École Polytechnique **Promotion X08**
Programmes Éco-Sciences et Maths Appliquées

MAP 563 Modèles Aléatoires pour l'Écologie et l'Évolution (MAEE)

Vincent Bansaye, Amandine Véber, Sylvie Méléard

PC 5 et 6 Processus de Markov à de saut pur
7 et 14 février 2011

1. Occupation d'un habitat de capacité finie

Un site (rocher, arbre, posidonie, etc) peut accueillir n individus. Les individus arrivent au taux λ puis chaque individu repart du site au taux μ. Autrement dit, il y a un processus de Poisson de paramètre λ qui décrit l'arrivée des individus sur le site et chaque individu reste un temps exponentiel de paramètre μ (indépendant de tout le reste). Lorsque le site est complet, les individus qui arrivent repartent immédiatement (pas de file d'attente). On note N_t le nombre d'individus présents au temps t.

a) Donnez le générateur Q du processus $(\mathrm{N}_t)_{t\geqslant 0}$.

b) Le processus N admet une probabilité stationnaire π. Calculez-la.

c) Sous le régime stationnaire, quel est le taux d'occupation moyen du site ?

2. Temps d'extinction d'un processus de naissance et mort sans compétition

Soit $(\mathrm{Z}_t; t \geq 0)$ un processus de branchement binaire, où chaque individu, indépendamment, donne naissance à un enfant à taux b et meurt naturellement à taux d. On adopte les notations suivantes :

$$q(t) := \mathbb{P}_1(\mathrm{Z}_t = 0)$$

$$\mathrm{G}_k := \mathbb{E}_k(\mathrm{T}_0 \mathbf{1}_{\{\mathrm{T}_0<\infty\}}).$$

a) Montrer que $q'(t) = -(b+d)q(t) + bq(t)^2 + d$

b) Résoudre et donner la limite de $q(t)$ lorsque $t \to \infty$.

c) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$

$$b(\mathrm{G}_{k+1} - \mathrm{G}_k) - d(\mathrm{G}_k - \mathrm{G}_{k-1}) = -\frac{q_\infty^k}{k}.$$

d) Montrer que dans le cas sous-critique ($b < d$), $\mathrm{G}_{k+1} - \mathrm{G}_k$ est majoré par τ/k, où τ est l'espérance du premier temps d'atteinte de 0 par une certaine marche aléatoire issue de 1.

e) Montrer que dans le cas surcritique ($b > d$), conditionner à l'extinction revient à échanger b et d.

f) Déduire des trois questions précédentes que si $b < d$ alors

$$\mathrm{G}_1 = -\frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{b}{d}\right),$$

tandis que si $b > d$,

$$\mathrm{G}_1 = -\frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{d}{b}\right).$$

3. Processus de naissance et mort avec compétition

Soit $(\mathrm{Z}_t; t \geq 0)$ un processus de branchement logistique, où chaque individu, indépendamment, donne naissance à 1 enfant à taux b, meurt naturellement à taux d, ou par compétition à taux $c(k-1)$ conditionnellement à $\mathrm{Z}_t = k$.

a) Montrer que p.s. $\liminf_{t\to\infty} \mathrm{Z}_t < \infty$.

b) Donner la valeur de cette limite selon que $d \neq 0$ ou $d = 0$.

c) Quelle est la nature de la chaîne de Markov $(\mathrm{Z}_t; t \geq 0)$ lorsque $d = 0$? Établir une expression explicite pour sa distribution stationnaire.

4. Renormalisation des processus de Poisson

Nous allons étudier le comportement asymptotique d'un processus de Poisson $(\mathrm{N}_t)_{t\geqslant 0}$ de paramètre $\lambda > 0$.

a) Quelle est la limite de N_t/t lorsque $t \to \infty$?

b) Quelle est la loi limite de $(\mathrm{N}_t - \lambda t)/\sqrt{t}$ lorsque $t \to \infty$?

c) On note $\mathrm{W}_t^{(n)} = (\mathrm{N}_{nt} - \lambda nt)/\sqrt{n\lambda}$. Pour $0 < t_1 < \ldots < t_d$, quelle est la loi limite de $(\mathrm{W}_{t_1}^{(n)}, \mathrm{W}_{t_2}^{(n)} - \mathrm{W}_{t_1}^{(n)}, \ldots, \mathrm{W}_{t_d}^{(n)} - \mathrm{W}_{t_{d-1}}^{(n)})$ lorsque $n \to \infty$. Quelle est selon vous la loi limite du processus $\mathrm{W}^{(n)}$?

5. Limite de Processus de Galton Watson

1. On considère un processus de sauts $(\mathrm{X}_t,\ t \geqslant 0)$, de générateur noté $\mathcal{G}$.

a) Montrer que pour toute fonction f continue et bornée,

$$\mathrm{M}_t := f(\mathrm{X}_t) - f(\mathrm{X}_0) - \int_0^t \mathcal{G} f(\mathrm{X}_s) ds$$

est une martingale. Cette propriété permet en fait de caractériser la loi de X (on dit que alors que X satisfait *le problème de martingales associé à* $\mathcal{G}$).

b) Soit $\mathcal{E}$ une v.a. exponentielle de paramètre $q > 0$. Montrer que pour tout $\mathrm{N} > 0$, $\mathcal{E}/\mathrm{N}$ a la même loi qu'une v.a. exponentielle de paramètre $\mathrm{N}q$. En déduire les taux de transitions du processus de sauts $(\mathrm{X}_{\mathrm{N}t},\ t \geqslant 0)$.

c) Retrouver ce résultat grâce à la caractérisation de la question **1.a)**.

2. Soit X un processus de Galton-Watson en temps continu, de loi de reproduction ξ. On veut comprendre le comportement de la taille de la population lorsque le nombre initial d'individus N tend vers l'infini. On pose donc $\mathrm{Y}_t^{\mathrm{N}} := \mathrm{X}_t^{\mathrm{N}}/\mathrm{N}$, où X^{N} part de $\mathrm{X}_0^{\mathrm{N}} = \lfloor y_0 \mathrm{N} \rfloor$ pour tout N.
a) Pourquoi est-il naturel de considérer Y^{N} ?
b) Ecrire le générateur de Y^{N} et en déduire la seule limite possible de ce processus lorsque $\mathrm{N} \to \infty$.
c) On considère à présent $\mathrm{Z}_t^{\mathrm{N}} := \mathrm{X}_{\mathrm{N}t}^{\mathrm{N}}$. Ecrire le générateur de Z^{N} et en déduire à quelles conditions Z^{N} converge ainsi que sa limite. Montrer que celle-ci peut s'écrire comme la solution de l'équation différentielle stochastique

$$d\mathrm{Z}_t = a\mathrm{Z}_t\, dt + \sigma\sqrt{\mathrm{Z}_t}\, d\mathrm{B}_t,$$

où les paramètres a et σ dépendent uniquement de la loi ξ.

3. On ajoute à présent un déplacement spatial pour chaque individu. On suppose donc que chacun
- se déplace dans $\mathbb{R}$ suivant un mouvement brownien, indépendamment des autres individus,
- « branche » à taux 1, i.e. meurt et laisse à sa place un nombre ξ de descendants. Ceux-ci évoluent ensuite de la même manière.

Pour suivre cette population, on considère la mesure aléatoire

$$\mathrm{X}_t := \sum_{i\sim t} \delta_{\mathrm{B}_t^i},$$

qui donne une masse 1 à chacune des positions spatiales B_t^i des individus en vie à l'instant t. On appelle cet objet un *mouvement brownien branchant.* Pour tout f à valeurs dans $]0, 1]$, on pose alors

$$\mathrm{F}_f(\mathrm{X}_t) = \prod_{i\sim t} f(\mathrm{B}_t^i) = e^{\langle \mathrm{X}_t, \log f\rangle}.$$

a) Montrer que si f est de classe C^2, alors le générateur du processus X est donné par

$$\mathcal{G}\mathrm{F}_f(\mathrm{X}) = \left\langle \mathrm{X}, \frac{\Upsilon(f) - f + \frac{1}{2}f''}{f} \right\rangle \mathrm{F}_f(\mathrm{X}),$$

où Υ est la fonction génératrice de ξ.
b) En utilisant la même technique que précédemment, montrer que le processus Z^{N} défini par

$$\mathrm{Z}_t^{\mathrm{N}} := \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i\sim \mathrm{N}t} \delta_{\mathrm{B}_{\mathrm{N}t}^i/\sqrt{\mathrm{N}}}, \qquad \mathrm{Z}_0^{\mathrm{N}} = \frac{\lfloor z\mathrm{N} \rfloor}{\mathrm{N}}\, \delta_0$$

converge lorsque $\mathrm{N} \to \infty$ vers un objet que l'on appelle *super-mouvement brownien.* (*Indice :* on écrira le générateur de X pour des fonctions f de la forme $1 - \frac{g}{\mathrm{N}}$.)