École Polytechnique **Promotion X08**
Programmes Éco-Sciences et Maths Appliquées

MAP 563 Modèles Aléatoires pour l'Écologie et l'Évolution (MAEE)
Vincent Bansaye, Amandine Véber, Sylvie Méléard

PC4 – Processus de Galton–Watson, quasi–stationnarité, multitype.
31 janvier et 07 février 2011

Rappel. On dit qu'une variable aléatoire X est *stochastiquement supérieure* à une variable aléatoire Y si pour tout réel a, $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geq a) \geq \mathbb{P}(\mathrm{Y} \geq a)$. Ceci est équivalent (exercice) à $\mathbb{E}(f(\mathrm{X})) \geq \mathbb{E}(f(\mathrm{Y}))$ pour toute fonction f positive *croissante*.

1. Soit une chaîne de Markov $(\mathrm{Z}_n; n \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour laquelle 0 est absorbant et telle que pour tout n, $\mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) =: m_n < \infty$.

a) Montrer que si $\liminf_n m_n = 0$, alors l'extinction a lieu avec probabilité 1.

b) La réciproque est-elle vraie ?

2. Un fluide s'écoule le long des arêtes d'un arbre infini régulier n-aire, depuis la racine. Chaque sommet de l'arbre, indépendamment, est ouvert (laisse passer le fluide) avec probabilité a, ou fermé avec probabilité $1-a$. On appelle p la probabilité de *percolation*, c'est-à-dire la probabilité que le fluide atteigne la frontière de l'arbre.

a) Montrer que $p = 0$ si et seulement si $a \leq 1/n$.

b) Montrer que si $a > 1/n$, alors $1 - p$ est la seule solution de

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1}{a} \qquad x \geq 0.$$

3. Soit $(\mathrm{Z}_n; n \geq 0)$ une chaîne de Bienaymé–Galton–Watson (BGW) dont la loi de reproduction est dite « fracto–linéaire » (ou homographique), c'est-à-dire qu'il existe des constantes $a, b \in (0, 1)$ telles que

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = a \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}(\xi = k \mid \xi \neq 0) = b^{k-1}(1 - b) \qquad k \geq 1.$$

a) Calculer la fonction génératrice f de ξ, ainsi que son espérance m et la probabilité d'extinction de $(\mathrm{Z}_n; n \geq 0)$.

b) On suppose dans cette question que $a \neq b$.

***b**–i)* Calculer explicitement le rapport

$$\frac{f_n(s) - a/b}{f_n(s) - 1} \ ,$$

où f_n désigne la n-ième itérée de f et en déduire

$$f_n(s) = 1 - \frac{1 - a/b}{1 - m^{-n}\frac{s-a/b}{s-1}}.$$

***b**–ii)* En déduire la loi du temps d'extinction de Z.

c) Répondre aux sous-questions précédentes lorsque $a = b$.

4. Soit $(\mathrm{Z}_n; n \geq 0)$ une chaîne de Markov à valeurs entières et absorbée en 0 avec probabilité 1.

a) Montrer que si ν est une probabilité quasi-stationnaire pour Z, alors le temps d'extinction de Z sous $\mathbb{P}_\nu$ a une loi *géométrique.*

b) On suppose maintenant que Z est une chaîne de BGW sous-critique de fonction génératrice g. On suppose $\mathrm{Z}_0 = 1$.

Montrer qu'il existe une variable aléatoire Υ à valeurs entières telle que Z_n conditionnée à être non-nulle converge en loi vers Υ lorsque n tend vers l'infini.

Montrer que Υ ne dépend pas de la population initiale $\mathrm{Z}_0 = k \geqslant 1$.

Vérifier enfin que la loi de Υ est une probabilité quasi-stationnaire pour Z. On appelle cette dernière *loi de Yaglom* du processus de BGW.

c) En utilisant les résultats de l'exercice précédent, trouver la loi de Υ dans le cas « fracto-linéaire » avec $a > b$ et donner le paramètre de la loi géométrique du temps d'extinction sous $\mathbb{P}_\nu$.

5. Soit X une v.a. entière de variance finie dont on note f la fonction génératrice et Y une variable aléatoire « fracto-linéaire » de paramètres a et b (cf. exercices précédents) dont on note g la fonction génératrice. On choisit a et b de telle sorte que

$$g'(1) = f'(1) \quad \text{ et } \quad g''(1) = 2f''(1).$$

a) Calculer a et b en fonction de $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) \leq \mathbb{P}(\mathrm{Y} = 0)$, avec égalité uniquement si la loi de X ne charge que 0 et un autre entier.

c) Prouver que le temps d'extinction de la chaîne de BGW de fonction génératrice f est *stochastiquement supérieur* au temps d'extinction de la chaîne de BGW fracto-linéaire de fonction génératrice g.

6. Limite de Yaglom et processus conditionné à rester positif.
Soit une chaîne de Markov $(\mathrm{Z}_n; n \geq 0)$ à valeurs entières et p.s. absorbée en 0, admettant une limite de Yaglom Υ . On suppose que pour tout n, $x \mapsto \mathbb{P}_x(\mathrm{Z}_n \neq 0)$ est *croissante* sur $\mathbb{N}^\star$.

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $a \in \mathbb{N}$, la v.a. U_a est définie par

$$\mathbb{P}(\mathrm{U}_a = r) = \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = r \mid \mathrm{Z}_n > a) \qquad r > a.$$

a) Montrer que pour $a' > a$, on a $\mathbb{E}(f(\mathrm{U}_{a'})) \geqslant \mathbb{E}(f(\mathrm{U}_a))$ pour toute fonction *croissante* positive f. (Autrement dit, $\mathrm{U}_{a'}$ est stochastiquement supérieure à U_a.)

b) Montrer que pour tout entier k, il existe une fonction positive croissante f telle que pour tout $a \geqslant 0$, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_{n+k} \neq 0 \mid \mathrm{Z}_n > a) = \mathbb{E}(f(\mathrm{U}_a))$. En déduire que

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z}_{n+k} \neq 0 \mid \mathrm{Z}_n > a) \geq \mathbb{P}(\mathrm{Z}_{n+k} \neq 0 \mid \mathrm{Z}_n \neq 0).$$

c) Établir que

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n > a \mid \mathrm{Z}_{n+k} \neq 0) \geq \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n > a \mid \mathrm{Z}_n \neq 0).$$

d) Supposons que la limite $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_i(\mathrm{Z}_1 = j | \mathrm{Z}_k > 0)$ existe et notons-la $\mathrm{Q}(i,j)$. Montrez que Q est un noyau de transition. Exhiber une relation de domination stochastique entre la loi de Yaglom et la loi stationnaire (si elle existe) du processus de Markov de noyau Q.

7. Populations en environnement aléatoire

On part d'un individu. À chaque génération n, on se donne une v.a. ξ_n dont on note l'espérance M_n, et l'on suppose qu'étant donnée la loi de ξ_n, tous les individus appartenant à la génération $n-1$ se reproduisent indépendamment et selon cette loi.

a) Montrer que connaissant $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \neq 0) \leq \Pi_{i=1}^n \mathrm{M}_i.$$

b) Pour tout n, on définit $\mathrm{S}_n := \sum_{i=1}^n \log \mathrm{M}_i$. Montrer que

$$\log \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \neq 0) \leq \min_{k=1,\ldots,n} \mathrm{S}_k.$$

c) Pour un processus de branchement *en environnement aléatoire*, les (M_n) sont supposées aléatoires et i.i.d.. Donner alors une condition suffisante pour que l'extinction ait lieu avec probabilité 1.

8. Migrations entre deux habitats et environnements périodiques.

On considère deux habitats de qualités différentes notés 1 et 2, dans lesquels vivent deux colonies de kangourous. Les kangourous se reproduisent dans chaque habitat suivant des processus de Galton Watson de moyennes respectives $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$. A chaque génération, chaque enfant de l'habitat 1 (resp. 2) choisit de rejoindre l'autre habitat avec probabilité $p_1 \in\,]0,1[$ (resp. $p_2 \in\,]0,1[$), sinon il reste dans son habitat. Puis il se reproduit à son tour.

a) Déterminer le critère d'extinction de la population totale.

On suppose maintenant que l'environnement varie de manière périodique, tandis que les transitions entre les habitats restent les mêmes (et sont donc indépendantes de l'environnement). Plus précisement, il alterne (à chaque génération) entre un environnement favorable où les moyennes des lois de reproduction dans les habitats 1 et 2 valent respectivement M_1 et M_2 et un environnement défavorable où elles valent respectivement m_1 et m_2.

b) Déterminer le nouveau critère d'extinction de la population.