour la topologie  $H^1$ . Alors il existe  $\lambda_0 > 0$  et une famille  $(m_\lambda)_{0 < \lambda < \lambda_0}$  telle que  $m_\lambda$  soit un minimiseur local (pour la norme  $H^1$ ) de  $\mathcal{E}_\lambda$  et de plus*

$$m_\lambda \rightarrow m_0 \text{ fortement dans } H^1 \text{ lorsque } \lambda \rightarrow 0. \quad (4.20)$$

*Démonstration.* On réécrit l'hypothèse sous la forme

$$\exists \eta > 0, \forall m \in H^1(\Omega) \text{ tel que } 0 < \|m - m_0\|_{H^1} \leq \eta, \mathcal{E}_0(m) > \mathcal{E}_0(m_0), \quad (4.21)$$

et on décompose la preuve en trois étapes.

**1ère étape.** On construit un minimiseur  $m_\lambda$  de  $\mathcal{E}_\lambda$  sur

$$\mathcal{B} = \{m \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ tel que } \|m - m_0\|_{H^1} \leq \eta\}.$$

On utilise pour cela la méthode directe du calcul des variations. La méthode est exactement la même que celle vue dans le chapitre ?? et l'on obtient directement l'existence d'une solution  $m_\lambda$  dans  $\mathcal{B}$ . Par ailleurs, on a aussi comme sous-produit

$$\mathcal{E}_\lambda(m_\lambda) \leq \mathcal{E}_\lambda(m_0) = \mathcal{E}_0(m_0), \quad (4.22)$$

$$m_\lambda \in H^1(\Omega, \mathcal{S}^2). \quad (4.23)$$

La deuxième résultat vient du fait que l'on aurait  $\mathcal{E}_\lambda(m_\lambda) = +\infty$  dans le cas contraire.

**2ème étape.** On montre que pour  $\lambda < \lambda_0$  assez petit,  $m_\lambda$  est un minimiseur local de  $\mathcal{E}_\lambda$ .

D'après l'étape précédente, il suffit de montrer que  $m_\lambda$  est en fait "à l'intérieur" de  $\mathcal{B}$ . En raisonnant par l'absurde on suppose qu'il existe une suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|m_{\lambda_n} - m_0\|_{H^1} = \eta. \quad (4.24)$$

D'après (4.22) on a que  $(m_{\lambda_n})$  est uniformément bornée dans  $H^1$  et l'on peut donc supposer (quitte à extraire une sous-suite que l'on ne renomme pas) que

$$\begin{aligned} m_{\lambda_n} &\rightharpoonup m_{\lambda_\infty} \text{ faiblement dans } H^1, \\ m_{\lambda_n} &\rightarrow m_{\lambda_\infty} \text{ fortement dans } L^2, \\ m_{\lambda_n} &\rightarrow m_{\lambda_\infty} \text{ p.p. ,} \end{aligned}$$

de sorte que  $m_{\lambda_\infty} \in H^1(\Omega, \mathcal{S}^2)$ . Par ailleurs, de (4.22), on déduit aussi que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla m_{\lambda_n}|^2 dx = 0,$$

de sorte que  $m_{\lambda_\infty}$  est constant et qu'en fait la convergence est forte dans  $H^1$ . On a alors, en passant à la limite dans (4.24)

$$\|m_{\lambda_\infty} - m_0\| = \eta, \quad (4.25)$$

puis en passant à la limite dans (4.22) et en utilisant le fait que  $\mathcal{E}_\lambda$   $\Gamma$ -converge vers  $\mathcal{E}_0$  pour la topologie forte de  $H^1$

$$\mathcal{E}_0(m_{\lambda_\infty}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_{\lambda_n}(m_{\lambda_n}) \leq \mathcal{E}_0(m_0). \quad (4.26)$$

Les deux résultats (4.25) et (4.26) sont en contradiction avec l'hypothèse du théorème (4.21).

**3ème étape.** On montre (4.20).

En réutilisant la partie précédente (et l'estimation (4.22)), on peut quitte à extraire une sous-suite (que l'on ne renomme pas) de nouveau supposer

$$\begin{aligned} m_\lambda &\rightarrow m_{\lambda_\infty} \text{ fortement dans } H^1, \\ m_\lambda &\rightarrow m_{\lambda_\infty} \text{ fortement dans } L^2, \\ m_\lambda &\rightarrow m_{\lambda_\infty} \text{ p.p. ,} \end{aligned}$$

où comme précédemment,  $m_{\lambda_\infty} \in H^1(\Omega, \mathcal{S}^2)$  est constante sur  $\Omega$ . Par compacité,  $m_{\lambda_\infty} \in \mathcal{B}$ , alors que de nouveau par application du critère (4.1) de la  $\Gamma$ -convergence, on a

$$\mathcal{E}_0(m_{\lambda_\infty}) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{E}_\lambda(m_\lambda) \leq \mathcal{E}_0(m_0). \quad (4.27)$$

Le seul moyen de ne pas contredire (4.21) est alors que  $m_{\lambda_\infty} = m_0$ . L'unicité de la limite prouve la convergence de toute la suite (et pas seulement d'une sous-suite extraite).

□

## 4.5 Exercices

**Exercice 4.1** Cadre général de la  $\Gamma$ -convergence et des minimiseurs locaux.

Soit  $X \subset Y$  deux espaces de Hilbert et  $\mathcal{T}$  la topologie sur  $Y$ . On considère une famille  $(\mathcal{E}_\lambda)_{\lambda>0} : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  de fonctionnelles et  $\mathcal{E}_0 : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  telles que

$$\mathcal{E}_\lambda \xrightarrow{\Gamma(\mathcal{T})} \mathcal{E}_0$$

quand  $\lambda$  tend vers 0. On suppose que l'on a les deux propriétés suivantes pour toute suite  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tendant vers 0.

1. De toute suite  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mathcal{E}_{\lambda_j}(u_j) \leq C < +\infty$ , on peut extraire une sous-suite qui converge pour la topologie  $\mathcal{T}$  dans  $X$ .
2. Pour tout  $u_0 \in X$  et tout  $\delta > 0$ , l'infimum de  $\mathcal{E}_{\lambda_j}$  sur la boule

$$\mathcal{B} = \{u \in X, \|u - u_0\|_Y \leq \delta\}$$

est atteint pour tout  $j$ .

Montrer que si  $u_0$  est un minimiseur de  $\mathcal{E}_0$  isolé dans  $Y$  (c'est-à-dire que  $\mathcal{E}_0(v) > \mathcal{E}_0(u_0)$  lorsque  $0 < \|u - u_0\|_Y \leq \delta$  pour  $\delta > 0$ ), alors il existe une suite  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  qui converge vers 0, et une suite  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de minimiseurs de  $\mathcal{E}_{\lambda_j}$  locaux dans  $Y$  telles que  $u_j \rightarrow u_0$  pour la topologie de  $Y$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$ .

# Chapitre 5

## Parois et domaines dans les films minces

Les photos que l'on a présentée dans le premier chapitre ne montrent pas de champ d'aimantation constants dans les échantillons. A l'inverse, elles montrent des structures en domaines séparés par des parois très fines. Dans les domaines, l'aimantation varie peu ou pas du tout alors qu'à travers les parois, elle subit de très brusques variations. Le fait que les échantillons ne sont pas du tout mono-domaines s'explique facilement en considérant que leur taille est grande devant la longueur d'échange. En revanche, prédire d'après le modèle du micromagnétisme la (ou les) configurations en domaines observées ainsi que le comportement de l'aimantation à l'intérieur des parois est autrement plus délicat. Nous allons dans ce chapitre, expliquer la construction de Van den Berg qui permet une prédiction des structures en domaines observées et décrire les deux types de parois classiques (parois de Bloch, et de Néel) qui décrivent le comportement de l'aimantation dans certains régimes.

### 5.1 Heuristique

Les parois et domaines apparaissent en l'absence de champ extérieur dans les matériaux ferromagnétiques à cause de la compétition entre les différents termes énergétiques

$$\mathcal{E}(m) = A \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |H_a(m)|^2 dx + \int_{\Omega} G(m) dx.$$

Suivant les "poids" respectifs de chacun de ces termes, des effets concurrentiels apparaissent donnant lieu aux structures (parfois très complexes) que l'on observe expérimentalement.

### 5.1.1 Les films minces

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur les matériaux doux (par exemple le *permalloy*<sup>1</sup> et dans le cas, particulièrement important pour les applications pratiques, où le matériau se présente sous la forme d'un film mince. On considère donc le domaine  $\Omega = \omega \times ]0, \eta[$ , dans lequel l'épaisseur  $\eta$  est "beaucoup plus petite" que le diamètre de  $\omega$  (voir Fig. 5.1)

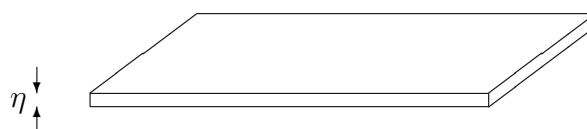


FIG. 5.1 – Un film mince de matériau ferromagnétique.

En supposant que l'aimantation est invariante dans l'épaisseur du matériau<sup>2</sup> (le film est mince),

$$m(x, y, z) = m(x, y), \quad (5.1)$$

et qu'il n'y a pas d'anisotropie (le matériau est doux), le problème revient à comprendre la compétition entre le terme d'échange et le terme démagnétisant.

Dans le régime dans lequel on se place, l'énergie d'échange n'est pas la plus pénalisante. Il faut donc s'intéresser aux configurations bidimensionnelles qui minimisent l'énergie démagnétisante seulement. Ainsi, on est conduit à essayer de réaliser  $H_d(m) = 0$ , ou ce qui revient au même, à chercher des configurations bidimensionnelles à divergence nulles dans  $\Omega$  et tangentes au bord sur  $\partial\Omega$ . En regardant sur le dessus (ou le dessous) de  $\Omega$ , on voit que  $m$  doit être planaire (sinon, la composante normale de  $m$  n'est pas nulle engendrant un champ démagnétisant non nul). On a alors nécessairement

$$m(x, y) = (m_1(x, y), m_2(x, y), 0), \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>Le permalloy est un alliage de Fer et de Nickel qui est caractérisé par une très faible anisotropie, généralement négligeable.

<sup>2</sup>Ceci est nullement évident, et demande à être justifié dans les applications que l'on considère. Le comportement de l'aimantation dans l'épaisseur du matériau est dans la pratique extrêmement complexe et donne lieu à une très grande variété de comportement différents et de parois différentes (parois de Bloch ou de Néel symétriques ou asymétriques). Nous reviendrons sur ce point plus tard.

et il reste à résoudre  $|m| = 1$  et  $\operatorname{div} m = 0$  dans  $\Omega$ .

En se servant de (5.2), (et en supposant que  $\omega$  est simplement connexe), on a

$$\operatorname{div} m = 0 \text{ sur } \omega \Leftrightarrow \exists \psi \text{ tel que } m = \nabla^\perp \psi = \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right),$$

tandis que

$$m \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\omega \Rightarrow \psi = \text{Cte sur } \partial\omega.$$

La fonction  $\psi$  est alors une solution de l'équation eikonale

$$\begin{cases} |\nabla^\perp \psi| = |\nabla \psi| = 1 \text{ sur } \omega, \\ \psi = \text{Cte} = 0 \text{ sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (5.3)$$

Nous allons voir que cette équation ne peut avoir de solution régulière sur tout  $\omega$ . Le prototype des solutions de (5.3) est

$$\psi(x, y) = \operatorname{dist}((x, y), \partial\omega). \quad (5.4)$$

La construction de Van den Berg est une construction géométrique qui permet de dessiner des solutions de (5.3).

### 5.1.2 La construction de Van den Berg

La construction de Van den Berg [15] est une résolution géométrique de (5.3) par la méthode des caractéristiques. La distance au bord croît le long de rayons droits, orthogonaux au bord. Le long de ces rayons, l'aimantation est constante, orthogonale au rayon et dans le sens de l'aimantation au bord. On peut se convaincre du bien fondé de cette approche en calculant la variation de  $m$  le long des directions orthogonales à  $m$ . On a en notant  $m^\perp = (-m_2, m_1)$

$$\begin{aligned} (m^\perp \cdot \nabla)m &= \begin{pmatrix} -m_2 \frac{\partial m_1}{\partial x} + m_1 \frac{\partial m_1}{\partial y} \\ -m_2 \frac{\partial m_2}{\partial x} + m_1 \frac{\partial m_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= m^\perp \operatorname{div} m - \frac{1}{2} \nabla^\perp (|m|^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On construit ainsi localement, près du bord l'aimantation à partir des caractéristiques qui partent du bord normalement à ce dernier. Tant que les caractéristiques ne se croisent pas, l'aimantation est déterminée de manière unique, égale à l'aimantation au bord (voir Fig. 5.2). Lorsque deux caractéristiques se croisent, l'aimantation n'est plus définie, et de la même façon que

FIG. 5.2 – Construction de l'aimantation à partir des caractéristiques issues du bord.

FIG. 5.3 – Deux caractéristiques se coupent. L'aimantation n'est pas définie.

pour les équations hyperboliques, l'aimantation présente une discontinuité (voir Fig. 5.3).

On peut néanmoins caractériser géométriquement les lieux des points de rencontre des caractéristiques qu'il convient de considérer. En effet, si l'on prend deux caractéristiques issues des points  $A$  et  $B$  du bord et qui se coupent en  $C$ , elles délimitent avec le bord un sous ensemble de  $\omega$  que l'on appellera  $\Lambda$ . En intégrant l'équation  $\operatorname{div} m = 0$  sur  $\Lambda$ , on obtient (voir la Fig. 5.4 pour les notations)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Lambda} \operatorname{div} m \, dx \\ &= \int_{\partial\Lambda} m \cdot n \, ds \\ &= \int_{[AC]} m \cdot n \, ds + \int_{[CB]} m \cdot n \, ds + \int_{(BA)} m \cdot n \, ds \\ &= \pm(|AC| - |CB|) \end{aligned}$$

où le signe  $+$  ou  $-$  est choisi en fonction de la valeur de  $m$  par rapport aux normales des segments  $[AC]$  et  $[BC]$ . On obtient ainsi le fait que les deux caractéristiques qui se coupent *doivent* nécessairement avoir la même longueur, ou autrement dit que le cercle de centre  $C$  et de rayon  $CA$  est bitangent (en  $A$  et  $B$ ) à  $\partial\omega$ . La construction de Van den Berg consiste donc à considérer l'ensemble des cercles bitangents à  $\partial\omega$  et le lieu singulier de l'aimantation sera donné par le lieu de leur centres. Les rayons de ces cercles qui touchent le bord permettent de construire (à partir de la valeur de l'aimantation au bord) l'aimantation dans  $\omega$ .

FIG. 5.4 – Deux caractéristiques se coupent en délimitant un domaine  $\Lambda$ .

On a représenté Fig. 5.5-5.8 des constructions de Van den Berg de domaines variés. La première figure représente la configuration de Landau que nous avons déjà rencontrée chapitre ??.

Telle que nous l'avons présentée, la construction de Van den Berg permet de construire la solution correspondant à la fonction  $\psi$  donnée par (5.4). On peut néanmoins compliquer la situation en juxtaposant des configurations



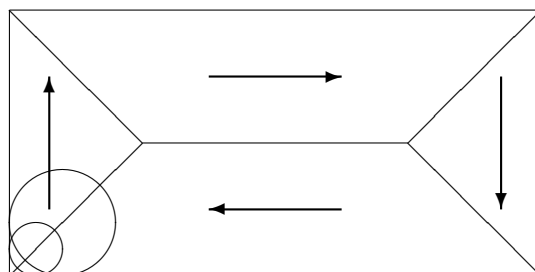


FIG. 5.5 – Construction de Van den Berg de la configuration de Landau.

FIG. 5.6 – Construction de Van den Berg pour un rectangle aux coins arrondis.

obtenues à l'aide de constructions de Van den Berg pour des domaines plus simples. Par exemple, nous avons juxtaposé Fig. ?? 2 configurations obtenues en utilisant la construction de Van den Berg sur des demi-disques. Le résultat n'est pas sans rappeler la configuration expérimentale observée Fig. 1.1.

De cette façon, on peut construire un très grand nombre de solutions du problème que l'on s'était posé, généralisant les configurations de Landau vues au chapitre ??. Il suffit de découper le domaine le long de coupures arbitraires et de juxtaposer des configurations obtenues par construction de Van den Berg sur chaque sous-domaine. Un grand nombre de configurations observées dans les films minces de permalloy (voir Figs. 1.3 et 1.1 par exemple) s'expliquent de cette façon. Il reste deux questions que ce procédé ne permet pas de résoudre.

- *Quelles sont les coupures choisies par la nature ?* Les configurations observées s'obtiennent en coupant un domaine mais les coupures ne sont pas placées arbitrairement. La théorie ne dit pas où il faut placer les coupures pour obtenir des configurations physiquement réalistes.
- *D'où viennent les parois et que se passe-t-il dans les parois ?* Pour l'instant, les configurations obtenues possèdent des parois d'épaisseur nulle. Ce n'est qu'une approximation. Dans la réalité, les parois ont une épaisseur de l'ordre de quelques longueurs d'échange. Le comportement de l'aimantation à l'intérieur de ces parois est crucial pour la compréhension de leur placement.

Ces deux questions sont indiscutablement liées et ont fait l'objet de nombreuses recherches. Si la situation est à peu près claire en ce qui concerne

FIG. 5.7 – Un autre domaine plus complexe.

FIG. 5.8 – Configuration sur un disque obtenue en collant deux constructions de Van den Berg.

la deuxième question (et nous allons en donner les grandes lignes dans les paragraphes suivants), la réponse à la première question est encore largement inconnue.

## 5.2 Les parois de Bloch

### 5.2.1 Les parois à $180^\circ$

### 5.2.2 Les parois obliques

## 5.3 Les parois de Néel

## 5.4 Exercices



# Chapitre 6

## Equation de Landau-Lifschitz

6.1 Précession d'un moment magnétique

6.2 L'équation de Landau-Lifschitz

6.3 Existence de solutions faibles

6.4 Remarques

Non unicité, solutions fortes locales, régimes asymptotiques...

## 6.5 Exercices

# Chapitre 7

## Méthodes numériques pour le calcul du champ démagnétisant

7.1 Le cas des maillages réguliers

7.2 Les méthodes intégrales

7.3 Alternatives par maillages de type exponentiel





## Chapitre 8

# Algorithmes de minimisation pour le calcul de configurations stables



## Chapitre 9

# Discrétisation par éléments finis de l'équation de Landau-Lifschitz



# Chapitre 10

## Quelques problèmes actuels en micromagnétisme mathématique et numérique

10.1 Les films minces

10.2 Les particules vortex

10.3 Modélisation des MRAM



# Chapitre 11

## Conclusion





# Bibliographie

- [1] A. Braides,  $\Gamma$ -convergence for beginners
- [2] A. Braides et De Franceschi
- [3] W.-F. Brown, *Micromagnetics*
- [4] A. DeSimone
- [5] Eells, Lemaire
- [6] R. Hardt article de revue sur les applications harmoniques
- [7] F. Hélein, *Applications harmoniques et repères mobiles*
- [8] A. Hubert et R. Schäfer, *Magnetic domains*
- [9] R. V. Kohn et P. Sternberg, *Local minimisers and singular perturbations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 111A, 69-84, 1989
- [10] Osborn, Champ démagnétique dans les ellipsoïdes
- [11] E. Stein, *Intégrales singulières et fonctions différentiables de plusieurs variables*, Publications Mathématiques d'Orsay, 1966-1967
- [12] J. C. Slonczewski, *Theory of magnetic hysteresis in films and its application to computers*, Research Report RM 003.111.224 (IBM Corp.), 1956
- [13] E. C. Stoner et E. P. Wohlfahrt, *A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys*, Phil. Trans. Roy. Soc. A **240**, 599-644, 1948
- [14] A. Thiaville
- [15] Van den Berg

# Index

- $\Gamma$ -convergence, 33
- Applications harmoniques, 28
- Champ démagnétisant, 6, 11
- Champ effectif, 27
- Construction de Van den Berg, 49
- Décomposition de Helmholtz, 12, 19
- Energie d'échange, 5
- Energie démagnétisante, 6
- Energie extérieure, 4
- Equation de Landau-Lifschitz, 53, 59
- Equation eikonale, 49
- Espace de Beppo Levi, 12, 17
- Facteur de qualité, 7, 15
- Films minces, 47, 48
- Hysteresis, 39, 41
- Les particules vortex, 61
- Longueur d'échange, 7, 51
- Matériau doux, 7, 15
- Matériau dur, 7, 15
- MRAM, 1, 61
- Méthode de Galerkin, 53
- Méthode directe (calcul des variations),  
21
- Paroi de Bloch, 7, 47, 51
- Paroi de Néel, 47, 51
- Permalloy, 48
- Stoner-Wohlfahrt, 39, 42