École Polytechnique **Promotion X07**
Programmes Éco-Sciences et Maths Appliquées

MAP 563 Modèles Aléatoires pour l'Écologie et l'Évolution (MAEE)
Vincent Bansaye, Christophe Giraud, Sylvie Méléard

PC7 – Processus Ponctuel de Poisson.
17 février 2010

On appelle considère ici un processus ponctuel (nuage de points) au plus dénombrable de $\mathbb{R}^d$:

$$X = \{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^d$$

Ce processus est un processus ponctuel de Poisson (PPP) d'intensité ν ssi :
i) Pour tous A, B boréliens de $\mathbb{R}^d$ disjoints, $\#\, X \cap A$ est indépendant de $\#\, X \cap B$.
ii) Pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$, $\#\, X \cap A$ suit une loi de Poisson de paramètre $\nu(A)$.

En fait, grâce au théorème des événements rares de Poisson, tout processus ponctuel vérifiant *i*) vérifie *ii*) pour une certaine mesure ν. Ces processus permettent donc de modéliser des répartitions aléatoires quelconques où les présences en deux lieux géographiques disjoints sont indépendantes mais pas forcément homogènes (floraison ...).

1. Estimation de l'intensité.

On considère deux parcelles de surface $S_1 = 1$ha et $S_2 = 2$ha. Les deux parcelles sont homogènes mais la nature du sol différe entre les deux parcelles. On suppose qu'au temps t des coquelicots se repartissent sur les parcelles selon un PPP d'intensité $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$. On note $N_i(t)$ le nombre de coquelicots observés au temps t dans la parcelle i.

a) Quelle est la loi du nombre total $N_1(t) + N_2(t)$ de coquelicots observés au temps t ?

b) On suppose que pour $t = 1, \ldots, 10$ les intensités $\lambda_i(t)$ sont identiques et égales à une valeur λ_i inconnue. On suppose aussi que les variables aléatoires $(N_i(t); t = 1, \ldots, 10)$ sont indépendantes. On observe :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_1(t)$	98	107	111	106	112	117	98	104	97	123
$N_2(t)$	10	21	22	18	17	13	29	20	16	23

Pour $i = 1, 2$ proposez une estimation $\hat{\lambda}_i$ de λ_i. Quelle est sa variance ?

c) On suppose désormais λ_1 connu et égal à 105.7. Au temps $t = 30$ on compte $N_1(30) = 83$ coquelicots. On s'interroge de savoir si $\lambda_1(30) \neq \lambda_1$. Que peut-on conclure ?

2. Théorème de représentation.
Montrer que X est un PPP ssi pour tout $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{E}(\exp(-\sum_{n\in\mathbb{N}} f(\mathrm{X}_n))) = \exp\big(-\int_{\mathbb{R}^d}[1-e^{-f(x)}]\nu(dx)\big)$$

On commencera par considérer des fonctions f de la forme $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i \mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}$.

3. Conséquences

a) [suppression] Montrer que si X est un PPP d'intensité ν, le processus ponctuel $\widetilde{\mathrm{X}}$ obtenu en supprimant chaque point de X independamment avec probabilité $p \in [0,1]$ est un PPP d'intensité $(1-p)\nu$.

b) [superposition] Montrer que si X et X′ sont des PPP indépedants d'intensité respective ν et ν' alors $\mathrm{X} \cup \mathrm{X}'$ est un PPP d'intensité $\nu + \nu'$.

c) [marquage] Soit $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_n : n \geq 1)$ un PPP sur $\mathbb{R}^d$ d'intensité ν et $(\mathrm{A}_n : n \geq 1)$ une suite de v.a.r. i.i.d. de mesure de probabilité commune $\mu(dy)$.
Montrer que le processus ponctuel $((\mathrm{X}_n, \mathrm{A}_n) : n \in \mathbb{N})$ est un PPP sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ d'intensité $\nu(dx)\mu(dy)$.
Qu'obtient-t-on si $(\mathrm{X}_n : n \geqslant 1)$ forme les temps de sauts d'un processus de Poisson de paramètre λ, cad si $(\mathrm{X}_{n+1} - \mathrm{X}_n : n \geqslant 0)$ forme une suite iid de variables exponentielles de paramètre λ ?.

Nous allons maintenant appliquer la formule de marquage.

4. On suppose que les individus naissent au taux λ depuis l'instant 0 et vivent pendant un temps aléatoire de densité f sur $\mathbb{R}^+$. Quel est la loi du nombre d'individus vivant au temps t ?