Exercices d'Analyse (deuxième série)

Table des matières

1 Topologie, espaces métriques

Exercice 1 Soit E un espace métrique. Montrer que toute reunion et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Que peut-on dire des intersections infinies d'ensembles ouverts ?

Exercice 2 Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

$$I = \bigcup_{n>1} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \text{ et } J = \bigcap_{i>0, j>0}] - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{j}[.$$

Exercice 3 Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

Exercice 4 Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$; montrer qu'elle est fermée si et seulement si pour toute partie fermée bornée $K, K \cap X$ est fermée bornée.

Exercice 5 Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrer que $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ est une distance sur E. Enoncer des conditions suffisantes sur une fonction f, définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ pour que $(x, y) \longrightarrow f(d(x, y))$ soit une distance sur E.
2. Montrer que l'application d'' définie sur $E \times E$ par $d''(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ est une distance sur E. *Indication* : On utilisera la croissance de la fonction $u \longrightarrow \dfrac{u}{1 + u}$.
3. Comparer les distances d et d'' .
4. Dans le cas où E est l'ensemble des nombres réels et où d est la distance valeur absolue, construire $B_{d''}(0, a)$ où a est un réel.

2 Espaces vectoriels normés

Exercice 6 Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que $\bar{A}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A.
2. On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que si A est bornée, alors $\sup A \in \bar{A}$. (Construire une suite de points appropriée.)

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E. On pose $A + B = \{z \in E \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y\}$.
Montrer que si A est ouvert, $A + B$ est ouvert. (Commencer par le cas où B est un singleton.)

Exercice 8 Soit E un evn, V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\overset{\circ}{V} \neq \varnothing$ alors $V = E$.

Exercice 9 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit L une application linéaire de E dans F.

1. Montrer que L est continue en 0 si et seulement si elle est continue en tout point de E.
2. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que
$$\|L(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E \qquad \forall x \in E.$$
Montrer que L est continue.
3. Dans la suite, on suppose que L est continue et on pose
$$K = \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F.$$
   (a) Supposons que $K = +\infty$. Montrer qu'alors il existe une suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout n et telle que $\|L(x_n)\|_F$ tend vers $+\infty$. En déduire qu'il existe une suite y_n tendant vers 0 et telle que $\|L(y_n)\|_F = 1$.
   (b) En déduire que $K \in \mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in E$ on a
$$\|L(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E.$$

Exercice 10 Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, continues et dérivables sur [0,1] et vérifiant $f(0) = 0$. On définit sur cet espace les deux normes suivantes :
$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que $N_1(f) \leqslant N_2(f)$. En déduire que l'application identique de (E, N_2) vers (E, N_1) est continue.
2. A l'aide de la fonction $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, montrer que l'application identique de (E, N_1) vers (E, N_2) n'est pas continue.

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E et x un élément de E. Comparer les deux assertions :
i) Pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A \cap B(x, \varepsilon)$ est infini.
ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément y distinct de x dans $A \cap B(x, \varepsilon)$.

3 Convexité

Exercice 12 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[$.

1. En utilisant la concavité du log, montrer que $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.
2. Montrer que $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$.
3. En déduire que $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$.

Exercice 13 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ convexe.

1. Montrer que f' admet une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
2. En déduire que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$ (on pourra utiliser des ε et une formule de Taylor à l'ordre 1).

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe majorée. Que dire de f ? Et si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$?

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 16 A est dit *convexe* s'il contient tout segment reliant deux quelconques de ses points :

$$\forall (x, y) \in A^2,\ [x, y] = \{x + t(y - x),\ t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N. Montrer que toute boule fermée (ou ouverte) est convexe et symétrique par rapport à son centre.

Exercice 17 On rappelle qu'un ensemble C d'un espace vectoriel E est convexe si

$$\forall (A, B) \in C^2,\ \forall t \in [0, 1],\ tA + (1 - t)B \in C$$

Une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ sera dite convexe si

$$\forall (A, B) \in C^2,\ \forall t \in [0, 1],\ f(tA + (1 - t)B) \leqslant tf(A) + (1 - t)f(B)$$

On suppose que E est un espace vectoriel réel normé de dimension finie. Montrer que :

1. L'intersection de deux convexes est un convexe.
2. Une boule ouverte (resp. fermée) est convexe.
3. Un segment est convexe.
4. Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe $G = \{(x, f(x)), x \in C\}$ est un ensemble convexe de $E \times \mathbb{R}$.
5. La somme, le sup de fonctions convexes (sur C) est convexe.
6. Une application convexe sur C **ouvert** est continue (on pourra travailler en dimension 1).
7. La limite simple de fonctions convexes (sur C) est convexe (sur C) (on pourra travailler en dimension 1).
8. Une suite $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ de fonctions continues convexes convergeant simplement vers une fonction continue f converge uniformément.

4 Compacité

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
(1) $\forall M > 0, \exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \Rightarrow |f(x)| > M$.
(2) Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
(3) Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 19 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et x sa limite. Montrer que l'ensemble $\{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est compact.

Exercice 20 Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, K_{n+1} \subset K_n$, et $K_n \neq \emptyset$.
Montrer que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset.$$

Exercice 21 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, x un élément de E et A un compact de E.

1. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $\|y\|$ est continue.
2. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $\|y - x\|$ est continue.
3. Montrer que la distance de x à A est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tel que

$$\inf_{y\in A} \|y - x\| = \|a - x\|.$$

Exercice 22 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. $f : E \to F$ continue, $C \subset E$ compact.

1. Montrer que l'image continue d'un compact est compact ($f(C)$ compact).
2. Montrer que f est uniformément continue sur C (théorème de Heine).

5 Complétude, point fixe

Exercice 23 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que (x_n) est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 24 Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies et nues sur [-1,1].

1. Montrer que les trois applications suivantes sont des normes sur E :

$$f \longrightarrow \|f\|_1 = \int_{-1}^{+1} |f(x)|dx, \quad f \longrightarrow \|f\|_2 = (\int_{-1}^{+1} f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$f \longrightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,+1]} \{|f(x)|\}$$

2. On considère la suite $(f_n)_{n\in N^*}$ de fonctions définies par $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx & \text{si } x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

   La suite f_n est-elle de Cauchy dans $(E, \|.\|_1)$, $(E, \|.\|_2)$ et dans $(E, \|.\|_\infty)$? Conclusions ?

Exercice 25 Soit (E, d) un espace métrique complet, et f une application de E dans E telle qu'il existe $k \in \mathbb{R},\ 0 < k < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leqslant k\ d(x, y) \quad \forall x \in E,\ \forall y \in E$.

1. Montrer que f est continue sur (E, d).
2. Soient $x_0 \in E$ et pour $n \geqslant 0,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans (E, d).
3. Montrer que cette suite converge vers un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de $f(l) = l$. Montrer que ce point fixe est unique.
4. Application : montrer que le système $\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 &= \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 26 Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application continue g de E dans E est dite *contractante* s'il existe $K \in]0, 1[$ tel que

$$\|g(x) - g(y)\| \leqslant K\|x - y\| \qquad \forall x, y \in E.$$

On rappelle aussi que toute application contractante admet un unique point fixe.
Soit f une application continue de E dans E telle qu'il existe un entier n tel que f^n soit contractante. On note x_0 le point fixe de f^n.

1. Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^n.
2. Montrer que si x est un point fixe de f^n, il en est de même pour $f(x)$.
3. En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.

6 Suites et séries de fonctions

Exercice 27 On définit pour tout $n \geqslant 2$ les fonctions suivantes (sur $[0,1]$) :

$$f_n(t) = (n^2 t)\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}[} + (-n^2 t + 2n)\mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite f_n sur $[0,1]$.
2. On pose pour tout $n \geqslant 2$ $h_n(t) = f_n(t)\sin^2(t)$. Étudier la convergence simple et uniforme de h_n sur $[0,1]$.

Exercice 28 Soit $u_n(x)$ une série définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si la série converge normalement sur I, alors la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ converge uniformément vers une fonction S sur I.

Exercice 29 Soient $f_n : D \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue f et (x_n) une suite d'éléments de D convergeant vers $x \in D$.

1. Montrer que si les fonctions f_n convergent uniformément,

$$f_n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

2. Donner un contre-exemple lorsqu'il y a seulement convergence simple.

Exercice 30 (Théorèmes de Dini)] Soient $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue f.

1. On suppose que chaque fonction f_n est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.
2. On suppose qu'à x fixé la suite $(f_n(x))$ est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

Exercice 31 (Théorème d'Ascoli)] Soient $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions $k-$Lipchitziennes (avec le même k) convergeant simplement vers une fonction f.

1. Soit $(a_0, a_1, ..., a_N)$ une subdivision régulière de [a, b]. On note $M_n = \max_{0\leqslant i\leqslant N} |f_n(a_i) - f(a_i)|$. Encadrer $||f_n - f||_\infty$ à l'aide de M_n.
2. Montrer que f_n converge uniformément vers f.

7 Espace de Hilbert

Exercice 32 Soient E, F deux espaces de Banach. On dit qu'une suite $x_n \in E$ converge faiblement vers x si

$$\forall \phi \in E',\ \phi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$$

On dit que $f : E \to F$ linéaire est faiblement continue si pour toute suite $x_n \in E$ convergeant faiblement vers x, $f(x_n)$ converge faiblement vers $f(x)$.
On suppose désormais que $E = F = H$ est un Hilbert.

1. Écrire la convergence faible dans ce cas.
2. Montrer que

$$\{x_n \to x \text{ fortement }\} \iff \{x_n \to x \text{ faiblement et } ||x_n|| \to ||x||\}$$

3. Montrer que f endomorphisme symétrique ($\langle f(x), y\rangle_H = \langle x, f(y)\rangle_H$) est faiblement continue.
4. On suppose de plus que $x \mapsto ||f(x)||$ est fortement continue. Montrer que f (symétrique) est fortement continu.