Map 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

PC 6 - 27 juin 2011 -

Fonction caractéristique. Théorème central limite.

EXERCICE 1 -

La mesure gaussienne standard s'écrit

$$\gamma(dx) = \exp(-x^2/2)\, dx/\sqrt{2\pi}.$$

1) Donnez la fonction caractéristique de cette mesure. (On pourra montrer que la fonction $\Phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx-x^2/2} dx/\sqrt{2\pi}$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre.)
2) En déduire tous les moments de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

EXERCICE 2 -Loi Gamma.

Pour tout $r > 0$ on pose $\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-t} t^{r-1} dt$ et on appelle loi $\Gamma_{r,\lambda}$ la probabilité de densité

$$\gamma_{r,\lambda}(t) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda t} t^{r-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t). \qquad r > 0, \lambda > 0.$$

1) Calculer la fonction caractéristique de $\Gamma_{r,\lambda}$.
2) Montrer que si X et Y sont des v.a indépendantes de loi respectives $\Gamma_{r,\lambda}$ et $\Gamma_{s,\lambda}$ alors $X+Y$ a une loi $\Gamma_{r+s,\lambda}$.
3) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. Calculer la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.
4) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que X_1^2 a une loi Γ et en déduire la loi de $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ (loi de χ^2).

EXERCICE 3 -

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d gaussiennes centrées réduites.
On pose $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

1) Calculer la fonction caractéristique de X.
2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $B \in \mathbb{R}^n$. Calculer la densité du vecteur $AX+B$, ainsi que sa fonction caractéristique .
3) Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que X et PX ont même loi. En déduire que la loi de $\frac{X}{||X||}$ est une mesure de probabilité sur la sphère unité $S^{(n-1)}$ de $\mathbb{R}^n$ invariante par toute transformation orthogonale (cette propriété caractérise la mesure uniforme sur $S^{(n-1)}$).

EXERCICE 4 -

Soit (X_1, X_2, X_3) vecteur normal centré de matrice de variance covariance

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Calculer la variance de $X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2$. En déduire que X_3 est (presque sûrement) combinaison linéaire de X_1 et X_2.

EXERCICE 5 -

Appliquer le théorème limite central à une suite de v.a i.i.d de loi de poisson de paramètre 1 pour trouver la limite de la suite

$$u_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

EXERCICE 6 -Intervalle de confiance
On effectue une enquête, durant une épidémie de grippe, dans le but de connaître la proportion p de personnes présentant ensuite des complications graves. On observe un échantillon représentatif de 400 personnes et pour un tel échantillon 40 personnes ont présenté des complications.

1) Donner un intervalle de confiance pour p au risque 5%.
2) On désire que la valeur estimée $\hat{p}$ diffère de la proportion inconnue exacte p de moins de $0,005$ avec une probabilité égale à 95%. Quel sera l'effectif d'un tel échantillon ?
3) Quel devrait être le risque pour obtenir le même intervalle qu'à la question précédente en conservant l'effectif $n = 400$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

EXERCICE 7 -Réduction de variance dans une méthode de Monte Carlo
Soit g une fonction mesurable et bornée ($0 \leq g \leq 1$). On souhaite calculer $m = \int_0^1 g(x)dx$. Soient X et Y des variables i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$U = \mathbf{1}_{Y \leq g(X)}, \qquad V = g(X) \quad \text{et} \quad W = \frac{g(X) + g(1-X)}{2}.$$

1) Calculer l'espérance et la variance de U, V et W. Comparer les variances.
2) Proposer 3 méthodes de type Monte-Carlo pour calculer m.
3) On suppose dans la suite que g est monotone. Vérifier que $\mathbb{E}(g(X)g(1-X)) \leq m^2$. *Indication :* on pourra d'abord montrer que $(g(x) - g(y))(g(1-x) - g(1-y)) \leq 0$ pour tout x, y.
4) On considère $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables de loi uniforme sur $[0,1]$. Des estimateurs $A_n = \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} g(X_i)$ et $B_n = \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (g(X_i) + g(1-X_i))$, lequel est le meilleur pour calculer m ?
5) Prenons par exemple $g(x) = x^2$. En appliquant le théorème de la limite centrale, déterminer combien de simulations n (pour les estimateurs A_n et B_n) sont nécessaires pour obtenir une précision relative de l'ordre de 1% sur le calcul de m avec probabilité 95%. Commenter.

EXERCICE 8 - Soit $(X_i : i \geq 1)$ une suite de v.a. i.i.d. strictement positives d'espérance 1 et de carrés intégrables.
Donner la limite (en précisant en quelle sens elle a lieu) quand $n \to \infty$ de

$$\sqrt{n} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)}{\sum_{i=1}^n X_i}.$$

On pourra utiliser le lemme de Slutzky : si A_n et B_n sont deux suites de variables aléatoires telles que A_n converge en loi vers A et B_n converge en probabilité vers une constante b, alors $A_n + B_n$ (resp. $A_n B_n$) converge en loi vers $A + b$ (resp. Ab).

EXERCICE 9 -[Somme de variables indépendantes de loi de Cauchy]

On rappelle que si X est une variable aléatoire de loi de Cauchy de paramètre $a > 0$, alors $\mathbb{E}[\exp iuX] = \exp(-a|u|)$.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre $a > 0$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Étudier les convergences en loi et en probabilité des suites :

1. $\left(\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}, n \geq 1 \right)$.
2. $\left(\dfrac{S_n}{n^2}, n \geq 1 \right)$.
3. $\left(\dfrac{S_n}{n}, n \geq 1 \right)$.

Pour la dernière, on pourra dans un premier temps déterminer la loi de $\dfrac{S_{2n}}{2n} - \dfrac{S_n}{n}$.

EXERCICE 10 -*Convergence vers la loi de Poisson : Théorème des évenements rares.* À tout entier n on associe les variables aléatoires $(X_{n,m})_{1 \leq m \leq n}$. On suppose que ces variables sont indépendantes et que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n,m} = 1) = p_{n,m}, \qquad \mathbb{P}(X_{n,m} = 0) = 1 - p_{n,m}, \\
&\lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n} p_{n,m} = \lambda \in]0, \infty[, \\
&\lim_{n \to \infty} \max_{1 \leq m \leq n} p_{n,m} = 0.
\end{aligned}$$

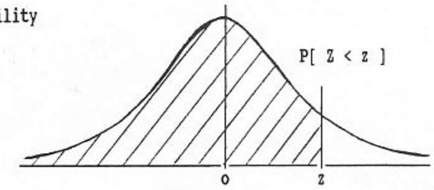
Montrer que $S_n = \sum_{m=1}^{n} X_{n,m}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.
On pourra utiliser les fonctions caractéristiques et l'inégalité $\left|\Pi_{m=1}^{n} z_m - \Pi_{m=1}^{n} w_m\right| \leq \theta^{n-1} \sum_{m=1}^{n} |z_m - w_m|$ pour z_i, w_i des complexes de module $\leq \theta$.

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z
i.e.

$$P[\,Z < z\,] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2}Z^2)\, dZ$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000