Ecole Polytechnique, Promotion X2008
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)
Devoir à la maison
A rendre à la scolarité avant le 6 avril 2010 à 16h00

Sujet proposé par François Alouges

Exercice 1 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière (de classe $\mathcal{C}^\infty$). Soient $\Delta x > 0$ et $\Delta t > 0$ des pas d'espace et de temps, et $\nu = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$.

On considère le schéma aux différences finies suivant

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ \forall n \geq 0,\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{a u_{i+1}^n + b u_i^n + c u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0\,, \tag{1}$$

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ u_i^0 = u_0(i\Delta x)\,. \tag{2}$$

Enfin, soit

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto & u(t, x) \end{array}$$

une fonction régulière (de classe $\mathcal{C}^\infty$) vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(0, x) = u_0(x)$.

1. Donner l'erreur de troncature associée au schéma (1,2) et à la fonction u. Quelle relation doivent vérifier a, b, c pour que le schéma puisse être consistant avec une équation aux dérivées partielles? On supposera cette relation satisfaite jusqu'à la fin de l'exercice.

2. Quelle équation aux dérivées partielles doit satisfaire u pour que l'erreur de troncature tende vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0 (autrement dit pour que le schéma soit consistant)? Donner la solution exacte de cette équation aux dérivées partielles en fonction de u_0.

3. A quelle condition sur a, b, c, ν le schéma vérifie-t-il le principe du maximum discret? Est-il alors L^∞ stable?

4. A quelle condition sur a, b, c, ν le schéma est-il L^2 stable? (On calculera le facteur d'amplification du schéma, et on donnera une condition reliant a, b, c et ν pour que ce facteur d'amplification soit de module inférieur ou égal à 1 pour toute fréquence. On pourra distinguer les cas $ac < 0$, $ac = 0$ et $ac > 0$.)
5. Donner un résultat de convergence, le plus précis possible.
6. Donner un exemple de triplet (a, b, c) pour lequel le schéma (1,2) soit conditionnellement L^2 stable (pour certaines valeurs de ν) mais soit inconditionnellement L^∞ instable.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de donner le bon cadre variationnel pour résoudre le problème du calcul du champ magnétique induit par un matériau aimanté. Mathématiquement, la difficulté provient du fait que l'on souhaite résoudre un problème de Laplace en domaine non borné.

On considère un domaine borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, représentant l'aimant, et une distribution d'aimantation $m \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ décrivant la façon dont l'aimant est aimanté.

On admet que le champ magnétique $H(m)$ engendré par cette distribution d'aimantation est de la forme

$$H(m) = -\nabla\phi(m)\,,$$

où le potentiel magnétique $\phi(m)$ est une solution de la formulation variationnelle

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi(m) \cdot \nabla\psi \, dx = \int_{\Omega} m \cdot \nabla\psi \, dx \tag{3}$$

pour toute fonction-test $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$.

On introduit l'espace

$$BL^1 = \left\{ \phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{\phi}{\sqrt{1+|x|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \nabla\phi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \right\} \tag{4}$$

muni du produit scalaire

$$(\phi, \psi)_{BL^1} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)\psi(x)}{1+|x|^2} \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi(x) \cdot \nabla\psi(x) \, dx. \tag{5}$$

On notera $||\cdot||_{BL^1}$ la norme associée.

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une unique solution $\phi(m) \in BL^1$ de (3).

1. Montrer que BL^1 est un espace de Hilbert. Montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ est dense dans BL^1. On pourra montrer que pour toute fonction $\phi \in BL^1$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$ assez grand et $\phi_R \in H_0^1(B_R)$ tel que
$$||\phi - \phi_R||_{BL^1} < \varepsilon\,,$$
où $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \text{tel que } |x| < R\}$. On obtiendra ϕ_R en tronquant ϕ astucieusement.

2. Montrer que $BL^1 \neq H^1(\mathbb{R}^3)$.

3. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\bar{\mathbb{R}}^+)$. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \phi(r)^2\,dr \leq 4\int_0^{+\infty} r^2(\phi'(r))^2\,dr. \tag{6}$$
On pourra utiliser pour cela une intégration par parties en écrivant $\phi(r)^2 = 1 \times \phi(r)^2$.

4. En déduire que pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1+|x|^2}\,dx \leq 4\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi(x)|^2\,dx. \tag{7}$$
On pourra passer en coordonnées sphériques.

5. En utilisant les questions précédentes montrer que BL^1 muni du produit scalaire
$$(\phi,\psi)_{\dot{H}^1} = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi(x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx \tag{8}$$
est aussi un espace de Hilbert. On montrera que les normes sous-jacentes $||\cdot||_{BL^1}$ et $||\cdot||_{\dot{H}^1}$ sont en fait équivalentes.

6. Résoudre le problème (3) dans $(BL^1, ||\cdot||_{\dot{H}^1})$. On montrera que l'on se trouve dans un cadre d'application du théorème de Lax-Milgram.

7. On étend m en dehors de Ω en posant
$$\bar{m}(x) = \begin{cases} m(x) \text{ si } x \in \Omega, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{9}$$

Montrer que $H(m)$ est la projection orthogonale par rapport au produit scalaire $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ de $-\bar{m}$ sur ∇BL^1 où

$$\nabla BL^1 = \{\nabla \psi,\ \psi \in BL^1\}\,.$$

En déduire (ou redémontrer directement) que

$$||H(m)||_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)} \leq ||\bar{m}||_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)} = ||m||_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)}\,.$$

En déduire que

$$\begin{array}{rcl} H : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \\ m & \longmapsto & H(m) \end{array}$$

est un opérateur linéaire continu.

8. Interprétation de la formulation variationnelle (3). On suppose que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bar{\Omega}$ et sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. On suppose aussi que m est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bar{\Omega}$.

   Montrer que $\phi(m)$ solution (dans BL^1) du problème (3) vérifie le problème de transmission

$$\left[\begin{array}{l} \Delta\phi(m) = \text{div } m \text{ dans } \Omega, \\ \Delta\phi(m) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ [\phi(m)] = 0 \text{ à travers } \partial\Omega, \\ \left[\dfrac{\partial \phi(m)}{\partial n}\right] = -m \cdot n \text{ à travers } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{10}$$

   où $[q] = q_{ext} - q_{int}$ désigne le saut de la quantité q à travers le bord $\partial\Omega$.

9. Soit $\Omega = B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^3$, et m l'aimantation définie (presque partout) par

$$\forall (x,y,z) \in \Omega,\ m(x,y,z) = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right) \text{ si } x^2+y^2 \neq 0\,.$$

   Calculer $H(m)$. On pourra commencer par calculer $H(m_\varepsilon)$ où m_ε est défini par

$$m_\varepsilon(x,y,z) = \left\{\begin{array}{l} m(x,y,z) \text{ si } x^2+y^2 > \varepsilon^2\,, \\ 0 \text{ sinon,} \end{array}\right. \tag{11}$$

   en considérant $\Omega_\varepsilon = \{(x,y,z) \in B(0,1) \text{ tel que } x^2+y^2 > \varepsilon^2\}$.