Map 311 - Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.
PC 7 - 4 juillet 2011

Modèles dynamiques aléatoires

EXERCICE 1 -Processus de branchement
Soient $(N_{i,n}, i \geq 1,\ n \geq 1)$ des variables entières indépendantes identiquement distribuées comme une variable N de fonction génératrice $f(s) = \mathsf{E}(s^N)$. Dans ce qui suit, on convient qu'une somme comprenant 0 terme est nulle.

1. On numérote les générations par les entiers successifs et chaque individu d'une génération porte lui même un numéro. On suppose que les $N_{i,n}$ donnent le nombre d'enfants de l'individu i à la génération n. Autrement dit les individus se reproduisent de manière asexuée, indépendamment les uns des autres suivant la même loi de reproduction.
   On note Z_n la taille de la population à la génération n. Ecrire Z_{n+1} en fonction de Z_n pour $n \geq 0$.
2. On suppose $Z_0 = 1$. Montrer que la fonction génératrice f_n de Z_n vérifie $f_{n+1}(s) = f_n(f(s))$ pour $s \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Une caractéristique importante concerne les chances de survie de la population. Soit ρ la probabilité que la population s'éteigne et ρ_n celle qu'elle ait disparu à la génération n. Montrer que la suite ρ_n converge vers
$$\inf\{s \in [0,1] : f(s) = s\} = \rho.$$
4. Déduire de la convexité de f danq quel cas ρ est égaleà 1, en fonction de $\mathsf{E}(N)$.
5. Trouver l'expression de la variance de Z_n quand $\mathsf{E}(N^2) < \infty$.
6. L'environnement alterne maintenant entre deux valeurs et les lois de reproduction associées sont données par N_1 et N_2. Pouvez vous préciser quand la population s'éteint p.s. ?

EXERCICE 2 -
On répartit $2r$ boules dont r blanches et r noires dans deux urnes ; chaque urne contient toujours r boules. *L'état du système* à l'instant n est le nombre X_n de boules blanches dans la première urne. A chaque étape, une boule est choisie au hasard dans chacune des urnes et ces deux boules sont échangées. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov et expliciter sa matrice de transition.

EXERCICE 3 -Modèle de diffusion de Ehrenfest.
Un ensemble de N particules occupent une enceinte divisée en deux parties A_0, A_1 par une paroi poreuse. A chaque instant une particule choisie au hasard change de côté. On note $X_t = (x_t^1, \ldots, x_t^N) \in \{0,1\}^N$ l'état du système à l' instant t avec la convention $x_t^i = 1$ $(x_i^t = 0)$ si la $i$ème particule est dans l'enceinte A_1 (A_0).

1. Montrer que $\{X_t\}$ est une chaîne de Markov . Calculer sa matrice de transition et sa mesure invariante.
2. Soit $Y_t = \sum_{i=1}^n x_t^i$ le nombre de particules dans l'enceinte de droite. Montrer que Y_t est une chaîne de Markov. Calculer sa matrice de transition et sa mesure invariante.

EXERCICE 4 -Un exemple de marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$ pour $d = 2$ ou $d = 3$

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$, $(Z_n)_{n\geq 1}$ des suites de variables i.i.d prenant les valeurs $+1$ et -1 avec probabilité $1/2$.

1. On note $\xi_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ et $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ avec par convention $S_0 = (0, 0, 0)$.
Soit $a = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ et $N_a = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{S_n=a\}}$ le nombre de passages en a.
Rappel : Formule de Stirling

$$\log(n!) = n(\log(n) - 1) + \frac{1}{2}\log(n) + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O(1/n).$$

1.a) Calculer $\mathbb{P}(S_n = (0, 0, 0))$, puis montrer que $\mathbb{E}(N_{(0,0,0)}) < +\infty$ (donc en conséquence $\mathbb{P}(N_{(0,0,0)} < +\infty) = 1$).

1.b) Reprendre le calcul pour a quelconque. En déduire que $\mathbb{P}(|S_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty) = 1$ où $|.|$ désigne n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^3$. On dit que la marche aléatoire S_n est transiente. Comparer avec la marche usuelle sur $\mathbb{Z}$.

2. On considère maintenant $\eta_n = (X_n, Y_n)$ et on note S'_n la somme obtenue en remplaçant les ξ_j par les η_j. On note $T_{(0,0)} = \min\{n \geq 1 \,:\, S'_n = (0, 0)\}$, $F_{(0,0)} = \mathbb{E}(z^{T_{(0,0)}})$ et $Q_{(0,0)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n\, \mathbb{P}(S'_n = (0, 0))$ pour $|z| < 1$.

2.a) Vérifier la relation $Q_{(0,0)}(z) = 1+Q_{(0,0)}(z)F_{(0,0)}(z)$. En déduire que $\mathbb{P}(T_{(0,0)} < +\infty) = 1$. (On pourra également voir de la même manière que $\mathbb{P}(T_{(0,0,0)} < +\infty) < 1$ pour la marche S_n).

2.b)(*) On considère la marche "au plus proche voisin" sur $\mathbb{Z}^d$ donnée par récurrence par $M_0 = 0 \in \mathbb{Z}^d$ et la loi conditionnelle de M_{n+1} sachant $M_n = a \in \mathbb{Z}^d$ est uniforme sur les voisins de a (c'est-à-dire les b tels que $\sum_{i=1}^{d} |a_i - b_i| = 1$). Montrer que pour $d = 2$ le comportement de M_n est le même que celui de S'_n.