Comportement asymptotique des autorégressifs bifurcants en présence de données manquantes

Benoîte de Saporta, Anne Gégout-Petit et Laurence Marsalle

14 novembre 2012

Division d'*E.coli*

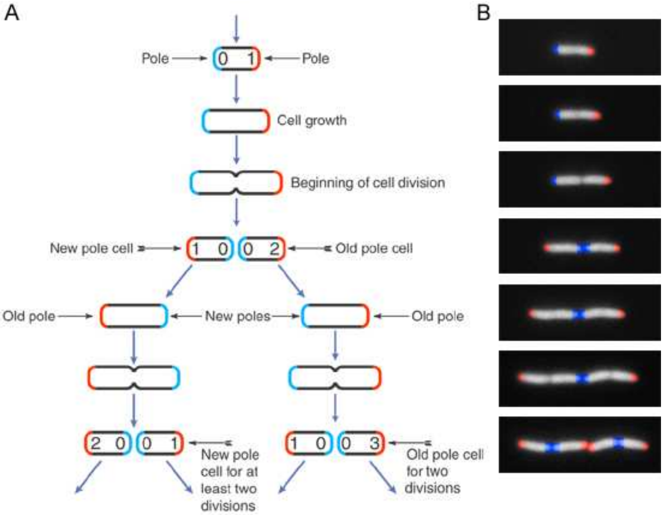
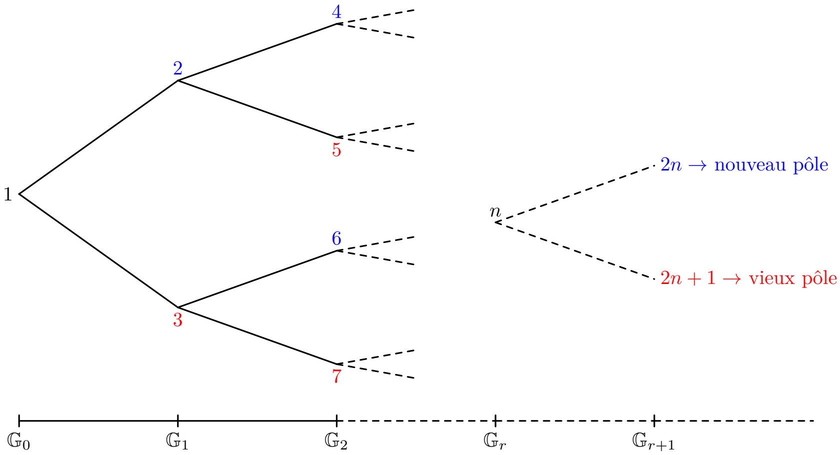


Figure: From Stewart *et al.*, 2005

Modélisation : la généalogie



$$\mathbb{T}_n = \cup_{r=0}^{n} \mathbb{G}_r$$

Modélisation : l'autorégressif bifurcant

$$\begin{cases} X_{2k} & = & a & + & bX_k & + & \varepsilon_{2k} \\ X_{2k+1} & = & c & + & dX_k & + & \varepsilon_{2k+1} \end{cases}$$

$$0 < \max(|b|, |d|) < 1$$

Le bruit $(\varepsilon_{2k}, \varepsilon_{2k+1})$ est centré, de matrice de covariance

$$\sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\{(\varepsilon_{2k}, \varepsilon_{2k+1}), k \in \mathbb{G}_r\}$ sont indépendants sachant $\sigma(X_i, i \in \mathbb{T}_r)$.

Modélisation : le Galton-Watson bitype

$$M = \text{matrice de descendance} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix}$$

$$m_{00} = \mathbb{E}[\eta_2^0] \quad m_{01} = \mathbb{E}[\eta_2^1]$$

$$m_{10} = \mathbb{E}[\eta_3^0] \quad m_{11} = \mathbb{E}[\eta_3^1]$$

π = plus grande valeur propre de M

Hypothèse : $\pi > 1$

Il existe

- $(\mathfrak{z}^0, \mathfrak{z}^1) \in \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{z}^0 > 0$, $\mathfrak{z}^1 > 0$ et $\mathfrak{z}^0 + \mathfrak{z}^1 = 1$
- une v.a.r. $W \geq 0$ p.s., $\mathbb{P}(W > 0) > 0$

tels que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(Z_n^0, Z_n^1)}{\pi^n} = W(\mathfrak{z}^0, \mathfrak{z}^1) \quad \text{p.s.}$$

Les estimateurs

- $\hat{\theta}_n - \theta = \Sigma_{n-1}^{-1} M_n$, où

$$\Sigma_n = \begin{pmatrix} S_n^0 & 0 \\ 0 & S_n^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_n^i = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \delta_{2k+i} \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ X_k & X_k^2 \end{pmatrix}$$

- (M_n) est une martingale de carré intégrable, de crochet

$$< M >_n = \sigma^2 \begin{pmatrix} S_{n-1}^0 & \rho S_{n-1}^{0,1} \\ \rho S_{n-1}^{0,1} & S_{n-1}^1 \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \quad S_n^{0,1} = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \delta_{2k} \delta_{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ X_k & X_k^2 \end{pmatrix}$$

Un calcul

$$B_n^0 = R_n^0 + b \sum_{k\in\mathbb{T}_{n-1}} \delta_{2k} X_k (\eta_{2k}^0 - m_{00}) + d \sum_{k\in\mathbb{T}_{n-1}} \delta_{2k+1} X_k (\eta_{2k+1}^0 - m_{10}),$$

où

$$R_n^0 = a \sum_{k\in\mathbb{T}_n^0} \delta_{2k} + c \sum_{k\in\mathbb{T}_n^1} \delta_{2k} + \sum_{k\in\mathbb{T}_n} \delta_{2k}\varepsilon_k.$$

Bibliographie

- B. Bercu, B. de Saporta et A. Gégout-Petit. Asymptotic analysis for bifurcating autoregressive processes via a martingale approach. *Electron. J. Probab.*, 14 : no. 87, 2492-2526, 2009.
- J.-F. Delmas et L. Marsalle. Detection of cellular aging in a Galton-Watson process. *Stoch. Process. and Appl.*, 120 : 2495-2519, 2012.
- B. de Saporta, A. Gégout-Petit et L. Marsalle. Parameters estimation for asymmetric bifurcating autoregressive processes with missing data. *Electron. J. Stat.*, 5 : 1313-1353, 2011.
- J. Guyon. Limit theorems for bifurcating Markov chains. Application to the detection of cellular aging. *Ann. Appl. Probab.*, 17(5-6) : 1538-1569, 2007.