Ecole Polytechnique, Promotion X2009
Analyse Numérique et Optimisation (MAP431)
Devoir à la maison
A rendre à la scolarité avant le 5 avril 2011 à 16h00

Sujet proposé par François Alouges

Exercice 1.

On considère l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u \text{ sur } \mathbb{R}\times[0,T[\tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{2}$$

Soit $\Delta t > 0$ un pas de temps et $\Delta x > 0$ un pas d'espace. On souhaite étudier des discrétisations de cette équation par des schémas aux différences finies (dans lesquels $u_k^n \sim u(n\Delta t, k\Delta x)$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$) qui s'écrivent de la façon suivante

$$a_1 u_{k-1}^{n+1} + a_0 u_k^{n+1} + a_1 u_{k+1}^{n+1} = b_1 u_{k-1}^n + b_0 u_k^n + b_1 u_{k+1}^n \tag{3}$$

$$u_k^0 = u_0(k\Delta x)\,, \tag{4}$$

où a_0, a_1, b_0, b_1 sont des paramètres qui ne dépendent de Δt et Δx qu'à travers $\lambda = \dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$. Autrement dit on supposera que ces coefficients sont des fonctions de λ. Noter que le schéma a une formulation symétrique (il y a les mêmes coefficients en u_{k+1} qu'en u_{k-1}).

1. Rappeler le schéma explicite et le schéma de Crank-Nicolson. Montrer que ces deux schémas peuvent s'écrire sous la forme précédente, rappeler également leurs conditions de stabilité L^2 et l'ordre de ces deux schémas (en temps et en espace).

2. Montrer que si le schéma (3,4) est consistant avec l'équation (1,2), alors nécessairement

$$a_0 + 2a_1 = b_0 + 2b_1\,,$$

et que

$$(a_0+2a_1)\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}+(a_1-b_1)=0\,.$$

En déduire que l'on peut, quitte à renormaliser les coefficients, supposer que

$$a_0+2a_1=b_0+2b_1=1\,. \tag{5}$$

Montrer qu'alors le schéma (3,4) n'est autre que le $\theta-$schéma. On donnera alors une expression de a_0, a_1, b_0, b_1 en fonction de θ.

3. Calculer le facteur d'amplification $g(\xi)$ du schéma et montrer que le schéma est L^2-stable si et seulement si

$$a_1+b_1\leq\frac{1}{2},\ b_1\geq a_1 \text{ et } a_1<\frac{1}{4}\,.$$

4. Montrer que si a_i et b_i vérifient (5) et que

$$b_0\geq 0,\ b_1\geq 0,\ a_0\geq 0,\ a_1\leq 0\,,$$

alors le schéma (3,4) vérifie le principe du maximum discret. En déduire qu'il est stable L^∞.
Indication: On pourra poser $v_k^n=b_1u_{k-1}^n+b_0u_k^n+b_1u_{k+1}^n$, montrer que $\sup_{k\in\mathbb{Z}}|v_k^n|\leq\sup_{k\in\mathbb{Z}}|u_k^n|$, puis montrer que $\sup_{k\in\mathbb{Z}}|u_k^{n+1}|\leq\sup_{k\in\mathbb{Z}}|v_k^n|$.

5. Montrer qu'il existe des valeurs de a_0, a_1, b_0, b_1 (ou de façon équivalente une valeur de θ) pour que le schéma soit au moins d'ordre 2 en temps et 4 en espace. Ce schéma est-il alors stable dans L^2? L^∞?
Est-il convergent? Donner un résultat d'approximation de la solution. Discuter les avantages et inconvénients de ce schéma par rapport aux schémas de la question **1.**

6. On considère

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}\exp\left(-\frac{(x-0.5)^2}{4t+1}\right)\,.$$

Montrer que u est solution de

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}u=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \text{ sur }]0,1[\times\mathbb{R}^+\\
&u(x,0)=u_0(x)=\exp\left(-(x-0.5)^2\right)\\
&u(0,t)=u(1,t)=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}\exp\left(-\frac{(0.5)^2}{4t+1}\right)\,.
\end{aligned}$$

Programmer en SCILAB les trois schémas étudiés dans cet exercice. On prendra un pas d'espace $\Delta x = 0.05$ et un pas de temps égal à 0.001. On tracera la solution finale au temps $T = 1$ que l'on comparera à la solution exacte.

– Fournir un graphique représentant au temps $T = 1$ la solution exacte et les solutions obtenues avec chacun des trois schémas.
– Fournir également le listing du programme.
– Calculer en norme L^∞ la différence entre la solution exacte et la solution approchée dans chacun des trois cas et discuter les résultats obtenus. Comparer enfin les trois schémas entre eux.

Exercice 2 Dans cet exercice, on considère Ω_1 et Ω deux ouverts bornés et réguliers de $\mathbb{R}^3$ tels que $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. On note $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$, $\Sigma = \partial\Omega_1$ et $\Gamma = \partial\Omega$. Sur la surface Σ, on orientera la normale n de Ω_1 vers Ω_2 et sur Γ, on l'orientera vers l'extérieur de Ω. Enfin, on notera

$$H = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } u|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i) \text{ pour } i = 1, 2\right\}$$

et

$$H_0 = \{u \in H \text{ tel que } u|_\Gamma = 0 \text{ au sens de la trace}\} \,.$$

1. Montrer que $H_0^1(\Omega) \subset H_0$, mais que l'inclusion est stricte.

Pour $u \in H_0$, on note $u_i = u|_{\Omega_i}$ et $[u]_\Sigma = u_2|_\Sigma - u_1|_\Sigma$ le saut de u à travers Σ (les restrictions sur Σ sont prises au sens de la trace). A partir de maintenant, on considère une fonction $f \in L^2(\Sigma)$ qui est telle qu'il existe $\bar{u} \in H_0$ vérifiant $[\bar{u}]_\Sigma = f$.

2. Montrer que si $u \in H_0$ vérifie $[u]_\Sigma = f$, alors $u \in \bar{u} + H_0^1(\Omega)$.
On considère ensuite la formulation variationnelle suivante:

$$\text{Trouver } u \in \bar{u}+H_0^1(\Omega), \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0 \,, \tag{6}$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram montrer que (6) possède une unique solution. En supposant que la solution u vérifie $u|_{\Omega_1} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}_1)$ et $u|_{\Omega_2} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}_2)$, donner un sens à

$$\frac{\partial u|_{\Omega_1}}{\partial n} \text{ et } \frac{\partial u|_{\Omega_2}}{\partial n}$$

sur Σ puis montrer que

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Sigma = 0\,. \tag{7}$$

On attire l'attention du lecteur sur le fait que dans ces équations, la normale n est celle que l'on a défini au début.

3. Soit $g \in L^2(\Sigma)$. Trouver un cadre variationnel pour résoudre le problème dit "de transmission"

$$\left[\begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega_1 \cup \Omega_2\,, \\ [u]_\Sigma = f\,, \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial n}\right]_\Sigma = g\,. \end{array}\right. \tag{8}$$

Montrer que la formulation variationnelle a une unique solution $u \in \bar{u} + H^1_0(\Omega)$.

4. On suppose que $u|_{\Omega_1} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}_1)$ et $u|_{\Omega_2} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}_2)$. Montrer que u résout le problème (8). On expliquera notamment dans quel sens les équations sont résolues.