Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

MAP 311 - PC 2 - 30 mai 2011

Stéphanie Allassonnière, Vincent Bansaye

Borel Cantelli

EXERCICE 1 -
A un jeu de pile ou face on perd ou on gagne un euro selon la face apparue. On suppose que les tirages successifs forment une suite indépendante et qu'à chaque tirage la probabilité de voir pile est $0 < p < 1$. Soit A_n l'événement "le montant cumulé des gains est nul juste après le tirage n". Trouver une condition sur p pour que $\mathsf{P}(\limsup_n A_n) = 0$, et interpréter ce résultat. Pour $p = \frac{1}{2}$ on pourra utiliser la formule de Stirling : $m! \sim \sqrt{2\pi} m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m}$.

EXERCICE 2 - Un singe immortel tape totalement au hasard sur une machine à écrire.

a) Montrer qu' il écrira une infinité de fois les oeuvres de Shakespeare (complètes et dans l'ordre).

b) Votre cousin et vous assistez à la scène. Votre cousin attend que le singe tape "ABC". Vous lui pariez qu'il tapera avant "ABA". Avez vous raison ?

Variables aléatoires discrètes

EXERCICE 3 -
Soient E et F des ensembles finis. Montrez qu'il est équivalent de supposer que X et Y sont deux v.a. indépendantes de lois uniformes sur E et F, ou de supposer que le couple (X, Y) est de loi uniforme sur $E \times F$.

EXERCICE 4 -
Soient X et Y deux variables définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ne pouvant prendre que deux valeurs distinctes. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $E(XY) = E(X)E(Y)$.
Montrer que ce résultat est faux si X, Y prennent plus de deux valeurs.

EXERCICE 5 -
On lance deux dés.

a)Donner trois variables aléatoires qui sont indépendantes deux à deux mais qui ne sont pas indépendantes dans leur ensemble.

b) Vous jouez contre votre cousin en pariant sur la somme de ces deux lancés.
Sur quelle valeur pariez vous ?
Votre cousin a comme chiffre fétiche le 3 et le joue systématiquement. Combien a-t-il perdu contre vous en moyenne au bout de n paris ?

EXERCICE 6 -
a) Montrer que si $X \in \mathbb{N}$ a.s. Montrer que

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$$

b) Vous rentrez en voiture et cherchez une place de parking en faisant le tour du quartier ; au $n$ième tour, vous avez une chance sur $n+1$ de trouver une place. Combien de tours sont nécessaires, en moyenne, pour vous garer ?

EXERCICE 7 -
Soit X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 > 0$.
1) Calculer la loi de $X_1 + X_2$.
2) Calculer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Reconnaître cette loi.
3) Calculer $\mathsf{E}(X_1 | X_1 + X_2)$.

EXERCICE 8 -
Un vendeur de glaces installé dans la rue voit passer un nombre N de passants dans la journée. On suppose que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On appelle G_i le nombre de glaces achetées par le i-ème passant. On fait l'hypothèse que les $N, G_1, G_2, \ldots$ sont indépendantes et que chaque passant achète une glace avec probabilité p et aucune glace avec probabilité $1-p$. Quelle est la loi du nombre X de glaces vendues pendant une journée ?

EXERCICE 9 -
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires I.I.D. (indépendantes et identiquement distribuées) suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et $S = X_1 + \ldots + X_n$ leur somme. Pour $s \in \{0, \ldots, n\}$, donner la loi conditionnelle de X_1 sachant $S = s$ et calculer $\mathsf{E}(X_1 | S)$.

EXERCICE 10 -
(Problème du collectionneur) Vous collectionnez les jouets des oeufs Kinder. Il y a k jouets à collectionner. Combien vous faudra-t-il manger, en loi, d'oeufs pour avoir la collection complète ? Combien cela fait il d'oeufs en moyenne ?

On considerera les v.a. T_n donnant le nombre d'oeufs nécessaires pour obtenir un nouveau $n$ième jouet et on montrera que ces v.a. sont géométriques et indépendantes.

EXERCICE 11 -
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $\nu = \inf\{n \geq 1, S_n = m\}$. Donner la loi de ν, puis sa fonction génératrice et sa variance.

EXERCICE 12 -
1) Soit X une v.a. de loi concentrée sur $\{1, \ldots, k\}$; $P(X = j) = p_j, 1 \leq j \leq k$. Soit $Z^j = \mathbf{1}_{(X=j)}$ et $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}_+^k$. Calculer :

$$\mathsf{E}\left[s_1^{Z^1} s_2^{Z^2} \cdots s_k^{Z^k}\right].$$

2) Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de la loi précédente (n variables indépendantes de même loi), et $N^j = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(X_i = j)}$.
Calculer $\mathsf{E}\left[s_1^{N^1} s_2^{N^2} \cdots s_k^{N^k}\right]$, et en déduire, pour $a_1, \ldots, a_k$ entiers de somme n :

$$P(N^1 = a_1, \ldots, N^k = a_k) = \frac{n!}{a_1! \ldots a_k!} p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}.$$

C'est la loi multinomiale de paramètre $(p_1, \ldots, p_k)$ et d'ordre n.