Devoir LM115

A rendre le vendredi 27 avril

Exercice 1:
Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(t^2)}{(2+t)^n} dt.$$

Exercice 2:
Soient $\alpha < \beta$. Calculer $I_{n,m}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ défini par

$$I_{n,m} = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n (x-\beta)^m dx$$

Exercice 3:
1) Trouver a,b et c tels que

$$\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{(t+1)} + \frac{c}{(t+1)^2}$$

Indication : on pourra utiliser 0, -1 et $+\infty$.

2) Trouver f tel que

$$f' = \frac{1}{t(t+1)^2}.$$

Exercice 4:
Soit f fonction dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
1) Montrer que si $\forall x \geq x_0$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors

$$\forall x \geq x_0, \quad m(x-x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M(x-x_0).$$

Indication : on pourra utiliser $g(x) = f(x) - f(x_0) - m(x-x_0)$.
2) Montrer que si $\lim_{x\to\infty} f'(x) = l$, alors

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

Indication : on poura commencer par prouver que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_0 \geq 0$ tel que

$$\forall x \geq x_0, \quad (l-\epsilon)(x-x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq (l+\epsilon)(x-x_0).$$

Le dernier exercice est facultatif :

Exercice 5:
Soit f continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big(\int_a^b f(x)^n dx\Big)^{1/n} \leq M.$$

2) Montrer que pour tout $\epsilon \in]0,M[$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b f(x)^n dx \geq (M-\epsilon)^n (2\eta).$$

3) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\int_a^b f(x)^n dx \Big)^{1/n} = M.$$