École Polytechnique **Promotion X09**
Programmes Éco-Sciences et Maths Appliquées

MAP 563 Modèles Aléatoires pour l'Écologie et l'Évolution (MAEE)

Vincent Bansaye, Amandine Véber, Sylvie Méléard

PC3– Martingales et diffusions

30 janvier 2012

1. On suppose qu'un grain de pollen se déplace dans un plan vertical suivant un mouvement brownien plan $\mathrm{B} = ((\mathrm{B}_t^{(1)}, \mathrm{B}_t^{(2)}); t \geq 0)$, et on cherche à déterminer la loi de la position X du grain au moment où il atteint le sol (axe des abscisses).

On note $a > 0$ la hauteur initiale du grain de pollen, de sorte que $(\mathrm{B}^{(1)}(0), \mathrm{B}^{(2)}(0)) = (0, a)$. On note $\mathrm{T}_b^{(i)}$ le premier temps d'atteinte de b par le brownien $\mathrm{B}^{(i)}$. En particulier,

$$\mathrm{X} = \mathrm{B}^{(1)}(\mathrm{T}_0^{(2)}).$$

a) En se servant du principe de réflexion, montrer que pour tout $b > 0$,

$$\mathbb{P}(|\mathrm{X}| < b) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_b^{(1)} > \mathrm{T}_0^{(2)}).$$

b) En utilisant le dernier exercice de la PC précédente, montrer que

$$\mathbb{P}(|\mathrm{X}| < b) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}(b/a).$$

c) En déduire la densité de X, la distance moyenne $\mathbb{E}(|\mathrm{X}|)$ parcourue par le grain de pollen, ainsi que l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2+x^2}\, e^{i\lambda x}\, dx = e^{-a|\lambda|} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Grâce à une formule d'Itô multidimensionnelle, on peut montrer que la norme euclidienne $(\rho_t; t \geq 0)$ du mouvement brownien en dimension δ est une diffusion appelée *processus de Bessel* de dimension δ, solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$d\rho_t = d\mathrm{B}_t + \frac{\delta - 1}{2}\frac{dt}{\rho_t}\ .$$

a) En utilisant la formule d'Ito, montrer que le générateur A de ρ est donné par

$$\mathrm{A}f(x) = \frac{1}{2}f''(x) + \frac{\delta-1}{2x}f'(x) \qquad x > 0.$$

puis que en dimension 2, respectivement 3 :

$$\mathrm{A}f(x) = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{df}{dx}\right), \qquad \mathrm{A}f(x) = \frac{1}{2x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{df}{dx}\right).$$

Montrer enfin que $\mathrm{A}u = 0$ implique $u(\rho_t)$ est une martingale.

b) On suppose qu'une cellule eucaryote est sphérique de rayon b, et que son noyau est sphérique de rayon $a < b$. Cette cellule est infectée par un virus situé à distance $r \in [a, b]$ du centre de la cellule.
On note T_c le temps d'atteinte de la sphère de rayon c et $\mathrm{T} = \mathrm{T}_a \wedge \mathrm{T}_b$.

b*–i)* Montrer que la probabilité $f(r)$ que le virus pénètre dans le noyau avant de sortir de la cellule est donnée par

$$f(r) = \begin{cases} (\log b - \log r)/(\log b - \log a) & \text{en dimension 2} \\ (a/r)(b-r)/(b-a) & \text{en dimension 3} \end{cases}$$

b*–ii)* Que se passe-t-il lorsque $a \to 0$? Lorsque $b \to \infty$? Interpréter.

c) On cherche à calculer le temps moyen $h(r) := \mathbb{E}_r(\mathrm{T})$ que le virus met à sortir du cytoplasme.

c*–i)* En utilisant le fait que $\mathrm{A}h = -1$, calculer $h(r)$.
Réponse :

$$h(r) = \begin{cases} -(r^2/2) + (a^2\log(b/r) + b^2\log(r/a))/(2\log(b/a)) & \text{en dimension 2} \\ (1/3r)(r+a+b)(r-a)(b-r) & \text{en dimension 3} \end{cases}$$

c*–ii)* Que se passe-t-il lorsque $a \to 0$?

d) Montrer à l'aide d'une martingale très simple qu'en toute dimension n, le temps de sortie de la sphère de rayon b par une particule située à distance r de l'origine vaut

$$\mathbb{E}_r(\mathrm{T}_b) = \frac{b^2 - r^2}{n} \;.$$

Indications :
c) La solution u de $\mathrm{A}u = -1$ sur $]a, b[$ avec $u(a) = u(b) = 0$ vérifie $u(\rho_{t\wedge \mathrm{T}}) + t \wedge \mathrm{T}$ martingale. Avec le théorème d'arrêt on obtient $u(x) = \mathbb{E}_x(\mathrm{T})$.
d) Pour B brownien unidimensionnel, $\mathrm{B}_t^2 - t$ est une martingale.

3. On appelle *diffusion de Feller* $(\mathrm{Y}_t : t \geqslant 0)$ *de paramètre* $\sigma > 0$ le processus qui vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$\mathrm{Y}_t = y_0 + \int_0^t \mathrm{Y}_s\, ds + \int_0^t \sigma\sqrt{2\,\mathrm{Y}_s}\, d\mathrm{B}_s,$$

avec $y_0 \geqslant 0$.

a) Commenter chaque terme de l'équation.

b) Montrer que $\bar{\mathrm{Y}}_t = \mathrm{Y}_t e^{-t}$ vérifie l'équation différentielle stochastique

$$\bar{\mathrm{Y}}_t = y_0 + \int_0^t e^{-s/2}\sigma \sqrt{2\,\bar{\mathrm{Y}}_s}\; d\mathrm{B}_s.$$

On pourra commencer par imaginer comment différencier le produit d'une fonction déterministe et du processus $(\mathrm{Y}_t)_{t\geqslant 0}$ (attention, cette recette ne fonctionnera pas pour le produit de deux processus ! !). Pour une justification plus rigoureuse, on admettra la formule d'Itô à deux variables pour un processus Z vérifiant

$$\mathrm{Z}_t = z_0 + \int_0^t h(\mathrm{Z}_s)\, ds + \int_0^t g(s, \mathrm{Z}_s)\, d\mathrm{B}_s$$

et une fonction $f(s,y) \to \mathbb{R}$ de classe $\mathrm{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$:

$$\begin{aligned} f(t, \mathrm{Z}_t) \quad &= \quad f(0, z_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s, \mathrm{Z}_s) + \frac{\partial f}{\partial y}(s, \mathrm{Z}_s) h(\mathrm{Z}_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s, \mathrm{Z}_s) g(s, \mathrm{Z}_s)^2\right] ds \\ &\qquad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(s, \mathrm{Z}_s) g(s, \mathrm{Z}_s)\, d\mathrm{B}_s. \end{aligned}$$

c) En déduire que $\bar{\mathrm{Y}}_t$ est une martingale pour la filtration associée au mouvement brownien B ? Quel est son comportement en temps long ($t \to \infty$?)

d) Soit $t_0 \geqslant 0$. On pose pour $t \in [0, t_0]$, et $\lambda, y \geqslant 0$,

$$v_\lambda(t, y) := \exp\left(-\frac{\lambda y}{\sigma^2 \lambda[\exp(-t) - \exp(-t_0)] + 1}\right)$$

et on vérifie facilement que cette fonction satisfait pour tous $s, y \geqslant 0$,

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial s}(s, y) + \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2}(s, y)\, \sigma^2 y e^{-s} = 0.$$

Montrer que $(v_\lambda(t, \bar{\mathrm{Y}}_t) : 0 \leqslant t \leqslant t_0)$ satisfait l'équation différentielle stochastique

$$v_\lambda(t, \bar{\mathrm{Y}}_t) = v_\lambda(0, y_0) - \int_0^t \lambda\, \frac{v_\lambda(s, \bar{\mathrm{Y}}_s)}{\sigma^2 \lambda[\exp(-s) - \exp(-t_0)] + 1}\, e^{-s/2}\sigma \sqrt{2\,\bar{\mathrm{Y}}_s}\, d\mathrm{B}_s.$$

En déduire que $(v_\lambda(t, \bar{\mathrm{Y}}_t) : 0 \leqslant t \leqslant t_0)$ est une martingale par rapport à la filtration brownienne.

e) En utilisant la question précédente, donner la valeur de $\mathbb{E}_{y_0}\left(v_\lambda(t_0, \bar{\mathrm{Y}}_{t_0})\right)$. En déduire que

$$\mathbb{E}_{y_0}(\exp(-\lambda \mathrm{Y}_t)) = \exp\left(-\frac{y_0}{\sigma^2[1 - \exp(-t)] + (\lambda \exp(t))^{-1}}\right).$$