

Récap Modèle statistique

$$\left(\underbrace{Z}_{\text{ens des}} , \underbrace{\mathcal{Z}}_{\text{tribu}}, \underbrace{\left\{ P_\theta, \theta \in \Theta \right\}}_{\text{ens de loi de probas. param par } \theta} \right)$$

lequel vivent obs

Exemple temps d'attente bus à Massy Pal.

une obs $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{U[0, \theta], \theta \in \mathbb{R}_+^*\})$

n obs $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{U[0, \theta], \theta \in \mathbb{R}_+^*\})^{\otimes n} = n$ échantillon du modèle ou $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{U[0, \theta]^{\otimes n}, \theta \in \mathbb{R}_+^*\})$

Un modèle = une hypothèse

" Soit X_1 un échantillon du modèle $(E, \mathcal{F}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ "

" Je suppose observer $X_1 \sim P_\theta$, pour un $\theta \in \Theta$ "

On suppose qu'il existe $\theta \in \Theta$ tq $X_1 \sim P_\theta$.

$$\mathbb{E}_\theta(X_1) = \theta/2$$



épreuve sous l'hypothèse q $X_1 \sim P_\theta$

* param : $\mathcal{C} = \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d\}$ défini "j'ai un nbr fin. de paramètres"

* identif : $\theta \mapsto P_\theta$ est injective "je peux retrouver θ à p. de P_θ "

* induit : modèle qui découle d'une famille = une stst } modèle induit
d'un modèle

"transfert des obs" → statistique $S(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n$

* n'éch. : à partir d'un modèle → l'obs de n réalisations iid

du modèle

je peux appeler "stat" soit $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{\sum x_i}{n}$
en tant q p.c.t. ; soit $S(x_1, \dots, x_n)$ en tant q v.g.

* vecteur gaussien

* th de transfert
v p.c.t. mult

* ♥ Gaussien
Cochran

* densité
loi produit

Exo 0: Statistiq, modèle induit.

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{d(\mu, \sigma^2)^{\otimes n}, \mu \geq 0\}) \rightarrow \sigma^2 \text{ connu}$

soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, quel est le modèle induit par $\bar{X}_n$?

↑ c'est bien une stat! ($S(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum x_i}{n}$ est mesurable!).

le modèle induit est $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), \mu \in \mathbb{R}\})$

↑ car $\bar{X}_n$ v.g. à valeurs de $\mathbb{R}$.

$\bar{X}_n \in \mathbb{R}$

↑ notat. d'Agnouic

? μ ?

Loi de $\bar{X}_n$?

* on sait q $X_1, \dots, X_n$ iid $N(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow (X_1, \dots, X_n)$ vecteur gaussien. $\Rightarrow$ la combin. linéaire est gaussienne
(thm)

$\Rightarrow \bar{X}_n \sim N(?, ?)$.

$$E_{\mu}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_{\mu}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu$$

$$Var_{\mu}(\bar{X}_n) = Var_{\mu}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var_{\mu}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{\text{ind}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var_{\mu} X_i = \frac{n \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

* RAPPEL vecteurs gaussiens

Déf $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien. si $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$; $\lambda^T X$ a une loi gaussienne.

not: $X := (X_1, \dots, X_n)^T \in \mathbb{R}^n$ vecteur colonne.

exempl: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $(X_1, \dots, X_n)$ vect gaussien.

X $(X, -X)$: est un vecteur gaussien ! oui !

$\mathcal{N}(\mu, 0) = \delta_\mu$ est accepté c'est gaussienne.

$X \begin{cases} X \sim \mathcal{N}(0,1) \\ \varepsilon \sim \pm 1 \text{ au proba } \frac{1}{2} \quad \varepsilon \neq X \\ Y = \varepsilon X \end{cases}$

alors $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, mais (X, Y) non vect gauss.

car $X+Y = 0$ au proba $\frac{1}{2}$
 $\sim \mathcal{N}(0,4) - - -$

La loi d'un VG est caractérisée par sa moy μ et sa matrice de cov Σ .
on la note $\mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{M}_{\mathbb{R}^{n \times n}}$

Prop densité d'une $\mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$: $p_{\mu, \Sigma}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}{2}}$
 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Prop Loi de AX , A matrice de taille $p \times n$

$AX \sim \mathcal{N}(\underbrace{A}_{p \times n} \underbrace{\mu}_{n \times 1}; \underbrace{A}_{p \times n} \underbrace{\Sigma}_{n \times n} \underbrace{A^T}_{n \times p})$

$A \Sigma A^T$ ~~$A^2 \Sigma$~~
 $A^T \Sigma A$

Exo 1 :

tps successifs $T_1 \dots T_n$ d'arrivée $T_1 \leq T_2 \leq \dots$

$T_i \perp T_j$?

non : $T_1 \leq T_2$

$$P(T_1 \in [1,2], T_2 \in [0,1]) = 0$$

on propose de regarder $\Delta_i := T_i - T_{i-1}$; $\forall i \geq 1, T_0 = 0$

on obs $(\Delta_1 \dots \Delta_n)$

On peut modéliser les Δ_i par des exponentielles $\varepsilon(\theta)$ (iid)
Notre modèle est donc $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{ \varepsilon(\theta)^{\otimes n}, \theta > 0 \})$

Le modèle ne prend pas en compte d'éventuelles inter-dépendances entre clients.

et on suppose le processus homogène en temps.

Rappel : loi $\varepsilon(\theta)$ a pour densité $p_\theta(x) = \theta e^{-x\theta} \mathbb{1}_{x \geq 0}$ par rapport à la

$$\underbrace{P_\theta}_{\text{loi}} = \underbrace{p_\theta}_{\text{densité}} \cdot \underbrace{\text{Leb}}_{\text{mesure dominante}}$$

⚠ la densité dépend
de la mesure dominante.

mesure de Lebesgue !



Rappel : une loi exponentielle a pour densité :

par rapport à la mesure de Lebesgue.

toujours spécifier la mesure dominante.

$$\text{ou } p_\beta(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \mathbb{1}_{x \geq 0}$$

Rappel 2 : une variable de Poisson a-t-elle une densité ?

oui !! par rapport à la mesure de comptage $\sum \mathbb{1}_n$; μ_{comp} .

$$p_\lambda(k) = P_\lambda(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} ; \text{ densité d'une poisson } (\lambda)$$

Caract de la densité $P(A) = \int_A p(x) d\mu_{\text{don}}(x)$
 si P o.p.d. $p \nearrow \mu_{\text{don}}$

Def $P \ll Q$ si $Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$.
 dominée par condition pour avoir une densité

si P i.u.d. $p \nearrow Q$ alors $P(A) = \int \mathbb{1}_A(x) p(x) dQ(x) = 0$
 si $Q(A) = 0$

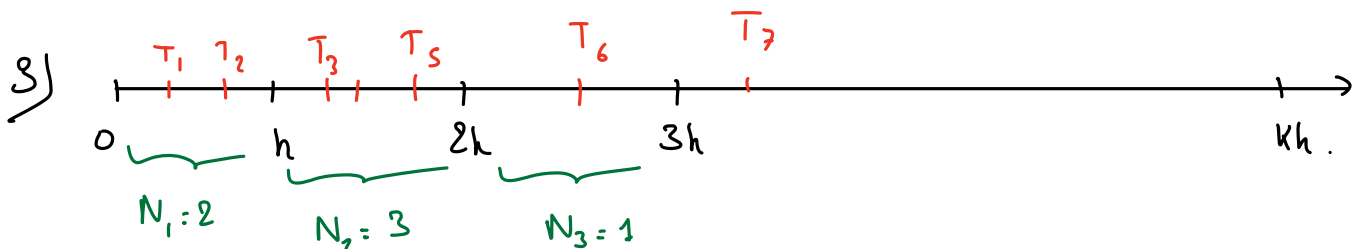
Modèle $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\cdot), \{ \varepsilon(\theta)^{\otimes n}, \theta > 0 \})$

2) Quel estimateur proposer pour T : "le moyen d'arrivée".

$$T = \mathbb{E}_\theta(\Delta_1) \left(= \frac{1}{\theta} \right)$$

$$\hat{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i = \frac{T_n - T_0}{n} = \frac{T_n}{n} \quad (\text{estimateur intuitif})$$

intuitif LGN $\downarrow n \rightarrow \infty$ c'est un estimateur qui serait "bon" (cf la suite)
 T



On peut proposer le modèle de poisson pour $N_1 \dots N_k$

$$(\mathbb{N}^k, \mathcal{P}(\mathbb{N}^k), \{ \mathcal{P}(\lambda)^{\otimes k}, \lambda > 0 \})$$

Remarque : $\mathcal{P}(\lambda)$ a.p.d. $p_\lambda(k) = \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \mathbb{1}_{k \in \mathbb{N}}$ par rapport à la mesure

(preuve $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A p_\lambda(k) d\mu_{\text{count}}(k) = \sum_{k \in A} p_\lambda(k)$) la comptage sur $\mathbb{N}$.

Estimateur de λ : $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i$ car $\mathbb{E}(N_i) = \lambda$.

Rq les deux modèles ne st pas équivalents, quoique reliés.
 ds le modèle 1; la durée d'obs est aléatoire; le nbr de clients déterministe
 ds - - 2; la durée d'obs est déterministe; le nbr de clients aléatoire

Exo bonus, soit $X \sim \mathcal{E}(\theta)$; loi de X^2 ? $\rightarrow \frac{\theta}{2\sqrt{x}} e^{-\theta\sqrt{x}}$

Formule de transfert: X a.p.d. $p_\theta \neq \mu \iff \forall h$ mes bornée $\mathbb{E}(h(X)) = \int h(x) p_\theta(x) d\mu(x)$
 a pour densité par rapport à

Méthode de la jct^e muette: $\forall h$ mes bornée, $\mathbb{E}(h(X^2)) \stackrel{FT}{=} \int_{\mathbb{R}_+^*} h(x^2) \theta e^{-\theta x} dx$
 $\int h(y) \underbrace{q_\theta(y)}_{\text{densité de } X^2 \text{ sous } p_\theta} dy = \int_{\mathbb{R}_+^*} h(y) \frac{\theta e^{-\theta\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} dy$

$\rightarrow$ on peut le faire pour un $\mathcal{C}^1$ diff^{ble} qd $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow$ on $\underline{\hspace{2cm}}$ $0 \rightarrow \mathbb{R}^k$

Exo 2:

sur les changements de loi et famille de transfert.

il est recommandé de relire le chpt de variable multi dim.

Rappel. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^k$ et $p \cdot \text{Leb}^{\otimes k}$ une densité sur $\mathbb{R}^k$ telle que $\int_{\mathcal{O}} p \, d\text{Leb}^{\otimes k} = 1$. Soit $\phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application continûment différentiable, injective sur $\mathcal{O}$ et dont le jacobien ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$.¹ On rappelle le résultat suivant. Si $X \sim p \cdot \text{Leb}^{\otimes k}$ alors la loi de $\phi(X)$ est $q \cdot \text{Leb}^{\otimes k}$ où la densité $u \mapsto q(u)$ est donnée par :

$$\mathbb{1}_{\phi(\mathcal{O})}(u) p(\phi^{-1}(u)) |\text{Det}(J_{\phi^{-1}}(u))|,$$

où pour toute application ψ différentiable J_{ψ} désigne la matrice jacobienne de l'application ψ (matrice des dérivées partielles). Lorsque ϕ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme, la relation $J_{\phi}(\phi^{-1}(u)) J_{\phi^{-1}}(u) = I$ entraîne :

$$\text{Det}(J_{\phi^{-1}}(u)) = \frac{1}{\text{Det}(J_{\phi}(\phi^{-1}(u)))}.$$

Exo 3. On considère le modèle $_{\mu, \sigma}(\mu, \sigma)$
 $\left\{ \mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \left\{ p_{n, \theta} \cdot \text{Leb}^{\otimes n}, \theta \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^+ \right\} \right\}$

avec
$$p_{n, \theta}(x_1 \dots x_n) = \sigma^{-n} \prod_{i=1}^n g\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right).$$

on note $X = (X_1 \dots X_n)$ l'observation

1) Rappel méthode.

Thm: $(Z_1, \dots, Z_n)$ sont indép, avec $\forall i, Z_i \text{ opd } p_i \nearrow \mu$
 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (Z_1 \dots Z_n) \text{ opd } (x_1 \dots x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n p_i(x_i) \nearrow \mu^{\otimes n} \\ \text{et } \int p_i(x) d\mu(x) = 1, \text{ et } p_i \geq 0 \end{array} \right.$

ici P_{θ} s'écrit sous forme produit, et $x \mapsto \sigma^{-1} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ est une densité / Leb

Donc $(X_i)_{i=1}^n$ sont iid de loi de densité $\sigma^{-1} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ / Leb sous P_{θ} .

2) Loi de $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$. Method de la fct. melle.

$$\forall h, \mathbb{E}\left(h\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)\right) = \int h\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) dx = \int h(y) g(y) dy$$

$\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ a p d g / Leb.

$\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)_{i=1}^n$ sont indep (Lemme de condition)

But : manipuler des modèles!

$$3) \text{ si } g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) ; X_i \text{ op d } \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2}{2}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) !$$

$$\text{Soit } S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad ; \quad K_n = \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{S_n}{n} \right)^2$$

Proposer des estimateurs de μ, σ^2 .

$$* \hat{\mu}_n = \frac{S_n}{n} \quad \text{justif : LGN.}$$

$\underbrace{V\theta}_{\text{}}; \quad \mathbb{E}_\theta(\hat{\mu}_n) = \mathbb{E}_\theta(X_1) = \mu \quad ; \quad \hat{\mu}_n \text{ est un Est sans biais}$

$$* \hat{\sigma}_n^2 = \frac{K_n}{n}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta\left(\frac{K_n}{n}\right) &= \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu + \mu - \bar{X}_n)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}_\theta \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta (\bar{X}_n - \mu)^2}_{\text{Var } \bar{X}_n} + \frac{2}{n} \mathbb{E} \underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)(\mu - \bar{X}_n)}_{= (-n(\bar{X}_n - \mu)^2)} \\ &= \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta (X_i - \mu)^2}_{\text{Var}_\theta(X_1) = \sigma^2} + \underbrace{\frac{\text{Var } \bar{X}_n}{\sigma^2/n}}_{\sigma^2/n} - 2 \text{Var}(\bar{X}_n) \end{aligned}$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} - 2\frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2(n-1)}{n}$$

$\hat{\sigma}_n$ est un estimateur (EMV), légèrement biaisé : $\forall \theta$,

$$E_{\theta} \left(\frac{K_n}{n} \right) = \frac{\sigma^2 (n-1)}{n} ; \quad \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} = \frac{K_n}{n-1} \text{ sera } \text{sans biais}$$

4) Loi jointe de K_n , S_n .

Théorème de Gauss : $(X_1, \dots, X_n) \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

alors

$$* \bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \checkmark$$

$$* \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \sigma^2 \chi^2(n-1) \quad \checkmark$$

$$* \bar{X}_n \perp \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad \text{ie} \quad S_n \perp K_n ! \quad \checkmark$$

Le modèle induit par $\frac{S_n}{n}, K_n$ est :

$$(\mathbb{R}^2, -, \left\{ \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \otimes \sigma^2 \chi^2(n-1) , \mu, \sigma^2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \right\})$$

Preuve du Th de Gauss : corollaire du Thm de Cochran!

NON vu ↓

Th Cochran : soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 I_n \right)$.

F un sev de $\mathbb{R}^n$, $F^\perp$ son orthogonal.

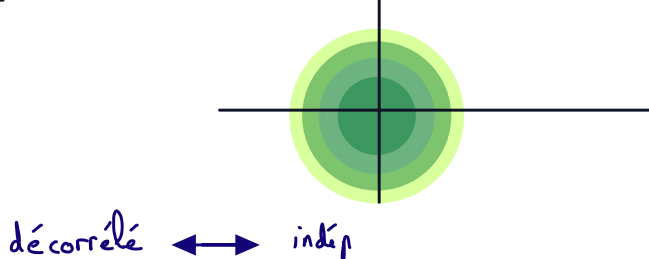
$P_F^\perp$ project. orthogonale sur $F^\perp$; $P_{F^\perp}^\perp$ — F

* $P_F(X)$ et $P_{F^\perp}(X)$ st $\perp$.

$$\begin{aligned} \|P_F(X)\|^2 &\stackrel{(d)}{=} \sigma^2 \chi^2(\dim F) \\ \|P_{F^\perp}(X)\|^2 &\stackrel{(d)}{=} \sigma^2 \chi^2(\dim F^\perp) \end{aligned}$$

💡 La dc Cochran avec la paire
intuit. : la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$
est invariée par transfo orthog.

Illustration densité de $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, Id)$.



intuition Cochran:

$F = \text{Vect}(e_1)$, $F^\perp = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$

$$P_F(X) = (X_1, 0, \dots, 0)$$

$$P_{F^\perp}(X) = (0, X_2, \dots, X_n)$$

$$\|P_F(X)\|^2 = X_1^2 \sim \chi^2(1)$$

$$\|P_{F^\perp}(X)\|^2 = X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Ω transfo. orthogonale.

$$X \sim \mathcal{N} \left(0, \sigma^2 \Omega I \Omega^T \right)$$

$$\stackrel{(d)}{=} X.$$

💡 * si $F = \{0\}$ ou $F = \mathbb{R}^n$
le théorème est trivial.

* si $F = \text{Vect}(e_1)$ ou
 $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$

le théorème est aussi trivial.

Cochran $\Rightarrow$ Gauss

On va établir : 1) Que $X_n = \langle P_{\text{Vect}(\vec{1})}(X), e_1 \rangle$

2) Que $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \| P_{\text{Vect}(\vec{1})}^\perp(X) \|^2$

avec $\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

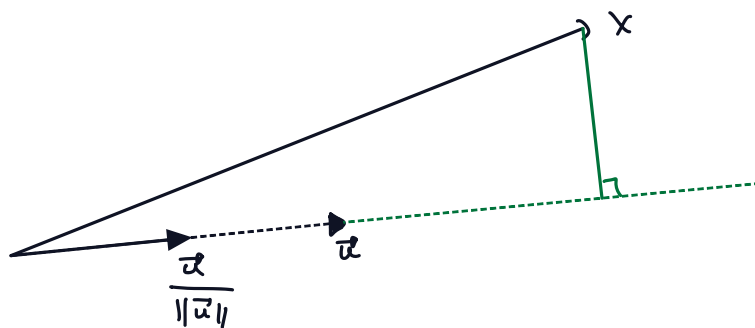
$\rightarrow$ à cette fin, il nous suffit de savoir établir $P_{\text{Vect}(\vec{u})}^\perp(X)$ la projection orthogonale sur $\text{Vect}(\vec{u})$ de X . On applique ensuite à $\vec{u} = \vec{1}$

Lemme $\forall u;$



ultra utile de savoir bien les motifs de proj

$$1) P_{\vec{u}}^\perp(X) = \langle X, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \rangle \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\langle X, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{u^T X}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{u u^T X}{\|\vec{u}\|^2}$$



$$2) P_{\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)}^\perp(X) = U (U^T U)^{-1} U^T X \quad \text{avec } U = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(2 généralise 1 qui correspond à $n=1$)

Gn a donc $\langle X, \vec{1} \rangle$ $\|\vec{1}\|^2 = n$

$$P_{\text{Vect}(\vec{1})}(X) = \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right) \vec{1} = \frac{\overline{X_n}}{n} \cdot \vec{1} = \begin{pmatrix} \overline{X_n} \\ \vdots \\ \overline{X_n} \end{pmatrix}$$

Donc $\hat{P}_{F^\perp} = \text{Id} - \hat{P}_F$

$$\hat{P}_{\text{Vect}(\vec{1})^\perp}^\perp(X) = X - \hat{P}_{\text{Vect}(\vec{1})}^\perp(X) = \begin{pmatrix} X_1 - \overline{X_n} \\ \vdots \\ X_n - \overline{X_n} \end{pmatrix}$$

Conclusion

Gn observe que l'estimateur de la variance s'écrit en fonction de la projection sur $(\text{Vect} \vec{1})^\perp$ de X !

→ Idée
 miraculeuse

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$$

$$= \frac{1}{n} \left\| P_{\text{Vect}(\vec{1})^\perp}(X) \right\|^2.$$

Gn a donc : * $\hat{P}_{\text{Vect}(\vec{1})}^\perp(X) = \begin{pmatrix} \overline{X_n} \\ \vdots \\ \overline{X_n} \end{pmatrix}$

* $\hat{P}_{\text{Vect}(\vec{1})^\perp}^\perp(X) = \begin{pmatrix} X_1 - \overline{X_n} \\ \vdots \\ X_n - \overline{X_n} \end{pmatrix}$

||

par Cochran

$$s^2 = \frac{\|P_{\text{Vect}(1)^\perp}(X)\|^2}{n} \sim \sigma^2 \chi^2(\underbrace{n-1}_{\dim(\text{Vect}(1)^\perp)})$$

Donc s^2 et $\bar{X}_n$ sont indépendants.