École Nationale de la Statistique
et de l'Administration Économique

Cours d'Analyse Fonctionnelle et Convexe

Philippe Bich

2008 - 2009

Avant-propos

Je tiens à remercier Hervé Moulin, Bernard Cornet, Georges Haddad, Jean-Charles Rochet, Elyes Jouini, Jean-Marc Bonnisseau, Moncef Meddeb, Pascal Gourdel et Jean-Philippe Médecin qui ont assuré cet enseignement d'analyse fonctionnelle et convexe à l'ENSAE, avant moi. Ils ont contribué à en définir son contenu. Toutes les erreurs qui figurent dans ces notes de cours, restent cependant de ma responsabilité et je remercie d'avance tous les élèves et les collègues de me les signaler.

Le cours en amphi ne traitera qu'une partie de ces notes.

Chacun des chapitres est suivi d'une série d'exercices dont seulement une partie sera traitée en TP.

Philippe Bich
Université Paris 1
106-112 bd de l'Hôpital
75647 Paris Cedex 13.
Email : bich@univ-paris1.fr

Table des matières

Chapitre 1

Espace topologique

1.1 Définition d'une topologie

<u>Définition</u> 1.1.1

- Soit X un ensemble. Un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de l'ensemble des parties de X est une topologie sur X s'il contient l'ensemble vide et X et s'il est stable par réunion quelconque et par intersection finie. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts pour la topologie $\mathcal{T}$.
- Une topologie sur X est séparée si pour tout $x, y \in X$, si $x \neq y$ alors $\exists U, V \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.
- Tout complémentaire d'un ouvert sera appelé un fermé.
- Un **espace topologique** est alors un couple $(X, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ topologie sur X.

<u>Exemple</u> :

- L'ensemble des ouverts (au sens de la norme) dans un Espace Vectoriel Normé est une topologie sur X. Même chose pour un espace métrique.
- La topologie discrète sur un ensemble X est la topologie dont les ouverts sont toutes les parties de X.
- La topologie grossière sur un ensemble X est la topologie dont les ouverts sont $\emptyset$ et X.

1.2 Définition d'un voisinage

<u>Définition</u> 1.2.1

- Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique ; on appelle voisinage de $x \in X$ tout ensemble $V \subset X$ contenant un ouvert qui contient x.
- On notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

<u>Proposition</u> 1.2.1 *Un ensemble est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points.*

La preuve de cette proposition est laissée en exercice.

En fait, une topologie peut se définir à partir de l'ensemble de ses voisinages. Pour cela, il faut définir de manière axiomatique les propriétés que l'ensemble des voisinages $\mathcal{V}(x)$ de chaque point $x \in X$ devraient vérifier :

<u>Proposition</u> 1.2.2 *Soit X un ensemble. Pour tout $x \in X$, on se donne $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ un ensemble de parties de X, tel que :*

- *(i) Pour tout $x \in X$, $V \in \mathcal{V}(x)$ implique $x \in V$ (tout voisinage de x contient x).*

- *(ii) Pour tout $x \in X$, $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subset V' \subset X$ implique $V' \in \mathcal{V}(x)$ (tout sous ensemble de X contenant un voisinage de x est un voisinage de x).*
- *(iii) Pour tout $x \in X$ et $V, V' \in \mathcal{V}(x)$, on a $V \cap V' \in \mathcal{V}(x)$ (l'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x).*
- *(iv) Pour tout $x \in X$ et $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $U \subset V$, avec $U \in \mathcal{V}(x)$ tel que $\forall y \in U, U \in \mathcal{V}(y)$ (Tout voisinage de x contient un voisinage de x qui est un voisinage chacun de ses points).*

Alors l'ensemble $\mathcal{T}$ des voisinages $V \in \mathcal{V}(x)$, pour x parcourant X, tels que V est voisinage de chacun de ses points (c'est à dire $\forall y \in U, U \in \mathcal{V}(y)$), est une topologie. De plus, si on se donne une topologie $\mathcal{T}'$, alors l'ensemble de ses voisinages vérifie les propriétés précédentes, et la topologie définie par ces voisinage est égale à $\mathcal{T}'$.

Ainsi, une topologie est caractérisée par ses voisinages.

<u>Exemple</u> : Soit X l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in X$, on pose $\mathcal{V}_f$ l'ensemble des parties V_f de X telle qu'il existe C (dépendant de V_f) une partie finie non vide de $\mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ (dépendant de V_f), avec

$$\forall g \in X, \sup_{x \in C} \mid f(x) - g(x) \mid < \epsilon \Rightarrow g \in V_f$$

La topologie définie par ces voisinages est appelée topologie de la convergence simple sur $\mathbb{R}$.

<u>Exemple</u> : Soit X l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in X$, on pose $\mathcal{V}_f$ l'ensemble des parties V_f de X telle qu'il existe $\epsilon > 0$ (dépendant de V_f), avec

$$\forall g \in X, \sup_{x \in \mathbb{R}} \mid f(x) - g(x) \mid < \epsilon \Rightarrow g \in V_f$$

La topologie définie par ces voisinages est appelée topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

1.3 Topologie induite

<u>Définition</u> 1.3.1 Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $Y \subset X$, on définit la topologie induite $\mathcal{T}'$ sur Y comme ceci :

$O' \in \mathcal{T}'$ si et seulement si $O' = Y \cap O$ pour un certain $O \in \mathcal{T}$.

On laisse le lecteur vérifier que l'on définit bien ainsi une topologie.

1.4 Topologie engendrée

<u>Définition</u> 1.4.1 Une topologie $\mathcal{T}$ (sur X) est dite plus fine qu'une topologie $\mathcal{T}'$ (sur X) si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

<u>Définition</u> 1.4.2 Si X ensemble et $\mathcal{X}$ ensemble de parties de X, on définit la topologie engendrée par $\mathcal{X}$ comme la topologie la moins fine qui contienne $\mathcal{X}$.

<u>Proposition</u> 1.4.1
- *La topologie engendrée par $\mathcal{X}$ est l'intersection de toutes les topologies contenant $\mathcal{X}$.*
- *Plus explicitement, on peut aussi obtenir la topologie engendrée par $\mathcal{X}$ en prenant toute les intersections finies possibles d'éléments de $\mathcal{X}$, puis toute les unions quelconques d'ensembles ainsi formées.*

On laisse le lecteur prouver cette proposition.

1.5 Topologie produit

DÉFINITION 1.5.1 Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)$ $(i \in I)$ une famille d'espaces topologiques.

– On appelle pavé de $\prod_{i\in I} X_i$ tout espace produit $\prod_{i\in I} U_i$ où pour tout i U_i est un ouvert de X_i et où pour tout indice i, sauf un nombre fini d'entre eux, on a $U_i = X_i$.
– On appelle topologie produit sur $X = \prod_i X_i$ la topologie engendrée par les pavés.

1.6 Intérieur, adhérence, point d'accumulation

1.6.1 Adhérence

DÉFINITION 1.6.1 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et Y une partie de X.

– L'adhérence de Y, noté $\overline{Y}$, est le plus petit fermé contenant Y.
– Un point $x \in X$ est dit adhérent à $Y \subset X$ si $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap Y \neq \emptyset$.
– Un sous ensemble $Y \subset X$ est dit dense dans X si $\overline{Y} = X$.

La proposition suivant est laissée à titre d'exercice :

PROPOSITION 1.6.1 *L'adhérence de Y est aussi l'ensemble des points adhérents à Y. C'est encore l'intersection des fermés qui contiennent Y.*

1.6.2 Intérieur

DÉFINITION 1.6.2 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et Y une partie de X.

– L'intérieur de Y, noté $\overset{o}{Y}$ est le plus grand ouvert inclu dans Y.
– Un point $x \in X$ est dit intérieur à Y si Y est voisinage de x.

La proposition suivant est laissée à titre d'exercice :

PROPOSITION 1.6.2 *L'intérieur de Y est égal à l'ensemble des points intérieurs de Y. C'est encore l'union des ouverts qui sont inclus dans Y.*

1.6.3 Point d'accumulation, point isolé, frontière.

DÉFINITION 1.6.3 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et Y partie de X.

– Un élément $x \in X$ est **isolé** si l'ensemble $\{x\}$ est un ouvert de $\mathcal{T}$; sinon x est un **point d'accumulation.**
– La **frontière** de $Y \subset X$, notée ∂Y, est

$$\partial Y = \overline{Y} \setminus int(Y).$$

1.7 Suite dans un espace topologique

1.7.1 Limite d'une suite dans un espace topologique

<u>Définition</u> 1.7.1 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists N(O) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N(O), u_n \in V.$$

Le théorème suivant montre l'intérêt d'avoir des espaces séparés :

<u>Théorème</u> 1.7.1 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. La limite d'une suite, si elle existe, est unique.*

Remarque Importante A partir de maintenant, espaces supposés séparés (sauf précision contraire).

1.7.2 Valeur d'adhérence d'une suite d'un espace topologique

<u>Définition</u> 1.7.2

- Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'une suite (u_n) a pour valeur d'adhérence $x \in X$ si
$$x \in \overline{\{u_n, n \in \mathbb{N}\}}$$
- Une sous-suite de (u_n) est une suite de la forme $(u_{\phi(n)})$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

<u>Proposition</u> 1.7.1 *Toute suite convergente de $Y \subset X$ converge dans $\overline{Y}$.*

On peut se demander si on a la réciproque : est-ce que tout élément de $\overline{Y}$ est limite d'une suite d'éléments de Y ? En fait, la réponse n'est oui que pour un certain type d'espace topologique, les espaces topologiques ayant une **base localement dénombrable de voisinages** :

<u>Définition</u> 1.7.3 Un espace topologique X est dit à base localement dénombrable de voisinages si pour tout $x \in X$, il existe une suite $V_n(x)$ de voisinages de x tel que pour tout voisinage V de x, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $V_n(x) \subset V$.

Alors on a :

<u>Proposition</u> 1.7.2 *Si X est un espace topologique à* **base localement dénombrable de voisinage***, alors $y \in \overline{Y}$ si et seulement si y est limite d'une suite d'éléments de Y. Par ailleurs, $Y \subset X$ est fermé si et seulement si toute suite convergente de Y converge dans Y.*

1.8 Continuité d'une application entre espaces topologiques

<u>Définition</u> 1.8.1 Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{U})$ deux espaces topologiques. On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est continue si l'une des propriétés suivantes équivalentes est vraie :

(i) $\forall O$ ouvert de Y, $f^{-1}(O)$ ouvert de X.

(ii) $\forall F$ fermé de Y, $f^{-1}(F)$ fermé de X.

(iii) $\forall x \in X$, $\forall V' \in \mathcal{V}(f(x))$, $\exists V \in \mathcal{V}(x) \mid f(V) \subset V'$.

<u>Proposition</u> 1.8.1 *Si $f : X \to Y$ continue, alors f continue séquentiellement, c'est à dire que pour tout $x \in X$ et pour toute suite (u_n) de X convergeant vers x, $f(u_n)$ converge vers $f(x)$. La réciproque est vraie lorsque X a une base localement dénombrable de voisinages.*

<u>Définition</u> 1.8.2 Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(Y,\mathcal{U})$ deux espaces topologiques. On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est ouverte (resp. fermée) si l'image de tout ouvert (resp. fermé) de X par f est un ouvert (resp. fermé) de Y

<u>Définition</u> 1.8.3 Soit $(X, \mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{U})$ deux espaces topologiques. Un homéomorphisme $f : X \to Y$ est une application continue bijective telle que f^{-1} est continue. Si un tel f existe, les espaces X et Y sont dit homéomorphes.

<u>Proposition</u> 1.8.2 *f est un homéomorphisme si f est bijective continue et si f est une application ouverte (c'est à dire l'image de tout ouvert par f est un ouvert.)*

1.9 Topologie et semi-norme

De nombreux espaces de fonctions importants sont des espaces topologiques dont la topologie ne provient pas d'une norme naturelle (i.e. les ouverts ne sont pas les ouverts pour cette norme), ce qui a motivé l'introduction des notions précédentes. Par contre, dans la plupart des cas, les espaces que nous verrons ont des topologies qui peuvent être construites à partir d'une famille de semi-norme, que nous définissons maintenant.

<u>Définition</u> 1.9.1 Soit E un espace vectoriel réel. Une semi-norme $p : E \to \mathbb{R}_+$ vérifie :

(i) $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, p(\lambda.x) =\mid \lambda \mid p(x)$.

(ii) $\forall(x, y) \in E \times E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

On dit qu'une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sépare les points si pour tout $x \in E$ tel que $p(x) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a $x = 0$.

<u>Exemples</u> :

i) Une norme $\|.\|$ sur E est une semi-norme, et la famille constituée de cette seule norme sépare les points.

ii) Sur $E = C^0([a, b])$, on introduit pour tout $u \in [a, b], \delta_u : E \to \mathbb{R}$ définie par $\delta_u(f) =\mid f(u) \mid$. C'est une semi-norme, et la famille $\mathcal{P} = \{\delta_u, u \in [a, b]\}$ sépare les points.

iii) Sur $E = C^1([a, b])$, $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} \mid f'(x) \mid$ est une semi-norme, et pas une norme. La famille $\{\|.\|, \delta_a\}$ sépare les points.

iv) Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $E = C(\Omega, \mathbb{R})$. Pour tout $K \subset \Omega$, avec K compact, on définit $\forall f \in E, p_K(f) = \max_{x\in K} \mid f(x) \mid$. C'est une semi-norme, et la famille de semi-norme $\mathcal{P} = \{p_K, K$ compact de $\Omega\}$ sépare les points.

La notion de semi-norme permet de définir une notion de convergence, qui généralise la notion de convergence au sens d'une norme :

<u>Définition</u> 1.9.2 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i\in I}$ une famille de semi-normes sur E qui sépare les points. On dira qu'une suite (x_n) de points de E converge vers $x \in E$ si pour tout $p \in \mathcal{P}$, $p(x_n - x)$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On laisse le lecteur montrer que la limite est unique si elle existe.

Afin de définir une topologie à partir d'une famille de semi-normes, on commence par définir la notion de boule ouverte :

<u>Définition</u> 1.9.3 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}$ une famille de semi-normes sur E qui sépare les points. Pour tout $J \subset I$ ensemble fini, pour tout $x \in E$ et $r > 0$, on définit $B_I(x,r) = \{y \in E, \forall i \in J, p_i(x-y) < r.\}$. On appelle boule ouverte pour la famille de semi-norme $\mathcal{P}$ tout sous-ensemble de E s'écrivant ainsi.

<u>Définition</u> 1.9.4 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes sur E qui sépare les points. On lui associe un ensemble de voisinages comme cela : un voisinage Ω d'un point $x \in E$ est par définition un ensemble tel qu'il existe $J \subset I$ ensemble fini, et $r > 0$ avec $B_I(x,r) \subset \Omega$. L'ensemble de ces voisinages définit alors une topologie, appelée **topologie associée à la famille de semi-normes** $\mathcal{P}$. Ainsi, un ensemble Ω est ouvert pour cette topologie si pour tout $x \in \Omega$, il existe $J \subset I$ ensemble fini, et $r > 0$ tel que $B_I(x,r) \subset \Omega$.

Un cas particulier intéressant est celui où l'on a une famille dénombrable de semi-normes :

<u>Proposition</u> 1.9.1 *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{P} = \{p_1, ..., p_n, ...\}$ une famille dénombrable de semi-normes qui sépare les points. Alors on peut définir une distance d sur E ainsi :*

$$\forall (x,y) \in E \times E, d(x,y) = \sum_n \frac{\{\min p_n(x-y), 1\}}{2^n}.$$

Par ailleurs, la topologie définie par d coincide avec la topologie associée à la famille de semi-normes $\mathcal{P}$.

Un espace vectoriel E est appelé espace de Fréchet si il est muni d'une famille $\mathcal{P} = \{p_1, ..., p_n, ...\}$ de semi-normes qui sépare les points, telle que la distance ci-dessus en fasse un espace complet.

1.10 Exercices

<u>Exercice</u> 1.1 Dire si les espaces suivants, muni des familles d'ouverts spécifiées, sont des espaces topologiques :

i) $\mathbf{Z}$ (ensemble des entiers relatifs) muni de $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{n.\mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$, où $n.\mathbf{Z} = \{n.x, x \in \mathbf{Z}\}$.

ii) $\mathbf{Q}$ (ensemble des rationnels) dont les ouverts sont les unions (quelconques) d'intervalles ouverts (finis ou non) de $\mathbf{Q}$.

<u>Exercice</u> 1.2 Trouver les topologies engendrées par :

i) $\chi = \{[x, x+1], x \in \mathbf{R}\}$ sur $\mathbf{R}$.

ii) L'ensemble des intervalles ouverts sur $\mathbf{R}$.

iii) $\{\{0\}, \{0, 3, 5\}, \{5, 6, 7\}\}$ sur $\mathbf{R}$.

<u>Exercice</u> 1.3 Soit A et B deux sous-ensembles d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Montrer :

i) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. A t-on l'inclusion réciproque ?

ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

iii) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$.

iv) $int(A) \cup int(B) \subset int(A \cup B)$. A t-on l'inclusion réciproque ?

v) Le complémentaire de $\overline{A}$ est l'intérieur du complémentaire de A.

vi) Le complémentaire de $int(A)$ est l'adhérence du complémentaire de A.

<u>Exercice</u> 1.4 Montrer que dans les exemples de la proposition 1.2.2, les voisinages introduits vérifient bien les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) de la proposition. Montrer que dire qu'une suite f_n de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge vers une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour la topologie de la convergence simple est équivalent à dire que f_n converge simplement vers f. Montrer la même chose pour la convergence uniforme et la topologie uniforme.

<u>Exercice</u> 1.5 Soit X un ensemble et χ un ensemble de parties de X. Soit χ_1 obtenu en prenant toutes les intersections finies possibles des parties de X qui sont dans χ. Soit χ_2 obtenu en prenant toutes les unions quelconques possibles des parties de X qui sont dans χ_1. Montrer que χ_2 est la topologie engendrée par χ.

<u>Exercice</u> 1.6 Soit $X = \{0, 1\}$ muni de la topologie discrète. Soit $E = \prod_{i=1}^{+\infty} X_i$ avec $X_i = X$ pour tout i. On munit E de la topologie produit. Pour tout entier n, soit $x(n) \in E$ dont les n premières coordonnées sont nulles, et les suivantes égales à 1. Est-ce que la suite $x(n)$ converge dans E muni de la topologie produit ? Montrer que de toute suite $y(n)$ d'éléments de E on peut extraire une sous-suite qui converge, dans E muni de la topologie produit. Maintenant, si on muni E de la topologie engendrée par les ouverts de la forme $\prod_{i=1}^{+\infty} U_i$ avec U_i ouvert de X_i, montrer que $x(n)$ ne converge plus.

<u>Exercice</u> 1.7 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et Y un sous-ensemble de X. Montrer que $\overline{Y}$ (intersection des fermés contenant Y) et l'ensemble des points d'adhérence de Y (points $x \in X$ tels que tout voisinage de x rencontre Y) coincident.

<u>Exercice</u> 1.8 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique qui admet une base localement dénombrable de voisinages, ce qui signifie : pour tout $x \in X$, il existe une famille dénombrable de voisinages V_i $(i = 1, 2, ..., n, ...)$ de x avec : Pour tout voisinage V de x, il existe $i \geq 0$ tel que $V_i \subset V$.

Montrer que si $y \in \overline{Y}$, où $Y \subset X$, alors il existe une suite de points de Y qui converge vers y.

Montrer qu'un ensemble Y est fermé si et seulement si toute suite convergente de points de Y converge dans Y.

<u>Exercice</u> 1.9 Soit E un ensemble, et $\mathcal{T}$ l'ensemble contenant $\emptyset$ ainsi que tous les complémentaires (dans E) des parties finies de E. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie. Si on suppose que E est infini, est-ce que E, muni de cette topologie, est séparé ?

Chapitre 2

Espaces métriques

2.1 Généralités sur les espaces métriques

<u>Définition</u> 2.1.1 Soit E, un ensemble. Une distance d sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes : $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E$:

- $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Un ensemble E muni d'une distance est appelé un espace métrique.

<u>Exemples</u> :

- $\mathbb{R}$ muni de $(x, y) \mapsto |x - y|$;
- $\mathbb{R}$, muni de $(x, y) \mapsto \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$;
- E, ensemble quelconque muni de la distance d définie par $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ (distance discrète).
- Si (E, d) est un espace métrique, tout sous-ensemble F de E est un espace métrique si on le munit de la distance qui est la restriction de d à $F \times F$.

<u>Définition</u> 2.1.2 Soit (E, d) un espace métrique.

- Pour tout $x_0 \in E$ et pour tout $r \geq 0$, la boule ouverte (resp. fermée) de centre x_0 et de rayon r est le sous-ensemble de E, notée $B(x_0, r)$ (resp. $\overline{B}(x_0, r)$ et défini par : $B(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) < r\}$, (resp. $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) \leq r\}$)
- Un sous-ensemble U de E est un ouvert de l'espace métrique (E, d) si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.
- Un sous-ensemble V de E est un voisinage d'un élément x_0 de E s'il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset V$.
- Un sous-ensemble F de E est un fermé de l'espace métrique (E, d) si son complémentaire dans E, noté F^C est un ouvert de (E, d).

<u>Proposition</u> 2.1.1 *Soit (E, d) un espace métrique.*

- *Toute boule ouverte est un ouvert ;*
- *Toute boule fermée est un fermé ;*
- *Tout sous-ensemble ouvert est une réunion (finie ou infinie) de boules ouvertes ;*
- *E et $\emptyset$ sont des ouverts et des fermés ;*
- *Toute réunion d'ouverts et toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert ;*
- *Toute intersection de fermés et toute réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé ;*

– *Pour tout* $(x, y) \in E \times E$ *tel que* $x \neq y$*, il existe* $r > 0$ *et* $r' > 0$ *tels que* $B(x, r) \cap B(y, r') = \emptyset$*.*

Définition 2.1.3 Soit V, un sous-ensemble d'un espace métrique (E, d).
- Un élément x_0 de E est adhérent à V si tout voisinage de x_0 rencontre V. L'adhérence de V, notée a$dh\,V$, est l'ensemble des points adhérents à V.
- La fermeture de V, notée $\overline{V}$, est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé de E qui contient V.
- L'intérieur de V, noté $\operatorname{int} V$ est le plus grand (au sens de l'inclusion) des ouverts inclus dans V.
- La frontière de V, noté F$r\,V$ est l'ensemble a$dh\,V \setminus \operatorname{int} V$.

Proposition 2.1.2 *Soit* V*, un sous-ensemble de* E*.*
- $\overline{V}$*, la fermeture de* V *est l'intersection de tous les sous-ensembles fermés de* E *qui contiennent* V *;*
- $\mathrm{a}dh\,V = \overline{V}$*.*
- *L'intérieur de* V *est la réunion de tous les ouverts inclus dans* V*.*
- *La frontière de* V *est un fermé et* $\mathrm{Fr}\,V = \mathrm{a}dh\,V \cap \mathrm{a}dh\,(V^c)$*.*

Remarque : la boule fermée de centre x_0 et de rayon r n'est pas toujours la fermeture de la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

2.2 Notions de topologie générale

Définition 2.2.1
- Soit E un ensemble. Un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de l'ensemble des parties de E est une topologie sur E s'il contient l'ensemble vide et E et s'il est stable par réunion quelconque et par intersection finie. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts pour la topologie $\mathcal{T}$.
- Une topologie sur E est séparée si pour tout $x, y \in E$, si $x \neq y$ alors $\exists U, V \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Remarques :
- Si (E, d) est un espace métrique, l'ensemble des ouverts de E pour la distance d est une topologie séparée sur E ;
- Un ensemble E muni d'une topologie $\mathcal{T}$ est dit métrisable s'il existe une distance d sur E qui induit la topologie $\mathcal{T}$;
- Si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble des parties de E, la topologie engendrée par $\mathcal{F}$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) topologie qui contient $\mathcal{F}$. Il est facile de vérifier que la topologie engendrée par les boules ouvertes dans un espace métrique correspond à la topologie définie par cette distance. On peut montrer que la topologie engendrée par $\mathcal{F}$ est formée des réunions quelconques des intersections finies des éléments de $\mathcal{F}$, de l'ensemble vide et de E ;
- Deux distances sur le même ensemble E sont dites topologiquement équivalentes si elles définissent la même topologie sur E : elles définissent les mêmes ensembles ouverts ;
- Soit $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$, n espaces métriques et soit $E = E_1 \times \ldots \times E_n$. Par définition, la topologie produit sur E est la topologie engendrée par les parties de E qui sont des produits d'ouverts. Cette topologie est métrisable et les distances topologiquement équivalentes définies ci-dessous induisent la topologie produit sur E :

$$\begin{aligned} d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &= \max\{d_i(x_i, y_i) \mid i = 1, \ldots, n\}; \\ d'((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i); \end{aligned}$$

$$d''((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i(x_i,y_i))^2}. \qquad (2.1)$$

– Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E. La restriction de d à $A\times A$ est une distance sur A et définit la topologie induite de (E,d) sur A.

2.3 Continuité

Soit (E,d) et (F,δ), deux espaces métriques et soit f, une application de E dans F. L'une des richesses des espaces métriques est de pouvoir décrire de manière beaucoup plus précise la manière dont une application est continue.

Définition 2.3.1
– Soit x_0, un élément de E. f est continue en x_0 si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\rho>0,\ \text{telle que } d(x,x_0)\le\rho\Longrightarrow\delta(f(x),f(x_0))\le\varepsilon;$$

– f est continue sur E si f est continue en tout point de E ;
– L'application f est uniformément continue si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\rho>0,\ \text{telle que } d(x,x')\le\rho\Longrightarrow\delta(f(x),f(x'))\le\varepsilon;$$

– L'application f est localement hölderienne d'exposant $r\in]0,1]$, s'il existe deux constantes m et k telles que :

$$\forall(x,x')\in E^2,\ d(x,x')\le m\Longrightarrow\delta(f(x),f(x'))\le k\,[d(x,x')]^r\,;$$

– Lorsque $r=1$, on dit que l'application f est localement k-lipschitzienne ;
– Lorsque $r=1$ et que la condition $d(x,x')\le m$ peut être omise, on dit que l'application f est k-lipschitzienne ;
– f est un homéomorphisme de E dans F si f est bijective et continue sur E, et f^{-1} est continue.

Proposition 2.3.1 *Les trois assertions sont équivalentes :*
– *f est continue sur E ;*
– *pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E ;*
– *pour tout fermé G de F, $f^{-1}(G)$ est un fermé de E.*

Proposition 2.3.2 *Soient (E,d), (F,d') et (G,d'') des espaces métriques, et $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux applications continues respectivement sur E et F.*

Alors, l'application $g\circ f:E\to G$ est continue sur E.

Exemples : Soit (E,d), un espace métrique.
– Pour tout $x_0\in E$, l'application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe $d(x,x_0)$ est continue.
– L'application d de $E\times E$ dans $\mathbb{R}_+$ est continue.
– Soit $(E_1,d_1),\ldots,(E_n,d_n)$, n espaces métriques et soit $E=E_1\times\ldots\times E_n$ et F un espace métrique :
  * Pour tout $i=1,\ldots,n$, la projection sur E_i définie par $p_i:E\to E_i$, $p_i(x_1,\ldots,x_n)=x_i$ est continue ;
  * Soit une application $f:E\to F$ et $a=(a_i)$ un élément de E. Pour $i\in\{1,\ldots,n\}$, soit l'application $f_i:x_i\in E_i\mapsto f(x)$ où $x=(x_j)_{j=1,\ldots,n}$ et $x_j=a_j$ si $j\neq i$. Le théorème des

fonctions composées prouve que si f est continue au point a, alors f_i est continue en a_i. Une fonction de plusieurs variables continue par rapport à l'ensemble de ses variables est continue séparément par rapport à chacune de ses variables. La réciproque est fausse : par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

n'est pas continue en $(0,0)$, bien qu'elle soit séparément continue.

Lorsque l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$, on peut séparer la continuité en semi-continuité inférieure et semi-continuité supérieure. Les fonctions semi-continues jouent un rôle important dans les problèmes de minimisation de fonctionnelles. Pour des raisons pratiques dans les utilisations ultérieures, on va admettre que les fonctions considérées peuvent prendre la valeur $+\infty$ dans le cas de la semi-continuité inférieure et $-\infty$ dans le cas de la semi-continuité supérieure.

<u>Définition</u> 2.3.2 Une application f de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty(\text{resp. } -\infty)\}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) (resp. semi-continue supérieurement (s.c.s.)) si pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) > (\text{resp. } <) a\}$ est ouvert.

On remarque que f est s.c.i. si et seulement si $-f$ est s.c.s. Donc, on transpose facilement tous les résultats obtenus pour les applications s.c.i. aux applications s.c.s. Il est aussi évident que f est continue si et seulement si elle est s.c.i. et s.c.s.

<u>Proposition</u> 2.3.3 *Soit f, une application de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
- *f est semi-continue inférieurement;*
- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) \leq a\}$ est fermé;*
- *L'épigraphe de f, $epi(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \mid t \geq f(x)\}$, est fermé.*

<u>Exemple</u> : Soit A un sous ensemble d'un espace métrique E et soit χ_A la fonction caractéristique de A ($\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon). On vérifie en utilisant la proposition (2.3.3) que χ_A est s.c.i. si, et seulement si, A est un ouvert et qu'elle est s.c.s. si et seulement si, A est fermé.

<u>Proposition</u> 2.3.4 *Soit f et g deux applications s.c.i. de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Alors, $f+g$ et λf sont s.c.i. Si f et g sont à valeurs positives, fg est s.c.i.*

<u>Proposition</u> 2.3.5 *Soit $(f_i)_{i \in I}$, une famille d'applications s.c.i. de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors $\sup_{i\in I} f_i$ est toujours s.c.i. et $\inf_{i \in I} f_i$ est s.c.i. si I est finie.*

2.4 Rappel sur les suites

Soit (E,d), un espace métrique.

<u>Définition</u> 2.4.1
- Une suite de E est une application de $\mathbb{N}$ dans E.
- Une suite (u_n) de E converge vers un élément $\overline{x}$ de E si $\forall r > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \in B(\overline{x}, r)$.
- Un élément $\overline{x}$ de E est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si,

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad \overline{x} \in adh \{u_n \mid n \geq n_0\}.$$

– Une suite (v_n) de E est une sous-suite de (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.
– Une suite (u_n) de E est de Cauchy si pour tout $r > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, p \geq n_0$, $d(u_n, u_p) < r$.

<u>Proposition</u> 2.4.1
– *Une suite a au plus une limite ;*
– *Toute suite convergente est de Cauchy ;*
– *Toute suite de Cauchy est bornée ;*
– *L'ensemble des valeurs d'adhérence (éventuellement vide) d'une suite est un fermé de E ;*
– *Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence ;*
– *Si une suite de Cauchy a une valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur d'adhérence ;*
– *Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la limite de la suite ;*
– *$\overline{x}$ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement si il existe une sous-suite (v_n) de (u_n) qui converge vers $\overline{x}$;*
– *Soit F, un sous-ensemble de E. Un élément x_0 appartient à l'adhérence de F si et seulement si il existe une suite de F qui converge vers x_0 ;*
– *Soit F, un sous-ensemble de E. F est un sous-ensemble fermé de E si et seulement si la limite de toute suite de F qui converge est un élément de F ;*
– *Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques soit f, une application de E dans F et soit x_0, un élément de E. f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (u_n) de E qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))$ de F converge vers $f(x_0)$;*
– *Soit $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$, n espaces métriques et soit $E = E_1 \times \ldots \times E_n$. Une suite (u_n) de E est convergente si et seulement si les n suites $(u_n^i = p_i(u_n))$ sont convergentes.*

2.5 Espaces compacts

Soit (E, d), un espace métrique et A, un sous-ensemble de E.

<u>Définition</u> 2.5.1 On dit que A est un sous-ensemble compact de E si pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E tel que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. E est compact s'il est un sous-ensemble compact de lui-même.

<u>Définition</u> 2.5.2 On dit que (A, d) pré-compact si pour tout $r > 0$, il existe un sous-ensemble fini de A, $\{x_1, \ldots, x_p\}$, tel que $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, r)$.

<u>Proposition</u> 2.5.1 *E est un compact si et seulement si pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de E tel que $\cap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $\cap_{i \in J} F_i = \emptyset$.*

<u>Proposition</u> 2.5.2 *E est un compact si et seulement si toute suite de E a au moins une valeur d'adhérence.*

<u>Preuve</u> Si E est un compact et si (u_n) est une suite de E, soit $F_n = \mathrm{a}dh\{u_k \mid k \geq n\}$. La famille $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de fermés de E et il est clair que l'intersection de toute sous-famille finie de (F_n) est non vide. Donc $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est non vide d'après la proposition précédente et cette intersection est l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

Réciproquement, nous montrons tout d'abord que E est pré-compact, c'est-à-dire que pour tout $r > 0$, il existe un sous-ensemble fini de E, $\{x_1, \ldots, x_p\}$, tel que $E \subset \cup_{i=1}^{p} B(x_i, r)$. Raisonnons par l'absurde. Si la propriété ci-dessus est fausse pour $r > 0$, nous construisons une suite (u_n) de

E de la façon suivante : u_0 est un élément quelconque de E. Comme $B(u_0, r)$ ne recouvre pas E, on choisit $u_1 \notin B(u_0, r)$ et ainsi de suite. Si les p premiers termes de la suite sont choisis, comme $\cup_{i=1}^{p} B(u_i, r)$ ne recouvre pas E, on choisit $u_{p+1} \notin \cup_{i=1}^{p} B(u_i, r)$. On remarque que la suite (u_n) vérifie la propriété suivante : pour tout n, p tels que $n \neq p$, $d(u_n, u_p) \geq r$. Donc cette suite ne peut avoir de valeur d'adhérence car aucune sous-suite ne peut satisfaire le critère de Cauchy. Ceci contredit l'hypothèse que toute suite de E a au moins une valeur d'adhérence. Donc nous avons montré que E est pré-compact.

Soit$(U_i)_{i\in I}$, une famille d'ouverts qui recouvre E. Nous montrons maintenant qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $i \in I$, tel que $B(x, r) \subset U_i$. Raisonnons de nouveau par l'absurde. Si cette assertion est fausse, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, il existe $x_n \in E$, tel que pour tout $i \in I$, $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est pas incluse dans U_i. Par hypothèse, il existe $\overline{x}$, une valeur d'adhérence de la suite (x_n). Il existe $i_0 \in I$ tel que $\overline{x} \in U_{i_0}$. Donc il existe $\rho > 0$ tel que $B(\overline{x}, \rho) \subset U_{i_0}$. Vu que $\overline{x}$ est une valeur d'adhérence de la suite (x_n), il existe n_0 tel que $d(\overline{x}, x_{n_0}) < \frac{1}{2}\rho$ et $\frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\rho$. Donc $B(x_{n_0}, \frac{1}{n_0}) \subset B(\overline{x}, \rho) \subset U_{i_0}$. Ceci contredit le fait que pour tout $i \in I$, $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est pas incluse dans U_i. Donc notre assertion est montrée.

Nous finissons maintenant la démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$, une famille d'ouverts qui recouvre E. D'après l'étape précédente, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $i \in I$, tel que $B(x, r) \subset U_i$. Vu que E est pré-compact, il existe un sous-ensemble fini de E, $\{x_1, \ldots, x_p\}$, tel que $E \subset \cup_{k=1}^{p} B(x_k, r)$. Pour tout $k = \{1, \ldots, p\}$, il existe $i_k \in I$, tel que $B(x_k, r) \subset U_{i_k}$. Donc il est évident que $E \subset \cup_{k=1}^{p} U_{i_k}$, ce qui montre qu'une sous-famille finie de la famille $(U_i)_{i\in I}$ recouvre E. □

<u>Remarque</u> : On remarque que si A est un sous-ensemble d'un espace métrique, il est compact si et seulement si toute suite de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A.

<u>Proposition</u> 2.5.3 *Soit A, un sous-ensemble compact de E.*
- *Pour tout fermé F de E, $A \cap F$ est un sous-ensemble compact de E ;*
- *A est fermé et borné.*

<u>Proposition</u> 2.5.4 *Soit $(E_1, d_1), \ldots, (E_p, d_p)$, p espaces métriques compacts. Alors $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ muni d'une des distances qui induisent la topologie produit, est un espace métrique compact.*

<u>Preuve</u> Il suffit de montrer que toute suite de E admet une sous-suite convergente. Soit $(u_n = (u_n^1, \ldots, u_n^p))$, une suite de E. Vu que E_1 est compact, une sous-suite de la suite (u_n^1) est convergente. Donc il existe une application φ_1 strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(u^1_{\varphi_1(n)})$ est convergente. De même, la suite $(u^2_{\varphi_1(n)})$ admet une sous-suite convergente car E_2 est compact, donc il existe une application φ_2 strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(u^2_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})$ est convergente. En continuant ainsi jusqu'à l'étape p, on en déduit l'existence de p applications $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k = 1, \ldots, p$, la suite de $(u^k_{\varphi_1\circ\ldots\varphi_k(n)})$ de E_k est convergente. On en déduit donc que la suite $(u_{\varphi_1\circ\ldots\varphi_p(n)})$ de E est convergente ce qui montre que la sous-suite (u_n) a une sous-suite convergente. □

<u>Proposition</u> 2.5.5 *Soit (E, d) et (F, δ), deux espaces métriques et f, une application continue de E dans F.*

(ı) L'image par f d'un sous-ensemble compact de E est un sous-ensemble compact de F.

(ıı) Si E est compact et si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$, $\exists x_1, x_2 \in E$ tels que $\forall x \in E$, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

(ııı) Si E est compact, l'application f est uniformément continue, c'est-à-dire que $\forall r > 0$, $\exists \rho > 0$ tel que $\forall (x, y) \in E \times E$ tel que $d(x, y) < \rho$, alors $\delta(f(x), f(y)) < r$.

(iv) *Si E est compact et si f est continue et bijective, alors f^{-1} est continue. Autrement dit, f est un homéomorphisme.*

(v) *Si E est compact et si f est une application de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty(\text{resp. } -\infty)\}$ s.c.i. (resp. s.c.s.), $\exists x_0 \in E$ tel que $\forall x \in E$, $f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $\leq f(x_0)$).*

<u>Preuve</u> (i) Soit A, un sous-ensemble compact de E et soit $(V_i)_{i\in I}$, une famille d'ouverts de F telle que $f(A) \subset \cup_{i\in I} V_i$. Comme f est continue, la famille $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E et il est évident que $A \subset \cup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$. Comme A est un sous-ensemble compact de E, il existe un sous-ensemble J, fini, de I tel que $A \subset \cup_{i\in J} f^{-1}(V_i)$. Donc, on en déduit que $f(A) \subset \cup_{i\in J} V_i$ ce qui nous montre que $f(A)$ est un sous-ensemble compact de F.

(ii) Ceci est une conséquence immédiate du fait que l'image de E par f est un compact de $\mathbb{R}$, donc un fermé borné. La borne inférieure et supérieure de $f(E)$ sont donc finies et sont des éléments de $f(E)$. Il suffit de prendre un antécédent de la borne inférieure pour x_1 et de la borne supérieure pour x_2.

(iii) Soit $r > 0$. Comme f est continue sur E, pour tout $x \in E$, il existe $\rho_x > 0$, tel que pour tout $x' \in B(x, \rho_x)$, $f(x')$ appartient à $B(f(x), \frac{r}{2})$. La famille $(B(x, \frac{1}{2}\rho_x))_{x\in E}$ est un recouvrement ouvert de E qui est compact, donc il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_p\}$ de E tel que $E \subset \cup_{i=1}^{p} B(x_i, \frac{1}{2}\rho_{x_i})$. Soit $\rho = \frac{1}{2}\min\{\rho_{x_i} \mid i = 1, \ldots, p\}$ et soit x, x', deux éléments de E tels que $d(x, x') < \rho$. Il existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que x appartient à $B(x_i, \frac{1}{2}\rho_{x_i})$. Vu la définition de ρ, x' appartient à $B(x_i, \rho_{x_i})$. Donc :

$$\delta(f(x), f(x')) \leq \delta(f(x), f(x_i)) + \delta(f(x_i), f(x')) \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Ceci montre que f est uniformément continue sur E.

(iv) Ceci est une conséquence immédiate de (i). En effet f^{-1} est continue car tout fermé de E est compact. Donc, pour tout fermé K de E, $(f^{-1})^{-1}(K) = f(K)$ et $f(K)$ est un compact de F donc un fermé de F. L'image réciproque par f^{-1} de tout fermé de E est un fermé de F, donc f^{-1} est continue.

(v) Soit $\alpha = \inf\{f(x) \mid x \in E\}$. Si $\alpha = +\infty$, alors f est identiquement égale à $+\infty$ et le résultat est évident. Si $\alpha = -\infty$, on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $G_n = \{x \in E \mid f(x) \leq -n\}$. Comme f est s.c.i., les ensembles G_n sont fermés et ils sont emboîtés. De plus, ils sont non vides par définition de α. Donc, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$. Il est clair que tout point $x_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} G_n$, $f(x_0) \leq -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui contredit $f(x_0) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si α est fini, on considère pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ensemble $F_n = \left\{x \in E \mid f(x) \leq \alpha + \frac{1}{n}\right\}$. Comme f est s.c.i., les ensembles F_n sont fermés et ils sont emboîtés. De plus, ils sont non vides par définition de α. Donc, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Il est clair que tout point x_0 de cet ensemble est un minimum de f sur E. □

<u>Définition</u> 2.5.3 Un sous-ensemble A d'un espace métrique (E, d) est relativement compact si $adh\, A$ est compact.

<u>Proposition</u> 2.5.6 *Un sous-ensemble A d'un espace métrique (E, d) est relativement compact si et seulement si toute suite de A a au moins une valeur d'adhérence (qui n'appartient pas toujours à A).*

La preuve est laissée en exercice.

<u>Définition</u> 2.5.4 (Partition continue de l'unité) Soit X un espace topologique et soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de X. On appelle partition continue de l'unité faiblement subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$, une famille d'applications continues $\alpha_i : X \to \mathbb{R}_+ (i \in I)$ telles que :

– $\forall x \in X$, $\sum_{i \in I} \alpha_i(x) = 1$;
– $\forall i \in I$, $supp\,\alpha_i \subset U_i$ où $supp\,\alpha_i = \{x \in X \mid \alpha_i(x) > 0\}$.

Il est à noter que la notion de support introduite dans la définition est plus faible que la notion classique de support pour laquelle le support de α_i est l'ensemble $adh\,\{x \in X \mid \alpha_i(x) > 0\}$, c'est-à-dire, l'adhérence du précédent.

<u>Lemme</u> 2.5.1 *Soit X un espace métrique compact. Pour tout recouvrement ouvert fini de X, il existe une partition continue de l'unité faiblement subordonnée à ce recouvrement.*

<u>Preuve</u> : Soit $(U_i)_{i \in I}$ le recouvrement ouvert fini. On note U_i^c, le complémentaire de U_i et on pose :

$$\alpha_i(x) = \frac{d(x, U_i^c)}{\sum_{j \in I} d(x, U_j^c)}, \quad \forall i \in I, \quad \forall x \in X.$$

Observons tout d'abord que la somme au dénominateur ne s'annule pas. En effet, dans le cas contraire, les U_i^c étant fermés, il existerait un $x \in \cap_j U_j^c$ c'est-à-dire $x \notin \cup_j U_j$, ce qui contredirait le fait que $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X. Chaque fonction α_i ainsi construite est continue et vérifie $supp\,\alpha_i \subset U_i$ pour chaque $i \in I$. Enfin, nous avons bien $\sum_{i \in I} \alpha_i(x) = 1$, $\forall x \in X$. □

2.6 Espace localement compact

<u>Définition</u> 2.6.1 Un espace métrique (E, d) est localement compact si tout point admet un voisinage compact.

<u>Proposition</u> 2.6.1 *Un espace métrique (E, d) est localement compact si et seulement si, $\forall x \in E$, $\exists r > 0$, tel que $\overline{B}(x, r)$ est compacte.*

<u>Preuve</u> Si, pour tout $x \in E$, il existe $r > 0$, tel que $\overline{B}(x, r)$ est compacte, il est évident que (E, d) est localement compact. Réciproquement si (E, d) est localement compact, pour tout $x \in E$, il existe V, un voisinage compact de E. Donc, il existe $r > 0$, tel que $B(x, 2r) \subset V$. Donc $\overline{B}(x, r) \subset B(x, 2r) \subset V$ est un fermé d'un compact donc c'est un compact. □

<u>Définition</u> 2.6.2 Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques localement compacts. Une application f de E dans F est propre si elle est continue et si pour tout sous-ensemble compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

<u>Remarque</u> : Un type particulier d'espace métrique localement compact sont les espaces métriques dont toutes les boules fermés sont compactes. Dans ce type d'espaces, tous les sous-ensembles fermés et bornés sont compacts. Si E et F sont de ce type là, une application f de E dans F est propre si et seulement si elle est continue et si l'antécédent de tout sous-ensemble borné de F est borné dans E.

<u>Proposition</u> 2.6.2 *Soit (E, d) et (F, δ), deux espaces métriques localement compacts, et soit f, une application propre de E dans F. L'image par f d'un sous-ensemble fermé de E est un sous-ensemble fermé de F.*

<u>Preuve</u> Soit A, un sous-ensemble fermé de E et soit $C = f(A)$. Soit $y \in adh\,C$. Il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(y, r)$ est un compact de F et $C \cap \overline{B}(y, r) \neq \emptyset$. De plus y appartient à l'adhérence de

$C \cap \overline{B}(y,r)$. Par ailleurs, comme f est propre, $f^{-1}(\overline{B}(y,r))$ est un compact de E et $A \cap f^{-1}(\overline{B}(y,r))$ est un compact de E car A est fermé. Pour tout $x \in A \cap f^{-1}(\overline{B}(y,r))$, $f(x)$ appartient à $C \cap \overline{B}(y,r)$. Réciproquement, pour tout $z \in C \cap \overline{B}(y,r)$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = z$. Donc x appartient à $f^{-1}(\overline{B}(y,r))$ ce qui implique que x appartient à $A \cap f^{-1}(\overline{B}(y,r))$. Nous déduisons de ce qui précède que $C \cap \overline{B}(y,r) = f(A \cap f^{-1}(\overline{B}(y,r)))$. Comme f est continue, ceci implique que $C \cap \overline{B}(y,r)$ est un compact, donc un fermé de F. Donc y appartient à $adh\,(C \cap \overline{B}(y,r)) = C \cap \overline{B}(y,r)$. Donc y appartient à C ce qui montre que C est fermé. □

<u>Proposition</u> 2.6.3 *Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques localement compacts et soit f, une application bijective propre de E dans F. Alors f est un homéomorphisme de E dans F.*

<u>Preuve</u> La démonstration se fait de manière identique à celle de la proposition (2.5.5-(iv)) en utilisant la proposition précédente. □

2.7 Espaces complets

<u>Définition</u> 2.7.1 Un espace métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy de E converge.

<u>Exemples</u> :
- $\mathbb{R}$ est complet. Le caractère complet de $\mathbb{R}$ est obtenu par la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$;
- Si X est un ensemble non vide et (E,d), un espace métrique complet, alors $\mathbb{B}(X,E)$, l'ensemble des applications bornées de X dans E est un espace métrique complet pour la distance de la convergence uniforme d_∞ ;
- Tout espace métrique compact est complet.
- Il faut faire attention au fait que la notion d'espace complet n'est pas une notion topologique. Il existe des exemples simples d'espaces qui sont complets pour une distance et qui ne le sont plus pour des distances topologiquement équivalentes.

<u>Proposition</u> 2.7.1 *Soit $(E_1,d_1),\dots,(E_p,d_p)$, p espaces métriques. Alors $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ muni de la distance $d((x_1,\dots,x_p),(y_1,\dots,y_p)) = \max\{d_i(x_i,y_i) \mid i = 1,\dots,p\}$, est un espace métrique complet si et seulement si tous les espaces $(E_i,d_i)_{i=1,\dots,p}$ le sont.*

Il suffit de remarquer pour la démonstration de cette propriété qu'une suite de E est de Cauchy si et seulement si chacune des suites composantes l'est.

<u>Proposition</u> 2.7.2
- *Tout sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet est un espace métrique complet pour la distance induite.*
- *Tout sous-ensemble complet d'un espace métrique est fermé.*

La démonstration est laissée en exercice. Soit X, un espace métrique et E, un espace métrique complet. L'ensemble $\mathcal{C}_b(X,E)$ des applications continues bornées de X dans E est un sous-ensemble de $\mathbb{B}(X,E)$. Pour montrer que $\mathcal{C}_b(X,E)$ est un espace métrique complet, il suffit de montrer que c'est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{B}(X,E)$. Si X est de plus compact, toutes les applications continues de X dans E sont alors bornées et donc $\mathcal{C}(X,E)$, l'ensemble des applications continues de X dans E, est un espace métrique complet pour la distance de la convergence uniforme d_∞.

<u>Proposition</u> 2.7.3 *Soit (E,d), un espace métrique. E est compact si et seulement si E est complet et pré-compact.*

<u>Preuve</u> Si E est compact, il est évident qu'il est complet et pré-compact. Montrons maintenant que si E est pré-compact et complet, toute suite (x_n) a au moins une valeur d'adhérence.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe p_k éléments de E, $x_1^k, \ldots, x_{p_k}^k$, tels que $E \subset \cup_{i=1}^{p_k} B(x_i^k, \frac{1}{2^k})$. Il existe donc $i_0 \in \{1, \ldots, p_0\}$ tel que x_n appartient à $B(x_{i_0}^0, 1)$ pour une infinité d'éléments n de $\mathbb{N}$. Donc il existe une application φ_0 strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, tels que pour tout n, $x_{\varphi_0(n)}$ appartient à $B(x_{i_0}^0, 1)$.

En recommençant le même raisonnement avec la suite $(x_{\varphi_0(n)})$, on montre qu'il existe $i_1 \in \{1, \ldots, p_1\}$ et une application φ_1 strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, tels que pour tout n, $x_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)}$ appartient à $B(x_{i_1}^1, \frac{1}{2})$. Par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $i_k \in \{1, \ldots, p_k\}$ et une application φ_k strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,tel que pour tout n, $x_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}$ appartient à $B(x_{i_k}^k, \frac{1}{2^k})$. Soit ψ, l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\psi(n) = \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$. On montre facilement que ψ est strictement croissante. Montrons maintenant que la suite $(x_{\psi(n)})$ est de cauchy. Soit m et n deux entiers tels que $m > n$. $x_{\psi(m)} = x_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1} \circ \ldots \circ \varphi_m(m))}$. Donc, par construction, $x_{\psi(m)}$ appartient à $B(x_{i_n}^n, \frac{1}{2^n})$. De même, $x_{\psi(n)}$ appartient à $B(x_{i_n}^n, \frac{1}{2^n})$. Donc, $d(x_{\psi(n)}, x_{\psi(m)}) \leq \frac{1}{2^n}$, ce qui montre que la suite $(x_{\psi(n)})$ est de Cauchy. Par hypothèse, E est complet donc cette suite $(x_{\psi(n)})$, qui est une suite extraite de la suite (x_n) converge et donc la suite (x_n) a une valeur d'adhérence. □

Nous introduisons maintenant le théorème de point fixe de Banach. Ce théorème est essentiel dans la démonstration du théorème des fonctions implicites ou dans le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence de solutions à une équation différentielle.

<u>Théorème</u> 2.7.1 *(E, d) est un espace métrique complet et $f : E \to E$ est une application contractante, i.e., telle que $\exists k \in]0, 1[$, $\forall (x, y) \in E \times E$,*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors, il existe un unique élément de E, $\overline{x}$, tel que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

<u>Preuve</u> Soit x_0, un élément de E. Nous définissons par récurrence une suite (x_n) de E en posant $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrons que cette suite est de Cauchy.

Pour tout $n \geq 1$, $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1})$. Donc,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$$

Soit p et m, deux entiers tels que $m > p$.

$$d(x_m, x_p) \leq \sum_{i=p}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=p}^{m-1} k^i d(x_1, x_0) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Ceci implique que la suite (x_n) est de Cauchy et donc elle converge vers un élément $\overline{x}$ de E. De la continuité de l'application f, nous déduisons que $f(\overline{x})$ est la limite de la suite $(f(x_n))$. Or $f(x_n) = x_{n+1}$ et donc la suite $(f(x_n))$ a la même limite que la suite (x_n). Donc $\overline{x} = f(\overline{x})$.

Terminons la démonstration en montrant que le point fixe est unique. Si x et y vérifient $f(x) = x$ et $f(y) = y$, alors $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Donc $d(x, y) = 0$, car $k < 1$. Ceci implique que $x = y$. □

<u>Proposition</u> 2.7.4 *Soit (E, d), un espace métrique et (F, δ), un espace métrique complet. Soit A, un sous-ensemble de E tel que $\operatorname{adh} A = E$. Soit f, une application uniformément continue de A dans F. Alors, il existe une unique application $\hat{f}$ de E dans F qui soit continue et dont la restriction à A soit égale à f. De plus, $\hat{f}$ est uniformément continue.*

<u>Preuve</u> Soit $x \in E$. Montrons tout d'abord que pour toute suite (x_n) de A qui converge vers x, la suite $(f(x_n))$ est convergente dans F et que sa limite ne dépend pas de la suite considérée. On remarque qu'il existe toujours une suite d'éléments de A qui converge vers x car $adh\, A = E$ et si x appartient à A, le résultat est évident et la limite de la suite est $f(x)$ car f est continue sur A.

Montrons que la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy car, comme F est complet, ceci implique qu'elle est convergente. Soit $r > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout y, z de A tel que $d(y,z) < \rho$, $\delta(f(y), f(z)) < r$. Vu que la suite (x_n) est convergente, elle est de Cauchy et donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout p, n plus grand que n_0, $d(x_p, x_n) < \rho$. Donc, $\delta(f(x_p), f(x_n)) < r$ ce qui montre que la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy.

Soit maintenant deux suites (x_n) et (x'_n) de A qui convergent vers x. Montrons que $(f(x_n))$ et $(f(x'_n))$ ont la même limite. En utilisant les mêmes résultats que dans le paragraphe précédent et le fait que les suites (x_n) et (x'_n) ont la même limite, on en déduit qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_1$, $d(x_n, x'_n) < \rho$. Donc, pour tout $n \geq n_1$, $\delta(f(x_n), f(x'_n)) < r$. On en déduit que la distance entre les limites des suites $(f(x_n))$ et $(f(x'_n))$ est donc inférieure ou égale à r et comme ceci est vrai pour tout $r > 0$, les limites sont égales.

A partir des résultats obtenus ci-dessus, on peut définir $\hat{f}$ sur E comme suit : pour tout x, $\hat{f}(x)$ est la limite d'une suite $(f(x_n))$ où (x_n) est une suite de A qui converge vers x. D'après ce qui précède, la restriction de $\hat{f}$ à A est égale à f et il est évident que si l'on veut obtenir un prolongement continue de f, $\hat{f}$ est le seul candidat possible. Il nous reste à démontrer que $\hat{f}$ est uniformément continue.

Soit $r > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout y, z de A tel que $d(y,z) < \rho$, $\delta(f(y), f(z)) < r$. Soit x et x', deux points de E tel que $d(x,x') < \rho$. Soit (x_n) et (x'_n), deux suites de A qui convergent respectivement vers x et x'. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $d(x_n, x'_n) < \rho$. Donc $\delta(f(x_n), f(x'_n)) < r$. En passant à la limite, on en déduit que $\delta(\hat{f}(x), \hat{f}(x')) \leq r$. Donc $\hat{f}$ est uniformément continue, ce qui termine la démonstration de la proposition. □

<u>Proposition</u> 2.7.5 *Soit (E,d), un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $(\hat{E}, \hat{d})$ et une application injective i de E dans $\hat{E}$ vérifiant :*
- $\forall (x,y) \in E \times E$, $\hat{d}(i(x), i(y)) = d(x,y)$;
- $adh(i(E)) = \hat{E}$.

De plus, $(\hat{E}, \hat{d})$ est unique à une isométrie bijective près.

<u>Preuve</u> Soit $\mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues bornées de E dans $\mathbb{R}$. C'est un espace métrique complet car $\mathbb{R}$ est complet. Soit e, un élément de E. A tout $x \in E$, on associe l'application $i(x)$ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : pour tout $y \in E$, $i(x)(y) = d(x,y) - d(e,y)$.

Il est évident que $i(x)$ est une application continue et, vu que d est une distance, pour tout $y \in E$, $|i(x)(y)| \leq d(e,x)$. Ceci montre que $i(x)$ est bornée et donc i est une application de E dans $\mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$. Montrons maintenant que c'est une isométrie. Pour $(x,x') \in E \times E$, considérons

$d_\infty(i(x), i(x')) = \sup\{|i(x)(y) - i(x')(y)| \mid y \in E\} =$

$\sup\{|d(x,y) - d(x',y)| \mid y \in E\} \leq d(x,x')$.

De plus l'inégalité est une égalité lorsque $y = x$. Donc $d_\infty(i(x), i(x')) = d(x,x')$.

Il suffit maintenant de poser $\hat{E} = adh(i(E))$. En effet, $\hat{E}$ est un fermé d'un complet donc c'est un complet et ceci termine la partie existence de notre théorème. Passons maintenant à l'unicité.

Soit E_1 et E_2, deux espaces métriques complets, i_1 et i_2, deux applications injectives et isométriques de E dans respectivement E_1 et E_2 telles que $adh(i_1(E)) = E_1$ et $adh(i_2(E)) = E_2$. Montrons qu'il existe un isométrie bijective entre E_1 et E_2. Soit θ, l'application de $i_1(E)$ dans E_2 définie par $\theta = i_2 \circ (i_1)^{-1}$. θ est uniformément continue car c'est une isométrie. Donc, d'après la proposition précédente, θ admet un prolongement uniformément continue $\hat{\theta}$ de $E_1 = adh(i_1(E))$ dans E_2. Il est facile de montrer que $\hat{\theta}$ est une isométrie. Il suffit de montrer maintenant qu'elle est surjective. Soit $y \in E_2$. Comme $adh(i_2(E)) = E_2$, il existe une suite (y_n) de $i_2(E)$ qui converge vers y. La suite $(x_n = (i_2)^{-1}(y_n))$ est une suite de Cauchy de E. Donc, vu que i_1 est une isométrie, la suite $(z_n = i_1(x_n))$ est une suite de Cauchy de E_1 qui converge vers un élément z de E_1 car cet espace est complet. De plus,

$$\hat{\theta}(z) = \lim_{\infty} \hat{\theta}(z_n) = \lim_{\infty} \theta(z_n) = \lim_{\infty} y_n = y$$

Donc, ceci montre que $\hat{\theta}$ est surjective ce qui termine la démonstration de l'unicité de la complétion de l'espace E et aussi celle de la proposition. □

On peut aussi faire une autre démonstration en considérant l'ensemble des suites de Cauchy sur E. On considère sur cette ensemble la relation d'équivalence entre deux suites définie par : deux suites sont équivalentes si la distance entre leurs termes tend vers 0. En considérant les classes d'équivalence, on montre que c'est un espace métrique complet et on plonge E dedans en associant à chaque élément de E, la classe d'équivalence de la suite constante dont les termes sont tous égaux à cet élément. Cette preuve est utilisée dans la construction de $\mathbb{R}$ comme le “complété” de $\mathbb{Q}$.

Théorème 2.7.2 (Baire) *Soient E un espace métrique complet et (U_n) une suite d'ouverts de E tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E = \mathrm{adh}\, U_n$. Alors, $\mathrm{adh}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = E$.*

Preuve Soit x_0, un élément de E et $r > 0$. Nous allons montrer que $B(x_0, r)$ rencontre $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ce qui suffit pour prouver le résultat.

Vu que U_0 est dense dans E, $B(x_0, r) \cap U_0$ est un ouvert non vide de E et donc, il existe $x_1 \in E$ et $r_1 < \frac{r}{2}$ tels que

$$B(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r) \cap U_0.$$

De même, comme U_1 est dense dans E, il existe $x_2 \in E$ et $r_2 < \frac{r}{2^2}$ tels que

$$B(x_2, r_2) \subset \overline{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap U_1.$$

Par récurrence, on construit une suite (x_n) et une suite (r_n) qui vérifient pour tout n :

$$B(x_n, r_n) \subset \overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_{n-1}.$$

et $r_n < \frac{r}{2^n}$. Montrons que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit deux entiers p et m tels que $p > m$. Vu la construction de la suite (x_n), x_p appartient à $B(x_m, r_m)$. Donc, $d(x_p, x_m) < r_m < \frac{r}{2^m}$. Ceci montre que la suite est de Cauchy. Comme E est complet, la suite converge vers un élément $\overline{x}$ de E. Pour tout $n \geq 1$, x_n appartient à $\overline{B}(x_1, r_1)$. Donc $\overline{x}$ appartient à $\overline{B}(x_1, r_1)$ qui est, par construction, inclus dans $B(x_0, r)$. Pour tout $m \geq 1$ et pour tout $n > m$, x_n appartient à $\overline{B}(x_m, r_m)$. Donc $\overline{x}$ appartient à $\overline{B}(x_m, r_m)$ qui est, par construction, inclus dans U_{m-1}. En conclusion, $\overline{x}$ appartient à $B(x_0, r) \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n)$, ce qui montre que cette intersection est non vide. □

Théorème 2.7.3 *Soit E, un espace métrique localement compact et soit (U_n) une suite d'ouverts de E tels que $E = \mathrm{adh}\, U_n$, pour tout n. Alors , $\mathrm{adh}\,(\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n) = E$.*

Preuve Soit x_0, un élément de E et $r > 0$. Nous allons montrer que $B(x_0, r)$ rencontre $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ce qui suffit pour montrer le résultat.

Comme E est localement compact, il existe $r'_0 > 0$, $r'_0 \leq r_0$, tel que $\overline{B}(x_0, r'_0)$ est compact et donc complet. On refait le même raisonnement que dans la démonstration précédente sur $\overline{B}(x_0, r'_0)$ et on obtient le résultat. □

<u>Corollaire</u> 2.7.1 *Soit E, un espace métrique complet (ou localement compact) et soit (F_n), une suite de fermés d'intérieur vide de E. Alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.*

<u>Preuve</u> On considère les ouverts U_n qui sont les complémentaires dans E des F_n et on applique le théorème de Baire en remarquant que les fermés (F_n) sont d'intérieur vide si et seulement si les ouverts (U_n) sont denses dans E. □

2.8 Espaces séparables

<u>Définition</u> 2.8.1 Un espace métrique (E, d) est séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable D de E tel que $adh\, D = E$.

<u>Remarque</u> Cette définition signifie que, dans un espace métrique séparable E, il existe une suite (x_n) d'éléments de E telle que

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \quad \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x, x_m) < \varepsilon.$$

<u>Proposition</u> 2.8.1
- *Soit $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ une famille de n espaces métriques séparable. Alors, l'espace produit $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ muni de la distance $d(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} d_j(x_j, y_j)$, est un espace séparable.*
- *Soit (E, d) un espace métrique séparable et A une partie de E. Alors, (A, d) est un espace séparable.*

La preuve de cette proposition est laissée en exercice.

<u>Théorème</u> 2.8.1 *Tout espace métrique compact E est séparable.*

<u>Preuve</u> Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un sous-ensemble fini A_n de E tel que

$$E \subset \bigcup_{a\in A_n} B\left(a, \frac{1}{n}\right)$$

car $E \subset \bigcup_{x\in E} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Il ne reste qu'à montrer que le sous-ensemble $D = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable et que $adh\, D = E$. □

<u>Proposition</u> 2.8.2 *Soit E l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$ muni de la distance $d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. L'espace métrique (E, d) n'est pas séparable.*

<u>Preuve</u> Soit A la partie de E définie par

$$A = \{\chi_P,\ P \in \mathcal{P}([0,1])\}$$

où $\mathcal{P}([0,1])$ désigne l'ensemble des parties de $[0,1]$ et χ_P est la fonction caractéristique de P qui vaut 1 sur P et 0 sinon. On remarque que A n'est pas dénombrable et que si $P \neq Q$, alors $d(\chi_P, \chi_Q) = 1$. Le lemme suivant permet alors de conclure le résultat de la proposition. □

<u>Lemme</u> 2.8.1 *Soit (E, d) un espace métrique contenant une partie dense D et une partie A vérifiant : il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\forall (x_1, x_2) \in A^2, \quad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow d(x_1, x_2) \geq \alpha.$$

Alors, $\operatorname{card} D \geq \operatorname{card} A$, en particulier si A est non dénombrable alors l'espace (E, d) n'est pas séparable.

<u>Preuve</u> Soit φ une application de A dans D qui vérifie, pour tout $a \in A$, $d(a, \varphi(a)) \leq \alpha/3$. Une telle application existe puisque D est dense et $\alpha > 0$. Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de A. On a alors

$$\begin{aligned} \alpha &\leq d(x_1, x_2) \\ &\leq d(x_1, \varphi(x_1)) + d(x_2, \varphi(x_2)) + d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \\ &\leq (2/3)\alpha + d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)). \end{aligned}$$

Ceci prouve que φ est injective, d'où la conclusion. □

2.9 Connexité

<u>Définition</u> 2.9.1
- Une partie A d'un espace métrique E est connexe par arcs, si, $\forall (a, b) \in A^2$, il existe un chemin d'origine a et d'extrémité b : il existe une application $f : [0, 1] \to E$ continue telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$ et $f([0, 1]) \subset A$.
- Un espace métrique (E, d) est connexe si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :
  - E n'est pas la réunion de deux ouverts non vides et disjoints ;
  - E n'est pas la réunion de deux fermés non vides et disjoints ;
  - L'ensemble vide et E sont les seuls sous ensembles de E qui sont à la fois ouverts et fermés.

  Une partie A de E est connexe, si lorsqu'elle est munie de la topologie induite, elle est connexe.

<u>Proposition</u> 2.9.1

1. *Un produit d'espaces métriques non vides, $E = \prod_{i \in I} E_i$, est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout $i \in I$;*
2. *Tout produit d'espace connexes par arcs est connexe par arcs ;*
3. *Soient E, F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue. Alors, l'image d'une partie connexe par arcs de E est une partie connexe par arcs de F ;*
4. *Soient E, F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue. Alors, l'image d'une partie connexe de E est une partie connexe de F ;*
5. *Soit A une partie connexe et B telle que $A \subset B \subset \mathrm{adh}\, A$. Alors, B est connexe. En particulier $\mathrm{adh}\, A$ est connexe ;*
6. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes dont l'intersection est non vide. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe ;*
7. *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties connexes d'un espace métrique E telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est connexe.*
8. *Tout ensemble convexe est connexe par arcs.*

<u>Proposition</u> 2.9.2 *Une partie non vide de $\mathbb{R}$ est connexe si, et seulement si, elle est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

<u>Preuve</u> Soit A une partie connexe non vide de $\mathbb{R}$. Montrons que si x, $y \in A$, alors, $[x, y] \subset A$. Supposons par l'absurde qu'il existe $z \in [x, y]$ tel que $z \notin A$. Dans ce cas $A = (A \cap] - \infty, z[) \cup (A \cap]z, +\infty[)$ est une partition de A en deux ouverts (pour la topologie induite sur A) non-vides et disjoints ce qui contredit que A est connexe. Ceci entraîne que A est un intervalle.

Puisque tout intervalle peut être décrit comme l'image de $\mathbb{R}$ par une application continue, il suffit pour la réciproque de démontrer que $\mathbb{R}$ est connexe. Supposons que $\mathbb{R} = O_1 \cup O_2$, union disjointes de deux parties à la fois ouvertes et fermés. Supposons par convention que $0 \in O_1$, nous allons démontrer que O_2 non vide est impossible. Supposons par exemple que 0_2 contient un élément positif, l'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid [0, x] \subset O_1\}$ est donc borné. Puisque cet ensemble est ouvert (car O_1 est ouvert), et qu'il contient 0, la borne supérieure α de cet ensemble est strictement positive. Puisque X est également fermé (car O_1 est fermé), α est dans X, donc dans O_1. Par ouverture de O_1 au point α, on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha + \varepsilon \in X$, ce qui contredit la définition de la borne supérieure.

□

<u>Corollaire</u> 2.9.1 *Un ensemble connexe par arcs est connexe.*

<u>Preuve</u> Soit X connexe par arcs et $a \in X$. On remarque tout d'abord que pour tout point $b0$ de X, le chemin de a vers b est connexe (image de l'intervalle $[0, 1]$ par une application continue). Puisque, l'union lorsque b varie dans X de ces chemins est manifestement égale à X, il suffit pour conclure d'utiliser l'alinéa 6 de la proposition 2.9.1. □

<u>Corollaire</u> 2.9.2 *Une partie non vide de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs si, et seulement si, elle est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

<u>Remarque</u> On pourra vérifier que l'ensemble A de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y = \sin(1/x)\big\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

est connexe mais n'est pas connexe par arcs. Elle est connexe d'après l'alinéa 5 de la proposition 2.9.1.

<u>Théorème</u> 2.9.1 *(théorème du passage de la frontière) Soient (E, d) un espace métrique, A et B deux parties de E telle que B est connexe et $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont non vides. Alors $B \cap \mathrm{Fr}\, A \neq \emptyset$.*

<u>Preuve</u> Si $B \cap \mathrm{Fr}\, A = \emptyset$, alors les deux ensembles $\mathrm{int}(A \cap B)$ et $\mathrm{int}(A^c \cap B)$ seraient deux ouverts de B non vides, disjoints et leur réunion serait B. Ceci est en contradiction avec la connexité de B. □

<u>Corollaire</u> 2.9.3 *Soit une partie A de E et $f\ : [0, 1] \to E$ un chemin telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \notin A$. Alors, il existe $c \in [0, 1]$ telle que $f(c) \in \mathrm{Fr}\, A$.*

2.10 Application à l'analyse fonctionnelle

2.10.1 Le théorème de Stone-Weierstrass

Soit (E, d), un espace métrique compact, et soit $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$. On munit cet espace de la distance δ définie par :

$$\delta(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in E\}. \tag{2.2}$$

L'objectif du théorème de Stone-Weierstrass est de donner des conditions suffisantes pour qu'une partie de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ soit dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$.

<u>Définition</u> 2.10.1 Un sous-ensemble A de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ est réticulé si pour tout $(f, g) \in A^2$, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont des éléments de A.

Lemme 2.10.1 *Soit un sous-ensemble réticulé A de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

($\imath$) *f appartient à* adh A *;*

($\imath\imath$) $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g_{x,y,\varepsilon} \in A$ *telle que* $|f(x) - g_{x,y,\varepsilon}(x)| < \varepsilon$ *et* $|f(y) - g_{x,y,\varepsilon}(y)| < \varepsilon$.

Preuve Montrons que ($\imath$) implique ($\imath\imath$). Si f appartient à a$dh\,A$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in A$ tel que $\delta(f,g) < \varepsilon$. Donc, en particulier, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ et $|f(y) - g(y)| < \varepsilon$ ce qui montre que la propriété ($\imath\imath$) est satisfaite.

Montrons maintenant que ($\imath\imath$) implique ($\imath$). Nous allons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in A \cap B(f,\varepsilon)$ ce qui implique $f \in$ a$dh\,A$.

Pour tout $(x,y) \in E^2$, on définit l'ensemble $U_{x,y}$ de la façon suivante :

$$U_{x,y} = \{z \in E \mid g_{x,y,\varepsilon}(z) < f(z) + \varepsilon\}$$

où $g_{x,y,\varepsilon}$ est la fonction donnée par la propriété ($\imath\imath$). On remarque que $U_{x,y}$ est un ouvert et y appartient à $U_{x,y}$. Donc, pour tout $x \in E$, la famille $(U_{x,y})_{y\in E}$ est un recouvrement ouvert de E. Comme E est compact, il existe un sous-ensemble fini $(y_i^x)_{i\in I^x}$ d'éléments de E tel que $E = \cup_{i\in I^x} U_{x,y_i^x}$.

Pour tout $x \in E$, on définit la fonction $g_x = \inf\{g_{x,y_i^x,\varepsilon} \mid i \in I^x\}$. Comme A est réticulée, g_x appartient à A. On vérifie aisément que pour tout $z \in E$, $g_x(z) < f(z) + \varepsilon$ et $f(x) - \varepsilon < g_x(x)$ car pour tout $i \in I^x$, $f(x) - \varepsilon < g_{x,y_i^x,\varepsilon}(x)$.

Pour tout $x \in E$, soit $V_x = \{z \in E \mid f(z) - \varepsilon < g_x(z)\}$. V_x est un ouvert et x appartient à V_x. Donc la famille $(V_x)_{x\in E}$ est un recouvrement ouvert de E. Comme E est compact, il existe un sous-ensemble fini K de E tel que $E = \cup_{\xi\in K} U_\xi$. Soit $g = \sup\{g_\xi \mid \xi \in K\}$. Comme A est réticulé, g appartient à A. On vérifie facilement que pour tout $z \in E$, $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$. Donc $\delta(f,g) < \varepsilon$ ce qui montre que $A \cap B(f,\varepsilon)$ est non vide. □

Remarque : Considérons le sous-ensemble A des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, formé des fonctions continues affines par morceaux . On vérifie facilement que A est réticulé et pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, et pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, il existe $g \in A$ telle que $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$. Donc f vérifie la propriété ($\imath\imath$) du lemme ci-dessus avec en plus une égalité à la place d'une inégalité. Dont f appartient à l'adhérence de A ce qui montre que A est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Définition 2.10.2 Un sous-ensemble A de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre si cet ensemble est un sous-espace vectoriel stable par la multiplication des fonctions.

Lemme 2.10.2 *Toute sous-algèbre fermée A de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ est réticulée.*

Preuve Soit f et g, deux éléments de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$. On remarque que $\inf(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ et $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$. Soit A, une sous-algèbre fermée A de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$. Vu que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$, pour montrer que A est réticulée,il suffit de montrer que pour tout $f \in A$, $|f|$ appartient à A.

Considérons d'abord la suite de polynômes définie de la façon suivante :

P_0 est le polynôme nul ;

$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t))$

Nous allons montrer que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément vers la fonction $\sqrt{t}$ sur $[0,1]$. On vérifie aisément par récurrence que pour tout $t \in [0,1]$, $P_n(t) \leq P_{n+1}(t)$ et $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$. On en déduit que pour tout $t \in [0,1]$, la suite $(P_n(t))$ converge et on montre facilement que sa limite est $\sqrt{t}$. D'après le théorème de convergence monotone de Dini, la suite converge uniformément sur $[0,1]$.

Montrons maintenant que si $f \in A$, alors $|f|$ appartient à A. Si $f = 0$, ceci est évident. Si $f \neq 0$, on pose $g = \frac{1}{\delta(f,0)} f$. Il est clair que pour tout $x \in E$, $g(x)$ appartient à $[-1,1]$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $x \in E$, $|P_n(g(x)^2) - \sqrt{g(x)^2}| < \varepsilon$. Autrement dit, $\delta(P_n(g(x)^2), |g(x)^2|) < \varepsilon$. Comme A est une sous-algèbre, $P_n(g(x)^2)$ appartient à A et donc,$|g|$ est dans l'adhérence de A. Vu que A est un sous-espace vectoriel, on en déduit que $|f| = \delta(f,0)|g|$ est aussi dans l'adhérence de A ce qui termine la démonstration du lemme. □

<u>Théorème</u> 2.10.1 *(Stone-Weierstrass)* *Soit A, une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$, vérifiant :*

($\imath$) A sépare les points de E, c'est-à-dire que pour tout $(x,y) \in E^2$, $x \neq y$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$;

($\imath\imath$) Pour tout $x \in E$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$.

Alors, A est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.

<u>Preuve</u> On remarque d'abord que a$dh\,A$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ car A en est une. a$dh\,A$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$, donc, d'après le lemme 2.10.2, elle est réticulée. Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$ et pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\alpha = \beta$ si $x = y$, il existe $f \in$ a$dh\,A$ telle que

$$f(x) = \alpha \text{ et } f(y) = \beta \tag{2.3}$$

En effet, on déduit de cette propriété que toute fonction g de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ vérifie la condition ($\imath\imath$) du lemme 2.10.1, et donc, d'après ce lemme, g appartient à a$dh\,A$. Ceci montre que a$dh\,A = \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.

Revenons à la démonstration de (2.3). Si $x = y$, il existe $f \in A \subset$ a$dh\,A$, telle que $f(x) \neq 0$. Il suffit de prendre $\frac{\alpha}{f(x)} f$ qui appartient à $A \subset$ a$dh\,A$.

Si $x \neq y$, il existe $f_1 \in A \subset$ a$dh\,A$ telle que $f_1(x) \neq f_1(y)$. On résout le système suivant :

$$\begin{cases} af_1(x) + bf_1(x)^2 & = \alpha \\ af_1(y) + bf_1(y)^2 & = \beta \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $f_1(x)f_2(y)(f_1(y) - f_2(y))$. Si $f_1(x) \neq 0$ et $f_1(y) \neq 0$, alors le système ci-dessus a une solution $(\overline{a}, \overline{b})$ et la fonction $\overline{a}f_1 + \overline{b}f_1^2$ vérifie (1).

Si $f_1(x) = 0$, alors $f_1(y) \neq 0$ et il existe $f_2 \in A$ telle que $f_2(x) \neq 0$. Pour $r > 0$, suffisamment petit, $f_3 = f_1 + rf_2$ sépare les points x et y et ne s'annule ni en x ni en y. On résout le système obtenu en remplaçant dans le précédent f_1 par f_3 et on obtient une fonction de A qui vérifie (1). On fait un raisonnement symétrique si $f_1(y) = 0$. □

<u>Remarque</u> : Il est commode de formuler le théorème de la façon suivante : si une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ sépare les points de E et si les f_i ne s'annulent pas toutes en un même point de E, alors tout élément f de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ est limité uniforme d'une suite polynomiale en f_i (sans terme constant).

Si les fonctions constantes font partie de la la sous-algèbre A, alors la condition ($\imath\imath$) du théorème est automatiquement vérifiée.

Si E est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, alors la famille des applications coordonnées $(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ sépare les points de E et elles ne s'annulent pas toute au même point si 0 n'appartient pas à

E. Donc toute fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ est approximable par des polynômes de la forme $\sum \alpha_{p_1,\ldots,p_n} x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$ avec un terme constant si $0 \in E$ et éventuellement sans si $0 \notin E$.

2.10.2 Le théorème d'Ascoli

Le théorème d'Ascoli donne une caractérisation des sous-ensembles compacts de l'ensemble $\mathcal{C}(E, F)$, muni de la distance uniforme, des applications continues de E, espace métrique compact, dans F, espace métrique.

<u>DÉFINITION</u> 2.10.3 Soit E et F, deux espaces métriques et $\mathcal{F}(E, F)$, l'ensemble des applications de E dans F. Une partie A de $\mathcal{F}(E, F)$ est équicontinue en $x \in E$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, \alpha)$ et pour tout $f \in A$,

$$d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

A est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de E.

<u>REMARQUE</u> : Si A est une partie équicontinue de $\mathcal{F}(E, F)$ en x, alors toutes les applications de A sont continues en x.

<u>DÉFINITION</u> 2.10.4 Soit E et F, deux espaces métriques et $\mathcal{F}(E, F)$, l'ensemble des applications de E dans F. Une partie A de $\mathcal{F}(E, F)$ est uniformément équicontinue sur E, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(y, z) \in E^2$ et pour tout $f \in A$, si $d_E(y, z) < \alpha$ alors

$$d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

<u>PROPOSITION</u> 2.10.1 *Soit E, un espace métrique compact, F, un espace métrique, et $\mathcal{F}(E, F)$, l'ensemble des applications de E dans F.*

($\imath$) *Une partie A de $\mathcal{F}(E, F)$ est uniformément équicontinue si et seulement si A est équicontinue en tout point de E.*

($\imath\imath$) *A est une partie uniformément équicontinue si et seulement si* adh *A est uniformément équicontinue.*

<u>PREUVE</u> ($\imath$) Il est clair que si A est uniformément équicontinue alors elle est équicontinue en tout point de E. Réciproquement si A est équicontinue en tout point de E, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in E$, il existe $\alpha_x > 0$ tel que pour tout $f \in A$ et pour tout $y \in (B(x, \alpha_x))$, $d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Vu que $E = \cup_{x \in E} B(x, \frac{1}{2}\alpha_x)$ et que E est compact, il existe un sous-ensemble fini $\tilde{E}$ de E tel que $E = \cup_{x \in \tilde{E}} B(x, \frac{1}{2}\alpha_x)$. Soit $\alpha = \min\{\frac{1}{2}\alpha_x \mid x \in \tilde{E}\}$. Comme $\tilde{E}$ est fini, α est strictement positif. Soit $f \in A$ et $(y, z) \in E^2$ tel que $d_E(y, z) < \alpha$. Il existe $x \in \tilde{E}$ tel que y appartient à $B(x, \frac{1}{2}\alpha_x)$. Vu la définition de α, z appartient à $B(x, \alpha_x)$. Donc, $d_F(f(y), f(z)) \leq d_F(f(y), f(x)) + d_F(f(x), f(z)) < 2\varepsilon$. Ceci montre que A est uniformément équicontinue.

($\imath\imath$) La preuve est laissée en exercice. □

<u>EXEMPLES</u> : Considérons le cas où $E = [0, 1]$ et $F = \mathbb{R}$. La famille de fonctions $(\sqrt{\alpha x})_{\alpha \in [0,M]}$ est uniformément équicontinue.

Dans le cas général, la famille des applications lipschitziennes de rapport inférieur ou égal à k est uniformément équicontinue. Donc, dans le cas où $E = [0, m]$ et $F = \mathbb{R}$, la famille $(x^n)_{n \geq 1}$ est uniformément équicontinue si $m < 1$. Par contre, la même famille n'est pas uniformément équicontinue si $E = [0, 1[$.

<u>Théorème</u> 2.10.2 (Ascoli) *Soit E, un espace métrique compact, et soit F, un espace métrique. Soit A, un sous-ensemble de $\mathcal{C}(E,F)$ que l'on munit de la métrique de la convergence uniforme. Alors,* adh A *est compact si et seulement si :*

($\imath$) *A est uniformément équicontinue ;*

($\imath\imath$) *il existe un compact $K \subset F$ tel que pour tout $f \in A$ et pour tout $x \in E$, $f(x) \in K$.*

<u>Preuve</u> Supposons que a*dh* A est compact. Pour montrer la propriété ($\imath\imath$), il suffit de montrer que l'ensemble $D = \cup_{f\in A} f(E)$ est relativement compact. Soit (y_n), une suite de D. Il existe une suite (x_n) de E et une suite (f_n) de A telles que $y_n = f_n(x_n)$. Comme E est compact, la suite (x_n) admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ dont on note la limite x. Comme a*dh* A est compact, la suite $(f_{\varphi(n)})$ admet une sous-suite convergente $(f_{\varphi\circ\psi(n)})$ dont on note la limite f. On a donc :

$$d_F(y_{\varphi\circ\psi(n)}, f(x)) \leq d_F(f_{\varphi\circ\psi(n)}(x_{\varphi\circ\psi(n)}), f(x_{\varphi\circ\psi(n)})) + d_F(f(x_{\varphi\circ\psi(n)}), f(x))$$

La convergence uniforme de la suite $(f_{\varphi\circ\psi(n)})$ vers f et la convergence de la suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ vers x impliquent que $d_F(f_{\varphi\circ\psi(n)}(x_{\varphi\circ\psi(n)}), f(x_{\varphi\circ\psi(n)}))$ converge vers 0 ainsi que que $d_F(f(x_{\varphi\circ\psi(n)}), f(x))$. Donc la suite $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ est convergente ce qui montre que la suite (y_n) a une sous-suite convergente.

Montrons maintenant que A est uniformément équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$. a*dh* A étant compact, il existe un sous-ensemble fini $\tilde{A}$ de a*dh* A tel que a*dh* $A \subset \cup_{g\in\tilde{A}} B_\infty(g,\varepsilon)$. Comme E est compact, toutes les applications de $\tilde{A}$ sont uniformément continues. Donc, pour tout $g \in \tilde{A}$, il existe $\alpha_g > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in E^2$, $d_E(x,y) < \alpha_g$ implique $d_F(g(x), g(y)) < \varepsilon$. Soit $\alpha = \min\{\alpha_g \mid g \in \tilde{A}\}$. Comme $\tilde{A}$ est fini, α est strictement positif. Soit $f \in A$ et $(x,y) \in E^2$ tel que $d_E(x,y) < \alpha$. Alors, il existe $g \in \tilde{A}$ tel que $f \in B_\infty(g,\varepsilon)$. De plus,

$$d_F(f(x), f(y)) \leq d_F(f(x), g(x)) + d_F(g(x), g(y)) + d_F(g(y), f(y))$$

D'après la définition de α, les trois termes de la somme de droite de l'inégalité ci-dessus sont majorés par ε . Donc, A est uniformément équicontinue.

Montrons maintenant la réciproque. On suppose donc que A est uniformément équicontinue et qu'il existe un compact $K \subset F$ tel que pour tout $f \in A$ et pour tout $x \in E$, $f(x) \in K$. Montrons que a*dh* A est complet. Vu les hypothèses, a*dh* A est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{C}(E,K)$ qui est complet car K est compact et donc complet. Donc a*dh* A est complet.

Pour finir la preuve, nous montrons que a*dh* A est précompact. Soit $\varepsilon > 0$. D'après les hypothèses et la proposition (2.10.1 - ($\imath\imath$)), a*dh* A est uniformément équicontinue. Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $f \in$ a*dh* A et pour tout $(x,y) \in E^2$, $d_E(x,y) < \alpha$ implique $d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Comme E est compact, il existe un sous-ensemble fini $\tilde{E}$ de E tel que $E = \cup_{x\in\tilde{E}} B_E(x,\alpha)$. Comme K est compact, il existe un sous-ensemble fini $\tilde{K}$ de K tel que $K \subset \cup_{y\in\tilde{K}} B_F(y,\varepsilon)$.

Soit Σ, l'ensemble des applications de $\tilde{E}$ dans $\tilde{K}$. Comme $\tilde{E}$ et $\tilde{K}$ sont fini, Σ est fini. Pour tout $\sigma \in \Sigma$, on définit l'ensemble suivant :

$$A_\sigma = \{f \in \text{a}dh\, A \mid f(x) \in B(\sigma(x),\varepsilon),\ \text{pour tout } x \in \tilde{E}\}$$

Montrons que a*dh* $A = \cup_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma$. Soit $f \in$ a*dh* A. Pour tout $x \in \tilde{E}$, il existe $y \in \tilde{K}$ tel que $f(x) \in B_F(y,\varepsilon)$. Définissons l'application σ de $\tilde{E}$ dans $\tilde{K}$ en associant à tout x de $\tilde{E}$ un élément y de $\tilde{K}$ tel que $f(x) \in B_F(y,\varepsilon)$. Ceci est donc toujours possible et il est clair que $f \in A_\sigma$.

Montrons maintenant que pour tout $\sigma \in \Sigma$ et pour tout $(f,g) \in (A_\sigma)^2$, $d_\infty(f,g) < 4\varepsilon$. Pour tout $x \in E$, il existe $\xi \in \tilde{E}$ tel que $x \in B_E(\xi,\alpha)$. Donc,

$$d_F(f(x), g(x)) \leq d_F(f(x), f(\xi)) + d_F(f(\xi), g(\xi)) + d_F(g(\xi), g(x))$$

Le premier et le troisième terme de la somme sont inférieurs à ε à couse de l'uniforme équicontinuité. Comme f et g appartiennent à A_σ, $f(\xi)$ et $g(\xi)$ appartiennent à $B_F(\sigma(\xi), \varepsilon)$ et donc le terme du milieu de la somme est inférieur à 2ε. $d_F(f(x), g(x))$ est donc inférieur ou égal à 4ε et, comme cette inégalité est vraie pour tout $x \in E$, $d_\infty(f, g) \leq 4\varepsilon$. Pour tout $\sigma \in \Sigma$ tel que A_σ est non vide, on choisit un élément $f_\sigma \in A_\sigma$. Ce que nous avons montré ci-dessus implique que a$dh\, A$ est inclus dans la réunion des boules de centre f_σ et de rayon 4ε. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, a$dh\, A$ est précompact et ceci termine la démonstration du théorème. □

Remarque : L'exemple suivant montre qu'on ne peut pas retirer l'hypothèse E compact du théorème d'Ascoli. Soit (f_n), la suite des applications de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}$$

Pour tout n et pour tout x, $|f_n'(x)| \leq 2$. Donc les applications (f_n) sont toutes 2-lipschitzienne ce qui implique que la famille est uniformément équicontinue sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas relativement compact. En effet, si une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ converge vers f, alors f est l'application nulle car pour tout x, la suite $(f_{\varphi(n)}(x))$ converge vers 0. Mais, la suite $(f_{\varphi(n)})$ ne converge pas uniformément vers l'application nulle car pour tout n, $|f_{\varphi(n)}(\varphi(n))| = 1$.

Remarque : L'hypothèse (ii) du théorème d'Ascoli peut être remplacée par :

pour tout $x \in E$, $A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}$ est relativement compact.

Il est clair que si l'hypothèse (ii) est vérifiée, celle-ci l'est. Montrons maintenant la réciproque, c'est-à-dire que l'ensemble $Z = \cup_{f \in A} f(E)$ est relativement compact. Soit (z_n), une suite de Z. Par définition de Z, il existe une suite (x_n, f_n) de $E \times A$ telle que $z_n = f_n(x_n)$ pour tout n. Comme E est compact, la suite (x_n) a une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. Soit x, sa limite. Vu notre hypothèse, l'ensemble $A(x)$ est relativement compact et donc la suite $(f_{\varphi(n)}(x))$ a une sous-suite convergente $(f_{\varphi \circ \psi(n)}(x))$. Soit y sa limite. Alors :

$$d_E(f_{\varphi\circ\psi(n)}(x_{\varphi\circ\psi(n)}), y) \leq d_E(f_{\varphi\circ\psi(n)}(x_{\varphi\circ\psi(n)}), f_{\varphi\circ\psi(n)}(x)) + d_E(f_{\varphi\circ\psi(n)}(x), y)$$

Le premier terme du membre de droite de l'inégalité tend vers 0 car la famille A est uniformément équicontinue et le second également car la suite $(f_{\varphi\circ\psi(n)}(x))$ converge vers y. Donc la suite (z_n) a une sous-suite convergente ce qui montre que l'ensemble Z est relativement compact.

2.11 Exercices

<u>Exercice</u> 2.1 Soient (X, d) un espace métrique complet et (F_n) une suite de sous-ensembles fermés non vides de X vérifiant :

($\imath$) $F_{n+1} \subset F_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$;

($\imath\imath$) $\left(diam\, F_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{d(x,x') \mid (x,x') \in F_n \times F_n\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Montrer que $\bigcap_{n\in N} F_n$ est un singleton de X.

<u>Exercice</u> 2.2 Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques non-vides et soit $E = E_1 \times E_2$.

1 - Soit d l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$d(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$$

a - Montrer que d est une distance sur E.

b - Soit U_1 un ouvert de E_1 et U_2 un ouvert de E_2. Montrer que $U_1 \times U_2$ est un ouvert de E pour la distance d.

c - Soit U un ouvert de E. Montrer que la projection de U sur E_1 est un ouvert de E_1.

d - Soit (X, δ) un espace métrique. Soit f une application de X dans E. Montrer que f est continue si et seulement si ses deux composantes f_1 et f_2 le sont.

2 - Deux distances δ et δ' sur un même espace X sont uniformément équivalentes si l'application identité de (X, δ) dans (X, δ') est uniformément continue ainsi que sa réciproque. Montrer que les distances suivantes sur E sont uniformément équivalentes à d.

$$d'(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$$

$$d''(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2}$$

3 - Un espace métrique est discret si toute partie de cet espace est un ouvert. Un espace métrique est séparable si il existe un sous-ensemble au plus dénombrable partout dense. Montrer que E est discret (resp. borné, séparable, complet) si et seulement si E_1 et E_2 le sont.

<u>Exercice</u> 2.3 Soit (X, δ) un espace métrique. Montrer qu'il existe une distance uniformément équivalente à δ pour laquelle X est borné.

<u>Exercice</u> 2.4 Soit $(E_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques non-vides. On suppose que pour tout n et pour tout $(x,y) \in E_n$, $d_n(x,y) \leq 1$. Soit $E = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$. On définit la fonction d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ de la façon suivante. Pour tout couple $(x = (x_n), y = (y_n))$ de $E \times E$,

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}$$

1 - Montrer que d est une distance sur E.

2 - Soit I un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{N}$ et pour tout $i \in I$, soit U_i un ouvert de E_i. Soit U le sous-ensemble de E défini par

$$U = \{x \in E \mid \forall i \in I, \ x_i \in U_i\}$$

Montrer que U est un ouvert de E.

Réciproquement, soit V un sous-ensemble ouvert non vide de E et soit $\overline{x} \in V$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble I de $\mathbb{N}$ fini et non vide et des réels strictement positifs $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ tels que :

$$\{x \in E \mid \forall i \in I,\ d_i(x_i, \overline{x}_i) < \varepsilon_i\} \subset V$$

3 - Soit (x^q) une suite de E. Montrer que la suite (x^q) converge vers $\ell \in E$ (resp. est de Cauchy) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (x^q_n) converge vers ℓ_n (resp. est de Cauchy). Montrer que E est complet si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est complet.

<u>Exercice</u> 2.5 Soit E un espace métrique compact et soit F un espace métrique. Soit f une application continue bijective de E dans F. Montrer que f est un homéomorphisme.

Soit E un espace métrique compact tel qu'il existe une famille d'applications continues de E dans $\mathbb{R}$, $(f_i)_{(i=1,\dots,n)}$, telle que pour tout élément $(x, y) \in E \times E$, $x \neq y$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Montrer que E est homéomorphe à un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.

<u>Exercice</u> 2.6 Le but de cet exercice est de montrer que toute application continue d'un compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ peut être prolongée en une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soient K un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

1 - Montrer qu'il existe une famille $(a_i)_{i\in I}$ de points de K, dense dans K et telle que I soit un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$.

Dans la suite, on note d_K la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $d_K(x) = \min\{\|x - a\| \mid a \in K\}$. Pour tout $i \in I$, on définit l'application φ_i de $\mathbb{R}^n \setminus K$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_i(x) = \max\left\{2 - \frac{\|x - a_i\|}{d_K(x)}, 0\right\}$$

2 - Montrer que φ_i est continue sur $\mathbb{R}^n \setminus K$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, $\varphi_i(x) \in [0, 1]$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, il existe $i \in I$ tel que $\varphi_i(x) \neq 0$.

3 - On définit l'application $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K \\ \left(\sum_{i\in I} \frac{1}{2^i}\varphi_i(x)\right)^{-1} \left(\sum_{i\in I} 2^{-i}\varphi_i(x) f(a_i)\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

a - Montrer que $\tilde{f}$ est continue sur l'intérieur de K et sur $\mathbb{R}^n \setminus K$.

b - Soit $x_0 \in K \setminus \operatorname{int} K$ et soit $\varepsilon > 0$. Monter qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in B(x_0, \alpha) \cap K,\ \|f(x) - f(x_0)\| \le \varepsilon.$$

c - Monter que pour tout $x \in B(x_0, \frac{\alpha}{3})$, $x \notin K$, alors $\varphi_i(x) = 0$ si $a_i \notin B(x_0, \alpha)$.

d - En déduire que pour tout $x \in B(x_0, \frac{\alpha}{3})$, $\|\tilde{f}(x) - f(x_0)\| \le \varepsilon$ et conclure.

<u>Exercice</u> 2.7 Montrer que l'application de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x, y) = \left|\frac{x}{1 + x} - \frac{y}{1 + y}\right|$$

est une distance. Montrer que $\mathbb{R}_+$ muni de cette distance n'est pas complet.

<u>Exercice</u> 2.8 **I.** Soit (E, d) un espace métrique compact.

1 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre fini (p_n) d'éléments $x_1^n, ..., x_{p_n}^n$ de E tel que $E = \bigcup_{i=1}^{p_n} B(x_i^n, \frac{1}{n})$ où $B(x_i^n, \frac{1}{n})$ désigne la boule ouverte de centre x_i^n et de rayon $\frac{1}{n}$.

2 - Soit $D = \bigcup_{n \geq 1} \{x_1^n, ..., x_{p_n}^n\}$. Montrer que D est dénombrable.

3 - Montrer que $adh\, D = E$.

II. Soient (E, d_E), (F, d_F) deux espaces métriques compacts et k un réel strictement positif. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications k-lipschitziennes de E dans F, c'est à dire l'ensemble des applications $f : E \to F$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y)$. Pour $f, g \in \mathcal{E}$, on définit

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in E} d_F(f(x), g(x)).$$

Le but de cet exercice est de montrer que $(\mathcal{E}, \delta)$ est un espace métrique compact.

1 - Montrer que δ définit une distance sur $\mathcal{E}$.

2 - Montrer qu'il existe une suite (a_n) de E tel que $D = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E.

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{E}$.

3 - Montrer qu'il existe une suite (g_n) extraite de la suite (f_n), telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite d'éléments $(g_n(a_p))_{n \in \mathbb{N}}$ de F est convergente.

4 - Montrer que la suite (g_n) converge simplement sur E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, la suite d'éléments $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de F admet une limite, que l'on note $g(x)$.

5 - Montrer que l'application $g : E \to F$ définie en -4- est un éléments de $\mathcal{E}$.

6 - Montrer que g est limite uniforme de la suite (g_n), i.e., $\lim_{n \to +\infty} \delta(g_n, g) = 0$.

7 - Conclure.

<u>Exercice</u> 2.9 Soit $E = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ muni de la distance $d(x, y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^{n+1}}$.

1 - Prouver que (E, d) est compact.

2 - Montrer que tout espace métrique compact est homéomorphe à un sous espace de E.

<u>Exercice</u> 2.10 Soient E un espace métrique et F un espace métrique compact. Montrer qu'une application $f : E \to F$ est continue si et seulement si son graphe

$$G(f) = \{(x, f(x)), x \in E\}$$

est fermé dans $E \times F$.

<u>Exercice</u> 2.11 Soit (E, d) un espace métrique complet et Λ un espace topologique. Soit une application $f : E \times \Lambda \to E$ vérifiant :

- Pour tout $x \in E$ fixé, l'application de $\Lambda \to E$, $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est continue ;

- $\exists k < 1$ telle que $d(f(x, \lambda), f(y, \lambda)) \leq k d(x, y)$ pour tout $(\lambda, x, y) \in \Lambda \times E \times E$.

1 - Montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un unique $a_\lambda \in E$ vérifiant $f(a_\lambda, \lambda) = a_\lambda$.

2 - Montrer que l'application $\lambda \mapsto a_\lambda$ est continue.

<u>Exercice</u> 2.12 Trouver les sous ensembles compacts de $\mathbb{R}_+^*$ muni de la distance

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

<u>Exercice</u> 2.13 Soit (X,d) un espace métrique compact et non vide. Une application f de X dans X est faiblement contractante si $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ pour tout $(x,y) \in X \times X$ tel que $x \neq y$.

1 - Montrer qu'une application faiblement contractante a un unique point fixe (c.a.d. l'équation $f(x) = x$) a une solution unique). (Indication : étudier la fonction φ de X dans R définie par $\varphi(x) = d(x, f(x))$.)

2 - Donner un exemple d'application faiblement contractante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'a pas de point fixe.

<u>Exercice</u> 2.14 Soient E un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application telle que $d(x,y) \leq d(f(x),f(y))$ pour tout $x,y \in E$.

1 - Soient $a,b \in E$. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $a_{n+1} = f(a_n)$, $b_{n+1} = f(b_n)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \geq 1 \text{ tel que } d(a,a_n) \leq \varepsilon \text{ et } d(b,b_n) \leq \varepsilon.$$

2 - En déduire que $d(f(a),f(b)) = d(a,b)$.

3 - Montrer (utiliser le résultat de - 1 -) que $f(E)$ est dense dans E.

4 - Montrer que f est une isométrie bijective de E sur E.

<u>Exercice</u> 2.15 Soit X un espace métrique.

1 - Montrer que s'il existe un réel $r > 0$ tel que, dans X, toutes les boules fermées de rayon r sont compactes, alors X est complet.

2 - Donner un exemple d'un espace métrique localement compact X tel que, pour tout $x \in X$, il existe une boule fermée de centre x non compacte.

3 - Donner un exemple d'un espace métrique localement compact et non complet.

4 - Donner un exemple d'un espace métrique complet non localement compact.

<u>Exercice</u> 2.16 Soient un entier naturel $n \geq 2$, un réel $k > 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue vérifiant (C) :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \geq k|x-y|, \text{ et } f(x+1) = f(x) + n.$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications 1-périodiques et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1 - Montrer que $\mathcal{E}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach.

2 - Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition (C). Montrer qu'il existe un seul $\alpha \in \mathcal{E}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x + \alpha(x)) = f_2(x) + \alpha(f_2(x)).$$

Indication : utiliser un théorème de point fixe.

3 - Montrer qu'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(h(x)) = h(nx)$. (On dit alors que f est topologiquement conjuguée à l'homothétie $x \mapsto nx$.)

<u>EXERCICE</u> 2.17 Soient X un espace métrique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X. On suppose que les A_i se rencontrent deux à deux. Montrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

<u>EXERCICE</u> 2.18 Soient E et F deux espaces métriques connexes, A un sous ensemble ouvert et fermé de $E \times F$ et $(x_0, y_0) \in A$. On définit : $A_{y_0} = \{x \in E \mid (x, y_0) \in A\}$ et $B_{x_0} = \{y \in F \mid (x_0, y) \in A\}$.

1 - Montrer que A_{y_0} et B_{x_0} sont ouverts et fermés respectivement dans E et F.

2 - Prouver que $A_{y_0} = E$ et $B_{x_0} = F$.

3 - Montrer que $E \times F$ est connexe.

<u>EXERCICE</u> 2.19 Soient E et F deux espaces métriques. Soient $f : E \to F$ une application continue et A un sous ensemble connexe de E.

1 - Montrer que $f(A)$ est connexe.

2 - Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ est connexe.

3 - Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

4 - Montrer qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercices complémentaires

<u>EXERCICE</u> 2.20 Soit (E, d) un espace métrique borné et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés non vides de E. Si $F, A, B \in \mathcal{F}$ et $x \in E$, on note

$$d(x, F) = \inf \{d(x, y), y \in F\} ;$$

$$\delta(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A) \right\}.$$

1 - Montrer que pour tout $A, B, C \in \mathcal{F}$,

$$\sup_{x \in A} d(x, C) \leq \sup_{x \in A} d(x, B) + \sup_{y \in B} d(y, C).$$

2 - Montrer que δ est une distance sur $\mathcal{F}$.

3 - Soit (A_n) une suite de $\mathcal{F}$ convergeant vers A et soit $x_n \in A_n$. Montrer que si la suite (x_n) converge vers x, alors, $x \in A$.

Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. On définit la limite supérieure de la suite (F_n), notée $\limsup(A_n)$ et la limite inférieure de la suite (A_n), notée $\liminf(A_n)$ de la façon suivante :

Un élément $x \in E$ appartient à $\limsup(A_n)$ si pour tout voisinage V de x dans E et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geq n$ tel que $V \cap A_m \neq \emptyset$.

Un élément $x \in E$ appartient à $\liminf(A_n)$ si pour tout voisinage V de x dans E, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq n$, $V \cap A_m \neq \emptyset$.

4 - Montrer qu'un élément $x \in E$ appartient à $\limsup(A_n)$ si et seulement si il existe une suite (x_n) de E telle que pour tout n, $x_n \in A_n$ et une sous-suite de (x_n) converge vers x.

5 - Montrer qu'un élément $x \in E$ appartient à $\liminf(A_n)$ si et seulement si il existe une suite (x_n) de E qui converge vers x et un élément $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in A_n$

6 - Montrer que $\liminf(A_n) \subset \limsup(A_n)$. Montrer que $\limsup(A_n)$ est non vide. Montrer que $\liminf(A_n)$ et $\limsup(A_n)$ sont des fermés de E.

7 - Montrer que la suite (A_n) de $\mathcal{F}$ converge vers $A \in \mathcal{F}$ pour la distance δ si et seulement si $\liminf(A_n) = \limsup(A_n) = A$.

8 - Soit (A_n) une suite de $\mathcal{F}$ convergeant vers A. Montrer que

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left[\mathrm{a}dh \left(\bigcup_{p \geq n} A_p \right) \right]$$

(Indication : si x est un élément de ce dernier ensemble, construire une sous suite (A_{n_k}) et des $x_k \in A_{n_k}$ tels que la suite (x_k) converge vers x.)

9 - Si E est précompact, montrer que $\mathcal{F}$ est précompact. (indication : si $\mathcal{A}$ est un recouvrement de E par des fermés de diamètre plus petit que ε, considérer $\mathbb{B}$ l'ensemble de toutes les réunions d'ensembles de $\mathcal{A}$.)

10 - Le but de cette question est de montrer que si (E, d) est complet alors $(\mathcal{F}, \delta)$ est complet.

Soit (A_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{F}$, on pose $B_n = \mathrm{a}dh \left(\bigcup_{p \geq n} A_p \right)$ et $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$.

a - Montrer que pou tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q > n$, $x \in A_p$, $\exists y \in A_q$ tel que $d(x, y) \leq \varepsilon$.

b - Soient $\varepsilon > 0$ et (ε_k) une suite de réels > 0 telle que $\sum_{k=0}^{\infty} \leq \varepsilon$. Construire une sous suite (A_{n_k}) et des $x_k \in A_{n_k}$ tels que $d(x_k, x_{k+1}) \leq \varepsilon_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c - En déduire que B est non vide et que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, B) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in B_n$.

d - Montrer que la suite (A_n) converge vers B.

11 - Montrer que si E est compact alors $(\mathcal{F}, \delta)$ est compact.

<u>Exercice</u> 2.21 Soit (X, d) un espace métrique complet et soit f une application de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que f est bornée inférieurement sur X, qu'il existe $\xi \in X$ tel que $f(\xi)$ est fini et que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ est fermé. Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $x \in X$, il existe un élément $\overline{y} \in X$ tel que $f(\overline{y}) + d(\overline{y}, x) \leq f(x)$ et pour tout $y \in X$, $y \neq \overline{y}$, $f(y) + d(y, \overline{y}) > f(\overline{y})$.

1 - Pour tout $x \in X$, on définit l'ensemble $F(x)$ par :

$$F(x) = \{y \in X \mid f(y) + d(y, x) \leq f(x)\}$$

a - Montrer que $F(x)$ est fermé et qu'il existe un élément $y \in F(x)$ tel que $f(y)$ est fini.

b - Montrer que si $y \in F(x)$, alors $F(y) \subset F(x)$ et que $f(y) \leq f(x)$.

2 - On définit l'application g de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de la façon suivante :

pour tout $x \in X$, $g(x) = \inf\{f(y) \mid y \in F(x)\}$

Montrer que g est à valeurs finies et que pour tout $x \in X$, $g(x) \leq f(x)$. Montrer que si $y \in F(x)$, alors $g(y) \geq g(x)$.

3 - Pour tout $x \in X$, on construit une suite (y_n) de X par récurrence. y_0 est un élément de $F(x)$ tel que $f(y_0)$ est fini. Si les $n+1$ premiers termes de la suite sont définis, on choisit y_{n+1} tel que $y_{n+1} \in F(y_n)$ et $g(y_n) \leq f(y_{n+1}) \leq g(y_n) + 2^{-(n+1)}$. Montrer qu'il est possible de construire une suite de cette façon et que

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq 2^{-(n+1)}$$

En déduire que la suite (y_n) est convergente vers une limite que nous noterons $\overline{y}$.

4 - Montrer que $\overline{y} \in F(x)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{y} \in F(y_n)$. Soit $y \in F(\overline{y})$. Montrer que pour tout n, $y \in F(y_n)$ et en déduire que $f(\overline{y}) \leq f(y) + 2^{-(n+1)}$. En déduire que $y = \overline{y}$ et conclure.

<u>Exercice</u> 2.22 Soit (E, d) un espace métrique localement compact. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$(\imath)$ Il existe un sous-ensemble dénombrable D de E tel que $E = \mathrm{a}dh\, D$. (E est séparable).

$(\imath\imath)$ Il existe une suite de sous-ensembles compacts (K_n) de E telle que $E = \cup_n K_n$.

$(\imath\imath\imath)$ Il existe une suite d'ouverts (U_n) de E telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{a}dh\, U_n \text{ est compact},\ \mathrm{a}dh\, U_n \subset U_{n+1} \text{ et } E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Indications : pour montrer que $(\imath)$ implique $(\imath\imath)$, on pourra construire des boules relativement compactes de la forme $B(a_n, \frac{1}{m})$ où $a_n \in D$.

Pour montrer que $(\imath\imath)$ implique $(\imath\imath\imath)$, on montrera d'abord que dans un espace localement compact, tout compact admet un voisinage relativement compact.

Pour montrer $(\imath\imath\imath)$ implique $(\imath)$, on remarquera d'abord que tout espace métrique compact est séparable.

<u>Exercice</u> 2.23 Un espace métrique est dit B.F.C. si toutes les boules fermées sont compactes.

1 - Montrer qu'un espace métrique est B.F.C. si et seulement si les sous-ensembles fermés bornés sont compacts.

2 - Montrer que tout sous-ensemble fermé d'un espace B.F.C. est B.F.C. Donner un exemple de sous-ensemble ouvert d'un espace B.F.C. qui n'est pas B.F.C.

3 - Montrer qu'un espace B.F.C. est complet, localement compact et séparable.

4 - Soit (E, d) un espace B.F.C. Montrer que pour tout fermé A de E et pour tout $x \in E$, il existe $a \in A$ tel que :

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\} = d(x, a)$$

Soit A un sous-espace compact de E et B un sous-ensemble fermé de E. Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que :

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\} = d(a, b).$$

5 - Soit (E, d) un espace B.F.C. et (x_n) une suite de E. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$(\imath)$ pour tout compact K de E, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \notin K$ pour tout $n \geq n_0$;

$(\imath\imath)$ pour tout $a \in E$, $\lim_{n\to\infty} d(a, x_n) = \infty$;

$(\imath\imath\imath)$ il existe $a \in E$ tel que $\lim_{n\to\infty} d(a, x_n) = \infty$.

Si l'une des propositions ci-dessus est vérifiée, on dit que la suite (x_n) tend vers l'infini.

6 - Soit E et F, deux espaces métriques B.F.C. et f une application continue de E dans F. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$(\imath)$ pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est compact dans E ;

$(\imath\imath)$ pour toute suite (x_n) de E tendant vers l'infini, la suite $(f(x_n))$ tend vers l'infini.

<u>Exercice</u> 2.24 Soit (E, d) un espace métrique localement compact et séparable.

1 - Soit (U_n) une suite d'ouverts relativement compacts de E tels que :

$$\mathrm{a}dh\, U_n \subset U_{n+1} \text{ et } E = \cup_n U_n.$$

Montrer qu'il existe une application continue f de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$[f(x) \leq n \text{ si } x \in \mathrm{a}dh\, U_n] \text{ et } [f(x) \geq n \text{ si } x \notin \mathrm{a}dh\, U_n] .$$

Indication : on pourra considérer les fonctions f_n définies par :

$$f_n(x) = \inf \left\{ 1, \frac{d(x, \mathrm{a}dh\, U_n)}{d(\mathrm{a}dh\, U_n, U_{n+1}^c)} \right\}.$$

2 - Montrer que la distance $\delta(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$ est topologiquement équivalente à la distance d, c'est-à-dire, que l'identité est un homéomorphisme de (E, d) sur (E, δ).

3 - Montrer que les boules fermées de l'espace métrique (E, δ) sont compactes.

Chapitre 3

Espaces vectoriels normés

3.1 Généralités sur les espaces vectoriels normés

Soit E, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

<u>Définition</u> 3.1.1 Une norme sur E est une application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

($\imath$) pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;

($\imath\imath$) pour tout $x \in E$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\|tx\| = |t|\|x\|$;

($\imath\imath\imath$) pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme. Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, on peut définir une distance d sur E en posant $d(x, y) = \|x - y\|$. Réciproquement, nous avons le résultat suivant.

<u>Proposition</u> 3.1.1 *Soit d, une distance sur un espace vectoriel E. d est issue d'une norme si et seulement si pour tout $(x, y, z) \in E^3$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,*

$d(x + z, y + z) = d(x, y)$, $d(tx, ty) = |t|d(x, y)$.

Il suffit de considérer l'application $\|x\| = d(x, 0)$.

<u>Exemple</u> : sur $\mathbb{R}^n$, on a les normes suivantes :

$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|,\, i = 1, \ldots, n\}$;

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$;

Soit ℓ^∞, l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Sur cet espace, on peut définir la norme suivante :

$$\|(u_n)\|_\infty = \sup\{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Soit ℓ^1, l'espace vectoriel des suites réelles telles que la suite $(\sum_{i=0}^n |u_i|)$ est convergente. Sur cet espace, on peut définir la norme suivante :

$$\|(u_n)\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |u_i|.$$

Soit ℓ^p, $p \in]1, \infty[$, l'espace vectoriel des suites réelles telles que la suite $(\sum_{i=0}^{n} |u_i|^p)$ est convergente. Sur cet espace, on peut définir la norme suivante :

$$\|(u_n)\|_p = (\sum_{i=0}^{\infty} |u_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues de K, espace métrique compact dans $\mathbb{R}$. Sur cet espace, on peut définir la norme :

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in K\}$$

Si K est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, on peut aussi considérer les normes suivantes pour tout $p \in [1, \infty[$,

$$\|f\|_p = \Big(\int_K |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

<u>REMARQUE</u> : Une topologie sur un espace vectoriel E est une topologie d'espace vectoriel si les applications $(x, y) \to x + y$ de $E \times E$ dans E et $(t, x) \to tx$ de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) $\times E$ dans E sont continues. Il est facile de voir qu'une norme induit sur un espace vectoriel une topologie d'espace vectoriel.

Si $(E_1, \|.\|_1), \ldots, (E_p, \|.\|_p)$ sont p espaces vectoriels normés, alors la topologie produit sur $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ est une topologie d'espace vectoriel qui est issue, par exemple, de la norme :

$$\|(x_1, \ldots, x_p)\| = \max\{\|x\|_j \mid j = 1, \ldots, p\}.$$

<u>DÉFINITION</u> 3.1.2 Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes si il existe $\alpha > 0$ et$\beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$, $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

<u>PROPOSITION</u> 3.1.2 *Soit E, un espace vectoriel de dimension finie. Alors, toutes les normes sur E sont équivalentes.*

<u>PREUVE</u> Soit $(u_1, \ldots, u_n)$, une base de E. On définit la norme suivante sur E. Pour tout $u \in E$, on pose :

$$\|u\|_\infty = \max\{|x_i|, \, i = 1, \ldots, n\}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de u dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$. Soit $\|.\|$, une autre norme sur E. Pour tout $u \in E$,

$$\|u\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|u_i\| \leq n \max\{\|u_i\| \mid i = 1, \ldots, n\}\|u\|_\infty$$

La norme $\|.\|$ est donc une application continue car lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}_+$ pour la topologie définie par la norme $\|.\|_\infty$.

$(E, \|.\|_\infty)$ est homéomorphe à $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ par l'isométrie qui à tout vecteur de E associe ses coordonnées dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$. Donc la boule unité de E, $\bar{B}_E(0, 1)$ est homéomorphe à la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour le norme $\|.\|_\infty$ qui est compacte car c'est le produit de n compacts $[-1, +1]$. La norme $\|.\|$ atteint donc son minimum sur l'ensemble $S = \{x \in E \mid \|x\|_\infty = 1\}$ qui est un fermé d'un compact, donc un compact. Soit α, ce minimum. $\alpha > 0$ car 0 n'appartient pas à S. On vérifie aisément que pour tout $u \in E$, $\alpha\|u\|_\infty \leq \|u\|$. Donc les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|$ sont équivalentes. Par la transitivité de la relation d'équivalence, on en déduit que toutes les normes sont équivalentes sur E.
□

On déduit de la démonstration précédente que tout espace vectoriel normé, E, de dimension finie n est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et que toutes les boules fermés de E sont compactes. E est aussi complet à cause de l'équivalence des normes ce qui implique qu'une suite de Cauchy pour une norme, l'est pour toutes les autres.

Théorème 3.1.1 *(Riesz) Soit E, un espace vectoriel normé. E est localement compact si et seulement si E est de dimension finie.*

Avant de donner la démonstration de ce résultat, nous allons montrer le lemme suivant.

Lemme 3.1.1 *Soit E, un espace vectoriel normé et soit F, un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors, F est fermé.*

Preuve Soit (u_n) une suite de F convergeant vers u. Soit $\|.\|_F$, la restriction de la norme de E à F. C'est, de toute évidence, une norme sur F. De plus (u_n) est une suite de Cauchy pour cette norme et comme F est complet car de dimension finie, la suite (u_n) converge pour cette norme vers une limite $v \in F$. Il est clair que v est aussi une limite de (u_n) dans E car $\|u_n - v\|_F = \|u_n - v\|$. Donc, vu l'unicité de la limite, $u = v$ et donc u appartient à F, ce qui montre que F est fermé. □

Preuve du théorème 3.1.1 Soit E, un espace vectoriel localement compact. Il existe donc $r > 0$ tel que $\bar{B}(0, r)$ est compact. Comme l'application $x \to \frac{1}{r}x$ est un homéomorphisme de E dans E, on en déduit que $\bar{B}(0,1)$ est compact. Vu que $\bar{B}(0,1) \subset \cup_{x\in\bar{B}(0,1)} B(x, \frac{1}{2})$, on en déduit qu'il existe n éléments $x_1, \ldots, x_n$ de $\bar{B}(0,1)$ tels que $\bar{B}(0,1) \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2})$. Soit F, le sous-espace vectoriel de E engendré par $x_1, \ldots, x_n$.

Montrons que $F = E$ ce qui finira notre démonstration. Pour tout $x \in \bar{B}(0,1)$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in B(x_i, \frac{1}{2})$. Donc, il existe $u \in B(0,1)$ tel que $x = x_i + \frac{1}{2}u$. En recommençant le même raisonnement pour u, on montre qu'il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $v \in B(0,1)$ tel que $x = x_i + \frac{1}{2}x_j + \frac{1}{4}v$. Par récurrence , on en déduit que pour tout $n \geq 1$, il existe $y_n \in F$ et $u_n \in B(0,1)$ tel que $x = y_n + \frac{1}{2^n}u_n$. Donc x est la limite de la suite (y_n) de F et donc x appartient à F car, d'après le lemme précédent, F est fermé dans E. □

3.2 Applications linéaires continues

Soit E et F, deux espaces vectoriels normés et soit f, une application linéaire de E dans F.

Proposition 3.2.1 *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est continue ;

(ii) f est continue en 0_E ;

(iii) il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

Preuve il est clair que (iii) implique (i) qui implique (ii). Montrons que (ii) implique (iii). Comme $f(0_E) = 0_F$ et f continue en 0_E, $f^{-1}(B_F(0,1))$ est un ouvert de E contenant 0_E. Donc il existe $r > 0$, tel que $B_E(0,r) \subset f^{-1}(B_F(0,1))$. On montre facilement que $k = \frac{2}{r}$ vérifie (iii). □

On note $\mathcal{L}(E,F)$, l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Sur $\mathcal{L}(E,F)$, on définit une application à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \quad \|f\| = \inf\{k \geq 0 \mid \forall x \in E, \ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}.$$

<u>Proposition</u> 3.2.2 *L'application $\|.\|$ est une norme. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$,*

$$\begin{array}{rcl} \|f\| & = & \sup\{\|f(x)\|_F \mid x \in \bar{B}_E(0,1)\} \\ & = & \sup\{\|f(x)\|_F \mid \|x\|_E = 1\} \\ & = & \sup\{\|f(x)\|_F \mid x \in B_E(0,1)\} \\ & = & \sup\left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\}\right\} \end{array}$$

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice.

<u>Proposition</u> 3.2.3
- *Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq \|f\|\|x\|_E$.*
- *Soit G, un troisième espace vectoriel normé et soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$. Alors, $\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$.*

<u>Proposition</u> 3.2.4
- *Si E est de dimension finie, toute application linéaire est continue.*
- *Si F est complet, $\mathcal{L}(E,F)$ est complet.*

Les démonstrations des deux propositions précédentes sont laissées en exercice. Dans la suite, nous noterons $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}))$, le dual topologique de E, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Cet espace est complet car $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est complet.

Nous donnons pour finir un exemple d'application linéaire non continue quand l'espace de départ n'est pas de dimension finie. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt$. L'application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ définie par $x \to x(0)$, n'est pas continue. En effet, considérons la suite (x_n) de E définie par :

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

La suite (x_n) tend vers 0_E car $\|x_n\|_1 = \dfrac{1}{2n}$ mais $x_n(0)$ ne tend pas vers 0.

3.3 Le théorème de Hahn-Banach

Le théorème de Hahn-Banach est un des plus importants parmi les théorèmes de base de l'analyse fonctionnel ou l'étude des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie.

<u>Théorème</u> 3.3.1 *(Hahn-Banach) Soit E, un espace vectoriel réel et soit p, une application de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

pour tout $(x,y) \in E \times E$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times E$, $p(tx) = tp(x)$.

Soit F, un sous-espace vectoriel de E et f, une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe une application linéaire, $\tilde{f}$, de E dans $\mathbb{R}$ telle que la restriction de $\tilde{f}$ à F est égale à f et $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Pour démontrer ce théorème, nous allons découper la démonstration en deux parties. Tout d'abord, nous allons énoncer un lemme qui montre que l'on peut étendre f à un sous-espace vectoriel plus grand que F et ensuite, en utilisant le lemme de Zorn sur les ensembles ordonnés inductifs, nous en déduirons le résultat recherché.

<u>LEMME</u> 3.3.1 *Soit E, un espace vectoriel réel et soit p, une application de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

pour tout $(x, y) \in E \times E$, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times E$, $p(tx) = tp(x)$.

Soit F, un sous-espace vectoriel de E différent de E et f, une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe un espace vectoriel G tel que F est strictement inclus dans G et une application linéaire, $\tilde{f}$, de G dans $\mathbb{R}$ telle que la restriction de $\tilde{f}$ à F est égale à f et $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in G$.

<u>PREUVE</u> Comme F n'est pas égal à E, il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin F$. Soit $G = F \oplus \mathbb{R}x_0$. Nous remarquons maintenant les inégalités suivantes : pour tout $(x, y) \in F \times F$,

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) = p(x - x_0 + x_0 + y) \leq p(x - x_0) + p(x_0 + y).$$

Nous en déduisons : $f(x) - p(x - x_0) \leq p(x_0 + y) - f(y)$. Soit :

$$\alpha = \sup\{f(x) - p(x - x_0) \mid x \in F\}$$

D'après les inégalités précédentes, α est fini. Pour tout $(x, y) \in F \times F$,

$$f(x) - p(x - x_0) \leq \alpha, \text{ donc } f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) \qquad (1)$$

et

$$\alpha \leq p(y + x_0) - f(y), \text{ donc } f(y) + \alpha \leq p(y + x_0). \qquad (2)$$

Nous définissons maintenant $\tilde{f}$ sur G de la façon suivante. Pour tout $z \in G$, il existe un unique couple $(x, t) \in F \times \mathbb{R}$ tel que $z = x + tx_0$. Nous posons : $\tilde{f}(z) = f(x) + t\alpha$. Il est évident que $\tilde{f}$ est linéaire et que c'est un prolongement de f.

Nous finissons la démonstration du lemme en montrant que pour tout $z \in G$, $\tilde{f}(z) \leq p(z)$. Si $t = 0$, $\tilde{f}(z) = f(x) \leq p(x) = p(z)$ car f vérifie l'inégalité sur F. Si $t > 0$,

$$f(z) = f(x) + t\alpha = t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha\right) \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0) = p(z)$$

L'inégalité est une conséquence de (2). En utilisant (1), si $t < 0$,

$$f(z) = f(x) + t\alpha = -t\left(f\left(\frac{x}{-t}\right) - \alpha\right) \leq -tp\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) = p(x + tx_0) = p(z)$$

Donc le lemme est démontré. □

<u>PREUVE DU THÉORÈME 3.3.1</u> Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des couples (G, g) où G est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et g est une extension de f qui vérifie $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in G$. Cet ensemble est ordonné de la façon suivante :

$$(G', g') \preceq (G, g) \text{ si et seulement si } G' \subset G \text{ et } g(x) = g'(x) \text{ pourtout } x \in G'$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ muni de cet relation d'ordre est inductif, c'est-à-dire que toute famille totalement ordonnée admet un majorant. En effet, soit $(G_i, g_i)_{i \in I}$, une famille totalement ordonnée pour cette relation d'ordre. Alors, on montre aisément que $G = \cup_{i \in I} G_i$ est un sous-espace vectoriel de E. On définit g sur G en posant pour tout $x \in G$, $g(x) = g_i(x)$ pour i tel que $x \in G_i$. On montre facilement que cette définition à un sens et que g est linéaire et vérifie l'inégalité voulue avec p sur G. Il est clair que (G, g) est un majorant dans $\mathcal{E}$ de la famille $(G_i, g_i)_{i \in I}$.

Le lemme de Zorn nous indique que tout ensemble ordonné inductif a un élément maximal, c'est-à-dire un élément tel qu'aucun autre élément ne lui est supérieur. Soit (G, g) un élément maximal de $\mathcal{E}$. Si $G \neq E$, en utilisant le lemme 3.2, on montre qu'il existe un couple (G', f') différent de (G, g) qui est supérieur à (G, g). Ceci contredit la maximalité de (G, g). Donc $G = E$ et ceci termine la démonstration du théorème. □

<u>Corollaire</u> 3.3.1 *Soit E, un espace vectoriel réel et p, une semi-norme sur E, c'est-à-dire une application de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $(x, y) \in E \times E$, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ et pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$, $p(tx) = |t|p(x)$. Soit F, un sous-espace vectoriel de E et f, une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$ vérifiant $|f(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors, il existe une application linéaire $\tilde{f}$ de E dans $\mathbb{R}$ telle que la restriction de $\tilde{f}$ à F est égale à f et $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

<u>Preuve</u> La condition $|f(x)| \leq p(x)$ implique $f(x) \leq p(x)$. Donc le théorème nous donne l'existence d'un prolongement $\tilde{f}$ de f à E vérifiant $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$. Donc $\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x) \leq p(-x) = p(x)$. D'où, $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ ce qui termine la démonstration du corollaire. □

<u>Corollaire</u> 3.3.2 *Soit E, un espace vectoriel réel normé et F, un sous-espace vectoriel de E. Soit f, une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$, continue pour la norme induite sur F par celle de E. Alors, il existe une application linéaire continue $\tilde{f}$ de E dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à F est égale à f et dont la norme dans E' est égale à la norme de f dans F'.*

<u>Preuve</u> Posons, pour tout $x \in E$, $p(x) = \|f\|_{F'}\|x\|$. Nous remarquons que pour tout $x \in F$, $|f(x)| \leq p(x)$. Donc, le corollaire précédent nous donne l'existence d'une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in E$ et qui est un prolongement de f à E. $\tilde{f}$ est donc lipschitzienne ce qui implique qu'elle est continue et, vu la forme de p, on en déduit que $\|\tilde{f}\|_{E'} \leq \|f\|_{F'}$. De plus comme $\tilde{f}$ est un prolongement de f, $\|f\|_{F'} \leq \|\tilde{f}\|_{E'}$. Donc $\|f\|_{F'} = \|\tilde{f}\|_{E'}$. □

<u>Corollaire</u> 3.3.3 *Soit E, un espace vectoriel réel normé et x_0, un élément de E non nul. Alors, il existe une application linéaire continue $\tilde{f}$ de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

$$f(x_0) = \|x_0\| \quad \textit{et} \quad \|f\|_{E'} = 1.$$

<u>Preuve</u> Soit F, le sous-espace vectoriel de E engendré par x_0. Soit f, l'application linéaire de F dans $\mathbb{R}$ définie par : pour tout $x \in F$, $f(x) = t\|x_0\|$, où t est l'unique réel tel que $x = tx_0$. Le corollaire précédent nous donne l'existence d'un élément $\tilde{f}$ de E' qui prolonge f et tel que $\|\tilde{f}\|_{E'} = \|f\|_{F'}$. Il est donc clair que $f(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f\|_{E'} = 1$. □

Nous allons montrer, à partir des résultats précédents, des propriétés du bidual d'un espace normé, c'est-à-dire du dual topologique du dual topologique. Soit E, un espace vectoriel normé, E', son dual et E'', le dual topologique de E', donc le bidual de E. On définit une application i de E dans E'' de la façon suivante :

$$\forall x \in E, \forall f \in E', \; i(x)(f) = f(x).$$

<u>Proposition</u> 3.3.1 *L'application linéaire i définie ci-dessus est une isométrie injective de E dans E''.*

<u>Preuve</u> Il est facile de voir que cette application est linéaire et continue avec, en plus, $\|i(x)\|_{E''} \leq \|x\|_E$. Nous montrons maintenant que i est une isométrie. Si $x = 0_E$, il est clair que $\|i(x)\|_{E''} = \|0_{E''}\| = 0 = \|x\|_E$. Si $x \neq 0_E$, le corollaire précédent implique qu'il existe $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = 1$ et $f(x) = \|x\|_E$. Donc $\|i(x)\|_{E''} \geq |f(x)| = \|x\|_E$. Nous pouvons donc conclure que $\|i(x)\|_{E''} = \|x\|_E$. Comme i est une isométrie, i est injective. □

On voit déjà qu'en général, il n'y a aucune raison pour que l'application i soit bijective car même si E n'est pas complet, le bidual E'' est toujours complet. Il ne s'agit en fait pas seulement d'une question de complétude comme on pourra le voir à la fin du chapitre suivant.

DÉFINITION 3.3.1 Si i est bijective, on dit que E est réflexif.

Nous déduisons des remarques précédentes le résultat suivant.

THÉORÈME 3.3.2 *Soit E, un espace vectoriel normé. Il existe un espace vectoriel normé complet, $\hat{E}$, et une isométrie linéaire i de E dans $\hat{E}$ telle que* $\mathrm{adh}(i(E)) = \hat{E}$.

De plus, l'espace $\hat{E}$ est unique à une isométrie linéaire bijective près.

PREUVE Pour la partie de l'existence, on prend l'isométrie de E dans E'' et on pose $\hat{E} = \mathrm{a}dh(i(E))$ qui est complet car c'est un fermé d'un complet et qui est un espace vectoriel car c'est l'adhérence d'un espace vectoriel.

Pour l'unicité, on reprend la même démonstration que celle de la proposition 2.7.5. $\square$

3.4 Exercices

<u>Exercice</u> 3.1 Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'espace vectoriel des suites réelles. Pour tout réel $p \geq 1$ et pour toute suite u de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose :

$$\|u\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty]$$

$$\|u\|_\infty = \sup\{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \in [0, \infty]$$

On note $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_0$, $\pi_{j=1}^n \delta Y_j$, les sous-espaces de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites convergentes, des suites qui convergent vers 0 et des suites nulles à partir d'un certain rang. On note ℓ^p, le sous-ensemble des suites u telles que $\|u\|_p < \infty$.

1 - Soit $p > 1$ et soit p' le réel positif défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Si $p = 1$ (resp. $p = \infty$), on pose $p' = \infty$ (resp. $p' = 1$). Montrer que pour tout réel $p \in [1, \infty]$, pour toute suite $u \in \ell^p$ et pour toute suite $v \in \ell^{p'}$, on a :

$\|u.v\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n v_n| \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$.

2 - Montrer que $\|.\|_p$ définit une norme sur ℓ^p.

3 - Montrer que pour tout p, q tels que $1 \leq p < q$, on a les inclusions suivantes :

$$\pi_{j=1}^n \delta Y_j \subset \ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \ell^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

Montrer que $\pi_{j=1}^n \delta Y_j$ est dense dans ℓ^p pour $p \in [1, \infty[$. En déduire que ces espaces sont séparables et montrer que ℓ^∞ ne l'est pas.

4 - Si E est un espace vectoriel normé, on note E' son dual topologique, c'est-à-dire, l'espace des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$.

Montrer que les espaces $(\ell^1)'$ et ℓ^∞ sont isométriques.

Indication : Montrer qu'on peut définir une application ϕ de $(\ell^1)'$ dans ℓ^∞ en posant $\phi(f) = (f(e^n))_{n\in\mathbb{N}})$ où e^n est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le $n$ème qui est égal à 1.

5 - On munit $\mathcal{C}_0$ de la norme $\|.\|_\infty$. Montrer que les espaces ℓ^1 et $\mathcal{C}_0'$ sont isométriques.

6 - Pour $p \in]1, \infty[$, montrer que les espaces $(\ell^p)'$ et $\ell^{p'}$ sont isométriques ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

7 - Déduire des questions précédentes que les espaces ℓ^p sont complets pour $p \in [1, \infty]$.

<u>Exercice</u> 3.2 Montrer que ℓ^1 est d'intérieur vide dans ℓ^2.

<u>Exercice</u> 3.3 On considère ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées, muni de sa norme usuelle. Soit

$$F = \left\{ x \in \ell^\infty \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| < \infty \right\}.$$

1 - Soit $e = (e_n)$ avec $e_n = 1$, pour tout n. Calculer $d(e, F) = \inf\{\|e - x\|, x \in F\}$. En déduire qu'il existe une forme linéaire continue sur ℓ^∞, notée $LIM_{n\to\infty}$ et vérifiant :

$$LIM_{|F} = 0,\ LIM_{n\to\infty}(e) = 1 \text{ et } \|LIM_{n\to\infty}\| = 1.$$

2 - Montrer que toute suite (x_n) convergeant vers 0 est dans $adh\, F$ et en déduire que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = LIM_{n\to\infty}(x_n).$$

3 - Soit $x = (x_n) \in \ell^\infty$ tel que $x_n \geq 0$ pour tout n. Montrer que $LIM_{n\to\infty}(x) \geq 0$. (Indication : on pourra considérer $x - \frac{\|x\|}{2}e$.)

4 - Montrer que $\forall x = (x_n) \in \ell^\infty$:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq LIM_{n\to\infty}(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Exercice 3.4 On considère l'application τ de ℓ^∞ dans lui même par :

pour tout $u \in \ell^\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tau(u)_n = u_{n+1}$.

Montrer qu'il existe une forme linéaire continue f sur ℓ^∞ telle que : pour tout $u \in \ell^\infty$, $f(\tau(u)) = f(u)$ et $\text{liminf}_{n\to\infty} u_n \leq f(u) \leq \text{limsup}_{n\to\infty} u_n$.

On pourra considérer le sous-espace vectoriel de ℓ^∞ des suites (u_n) telle que la suite

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u_i\right)$$

est convergente et étendre à ℓ^∞ l'application qui à une suite associe la limite de la suite définie ci-dessus.

Exercice 3.5 Montrer que l'application linéaire ϕ de ℓ^1 dans $(\ell^\infty)'$ définie par :

$$\phi(u)(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n,\ \forall u \in \ell^1,\ \forall v \in \ell^\infty$$

est continue et que $\|u\|_1 = \|\phi(u)\|_{(\ell^\infty)'}$.

Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle et continue f sur ℓ^∞ telle que $f_{|\mathcal{C}_0} = 0$. En déduire que ϕ n'est pas surjective.

Exercice 3.6 Soient E un espace vectoriel normé et K un convexe compact de E. Soit $f : K \to K$ telle que

$$\forall x, y \in K,\ \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Prouver alors que f admet au moins un point fixe. Indication : considérer $x \mapsto \frac{1}{n}f(a) + (1 - \frac{1}{n})f(x)$.

Exercice 3.7 Soit E un espace vectoriel normé. Soit $a, b \in E$. On pose

$$B_1 = \left\{x \in E \mid \|x - a\| = \|x - b\| = \frac{1}{2}\|a - b\|\right\}$$

et pour $n > 1$,

$$B_n = \left\{x \in B_{n-1} \mid \forall y \in B_{n-1},\ \|x - y\| \leq \frac{1}{2}\text{diam}B_{n-1}\right\}$$

ou $\text{diam}B = \sup\{\|x - y\|, x, y \in B\}$.

1 - Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{a+b}{2} \in B_n;$$

$$[x \in B_n] \Longrightarrow [a + b - x \in B_n].$$

2 - Montrer que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{\frac{a+b}{2}\right\}.$$

3 - Soient F un espace vectoriel normé et f une isométrie bijective de E sur F telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout $x, y \in E$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

En déduire que f est linéaire.

<u>Exercice</u> 3.8 Trouver une suite dans la boule unité de ℓ^∞ qui n'admette pas de valeur d'adhérence.

Soit Q le sous-ensemble de ℓ^2 défini par :

$$Q = \left\{ u \in \ell^2 \mid |u_n| \leq \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \right\}.$$

Montrer que Q n'est contenu dans aucun sous-espace de dimension finie de ℓ^2 et que Q est compact.

Soit $v \in \ell^\infty$. On pose :

$$Q(v) = \left\{ u \in \ell^2 \mid |u_n| \leq |v_n| \text{ pour tout } n \right\}.$$

Montrer que $Q(v)$ est compact si et seulement si v est un élément de ℓ^2.

<u>Exercice</u> 3.9 Soit E un espace vectoriel normé séparable et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense de E. Soit B la boule unité de E' ($B = \{f \in E' \mid |f(x)| \leq \|x\|, \ \forall x \in E\}$). On définit l'application $d : B \times B \to \mathbb{R}$ par

$$d(f,g) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \min\left\{|f(x_p) - g(x_p)|, 1\right\}.$$

1 - Montrer que d est une distance sur B.

2 - Si (f_n) est une suite de B et $f \in B$, montrer que

$$d(f_n, f) \longrightarrow 0 \iff \forall x \in E, \ f_n(x) \longrightarrow f(x).$$

3 - Montrer que (B, d) est compact.

<u>Exercice</u> 3.10 Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ est compact. Montrer que E est de dimension finie.

<u>Exercice</u> 3.11 Soit E, un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit (x_n) une suite de E vérifiant la propriété : pour tout $x \in E$, la suite $(\|x - x_n\|)$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

1 - Montrer que la suite (x_n) est convergente.

2 - Trouver un exemple de suite dans ℓ^1 qui vérifie la propriété ci-dessus et qui ne converge pas.

<u>Exercice</u> 3.12 Soit E un espace vectoriel normé. Soit $S = \{f \in E' \mid \|f\|_{E'} = 1\}$ ou $\|f\|_{E'} = \sup\{|f(x)|, \|x\| \leq 1\}$.

1 - On suppose que E' est strictement convexe, c'est à dire :

$$f, g \in S, \ f \neq g \Longrightarrow \frac{1}{2}(f+g) \notin S.$$

Soient F un sous espace vectoriel de E, f une forme linéaire sur F de norme 1. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire de S qui prolonge f.

2 - On suppose que E' n'est pas strictement convexe. Il existe alors $h, g \in S$, $h \neq g$ et $\dfrac{h+g}{2} \in S$. Soit $F = \mathrm{K}er(h-g)$. Montrer que les restrictions de h et g à F coïncident et sont de norme 1.

3 - $E = \mathbb{R}^2$, muni de la norme usuelle. E' est il strictement convexe ? Que peut on dire ?

<u>Exercice</u> 3.13 Soit (E, d) un espace métrique. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies et non vides de E. On note $\mathbb{B}(\mathcal{F})$ l'espace des fonctions bornées de $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$.

Montrer que E est isométrique à un fermé de $(\mathbb{B}(\mathcal{F}), \|.\|_\infty)$. Indication : fixer $a \in E$ et pour tout $x \in E$, faire correspondre l'application $f_x : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, définie par $f_x(U) = d(x, U) - d(a, U)$ ou $d(x, U) = \inf\{d(x, y), y \in U\}$.

Exercices complémentaires

<u>EXERCICE</u> 3.14 Soit E, l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| \mid t \in [0,1]\}$. Soit ϕ une application intégrable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et soit F l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_0^1 \phi(t)x(t)dt$$

1 - Montrer que F est continue et linéaire et que $\|F\| \leq \int_0^1 |\phi(t)|dt$.

2 - Montrer que si ϕ est continue alors l'inégalité ci-dessus devient une égalité.

Indication : pour tout $\varepsilon > 0$, on pourra considérer les ensembles $F_0 = \phi^{-1}(0)$, $F_1 = \phi^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ et $F_2 = \phi^{-1}(]-\infty, \varepsilon])$.

3 - Soit $c_1, \dots, c_n$ n nombres réels et $t_1, \dots, t_n$ n éléments de $[0,1]$. Soit G, l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$G(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k).$$

Montrer que G est linéaire et continue et que $\|G\| = \sum_{k=1}^n |c_k|$.

En déduire que les applications suivantes de E dans $\mathbb{R}$ sont linéaires et continues :

$$G_1(x) = x(t_1),\ G_2(x) = x(t_1) - x(t_2),\ G_3(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(x\left(\frac{k+1}{n}\right) - x\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

<u>EXERCICE</u> 3.15 Soit E un espace vectoriel normé. On note B la boule unité fermé de E et D la boule unité fermée de E'. On suppose dans tout l'exercice qu'il existe une suite $(x_q)_{q\in\mathbb{N}}$ de B telle que $adh\{x_q \mid q \in \mathbb{N}\} = B$.

1 - Soit $f \in E' \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_q) \neq 0$.

Montrer également que si $f \in D$ et $g \in D$, alors $\forall x \in E, |f(x) - g(x)| \leq 2\|x\|$.

On définit l'application d de $D \times D$ dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall (f,g) \in D \times D,\ d(f,g) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^q}|f(x_q) - g(x_q)|$$

2 - Montrer que d est bien définit sur $D \times D$ et que cette application définie une distance sur D.

3 - Soit (f^n), une suite de D convergeant vers $\bar{f}$ au sens de la distance d. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(f^n(x_q))$ converge vers $\bar{f}(x_q)$. En déduire que pour tout $x \in B$, $(f^n(x))$ converge vers $f(x)$.

4 - Soit (f^n) une suite de D et $\bar{f}$ un élément de D. On suppose que pour tout $x \in B$, $(f^n(x))$ converge vers $\bar{f}(x)$. Montrer que (f^n) converge vers $\bar{f}$ au sens de la distance d.

5 - Le but de cette question est de montrer que (D,d) est un espace métrique complet. Soit (f^n) une suite de Cauchy de (D,d).

a - Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(f^n(x^q))$ est une suite de Cauchy et qu'elle est convergente. On notera $f(x^q)$ sa limite.

b - Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $q' \in \mathbb{N}$, $|f(x^q) - f(x^{q'})| \leq \|x^q - x^{q'}\|$. En déduire qu'il existe une application $\tilde{f}$ de B dans $\mathbb{R}$, continue, telle que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}(x^q) = f(x^q)$. Montrer, de plus, que pour tout $(x,y) \in B \times B$, $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq \|x - y\|$.

c - Soit $\bar{f}$, l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \|x\|\tilde{f}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $\bar{f}$ est une forme linéaire continue sur E et que $\bar{f} \in D$. Montrer que la suite (f^n) converge vers $\bar{f}$ au sens de la distance d et en conclure que (D, d) est un espace métrique complet.

6 - Le but de cette question est de montrer que pour tout $r > 0$, il existe une famille finie $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de D tel que :

$$D \subset \bigcup_{i\in I} B_d(f_i, r)$$

où $B_d(f_i, r) = \{f \in D \mid d(f_i, f) < r\}$.

a - Soit $r > 0$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tel que $\sum_{q=Q}^{\infty} \frac{1}{2^q} \leq \frac{r}{4}$.

b - Soit L_Q, le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x_0, x_1, \ldots, x_{Q-1})$ muni de la norme induite par celle de E. Soit L'_Q l'espace dual de L_Q. On note D_Q la boule unité de L'_Q. Montrer qu'il existe une famille finie $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de D_Q telle que

$$D_Q \subset \bigcup_{i\in I} \left\{f \in D_Q \mid \|f - f_i\|_{L'_Q} < \frac{r}{4}\right\}.$$

c - Montrer que pour tout $i \in I$, il existe un élément $\tilde{f}_i$ de D tel que la restriction de $\tilde{f}_i$ à L_Q est égale à f_i. Montrer également que pour tout $f \in D$, la restriction de f à L_Q est un élément de D_Q.

d - Montrer que pour tout $f \in D$, il existe $i \in I$ tel que pour tout $q = 0, \ldots, Q-1$, $|f(x_q) - \tilde{f}_i(x_q)| < \frac{r}{4}$. En déduire que $d(f, \tilde{f}_i) < r$ et conclure.

7 - Montrer en utilisant les questions précédentes que (D, d) est un espace métrique compact.

<u>Exercice</u> 3.16 Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que cet espace est ordonné : il existe un cône convexe fermé E_+ tel que

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ [x \succeq y] \text{ signifie } [x - y \in E_+].$$

1 - Montrer que pour tout $(x, x', y, y') \in E^4$, si $x \succeq y$ et $x' \succeq y'$ alors $x + x' \succeq y + y'$. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \succeq y$ alors $tx \succeq ty$ pour tout $t \geq 0$.

2 - Soit E'_+ le sous-ensemble de E' défini par :

$$E'_+ = \{f \in E' \mid f(x) \geq 0,\ \forall x \in E_+\}$$

Montrer que E'_+ est un cône convexe fermé de E'. Montrer que

$$E_+ = \{x \in E \mid f(x) \geq 0,\ \forall f \in E'_+\}.$$

On suppose à partir de maintenant que $\operatorname{int} E \neq \emptyset$.

3 - Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un élément $(u, v) \in E_+ \times E_+$ tel que $x = u - v$. (Indication montrer qu'il existe $t > 0$ et $y \in E_+$ tel que $y + tx$ appartient à E_+.)

4 - Soit $f \in E'_+ \setminus \{0\}$. Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \operatorname{int} E_+$.

5 - Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que $F \cap \operatorname{int} E_+ \neq \emptyset$. On pose $F_+ = F \cap E_+$. Montrer que l'intérieur de F_+ pour la topologie induite sur F par la norme de E est égal à $F \cap \operatorname{int} E_+$.

Soit g une forme linéaire continue sur F positive (c'est-à-dire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in F_+$) et non nulle. Le but des questions suivantes est de montrer qu'il existe un élément $f \in E'_+$ qui prolonge g.

6 - Soit $\mathrm{K}er\, g$ le noyau de g. Montrer que $\mathrm{K}er\, g \cap \operatorname{int} E_+ = \emptyset$. En utilisant un théorème de séparation, montrer qu'il existe un élément non nul φ de E'_+ tel que $\mathrm{K}er\, g \subset \mathrm{K}er\, \varphi$.

7 - En déduire que g et la restriction à F de φ sont positivement proportionnelles et conclure.

Chapitre 4

Espaces de Banach

Dans ce chapitre, nous allons étudier les espaces vectoriels normés complets qui sont appelés espaces de Banach. On montre tout d'abord, que les espaces de Banach, sont les espaces vectoriels normés dans lesquels, les séries normalement convergentes sont convergentes. Nous donnons ensuite deux conséquences du théorème de Baire, le théorème de Banach-Steinhaus dont l'une des conséquences est que la limite simple d'une suite d'applications linéaires continues d'un espace de Banach dans un espace vectoriel normé, est continue. Le théorème de l'application ouverte permet de montrer que l'inverse d'une application linéaire continue bijective d'un espace de Banach dans un autre espace de Banach, est continue. A la fin de ce chapitre nous allons étudier la dualité dans les espaces de Banach et nous introduisons la notion de convergence faible-*.

4.1 Convergence des séries dans les espaces de Banach

<u>Proposition</u> 4.1.1 *Soit E un espace de Banach et (x_n) une suite d'éléments de E. Si la série à termes positifs $(\|x_n\|)$ est convergente, alors la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$ est convergente et de plus, $\|\lim_{N\to+\infty} S_N\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$.*

<u>Preuve</u> Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} \|S_{p+q} - S_p\| &= \left\| \sum_{n=p+1}^{p+q} x_n \right\| \\ &\leq \sum_{n=p+1}^{p+q} \|x_n\|. \end{aligned}$$

Comme la série de termes $(\|x_n\|)$ est convergente, on a, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall p \geq n_0, \quad \sum_{n=p+1}^{p+q} \|x_n\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi la suite (S_N) est une suite de Cauchy et donc converge. Par ailleurs, on a pour tout N, $\|S_N\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|x_n\|$ et en passant à la limite, on obtient le résultat de la proposition. □

<u>Remarque</u> Dans un espace vectoriel normé, on dit qu'une série est convergente si la suite des sommes partielles converge. Dans ce cas, on appelle somme de la série, et l'on note $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, la limite de cette suite des sommes partielles. Le théorème précédent, nous dit, que dans un espace de Banach, si la série des normes est convergente dans $\mathbb{R}$, alors la série elle-même est convergente. On dit que la série est normalement convergente.

<u>Théorème</u> 4.1.1 *Si E est un espace vectoriel normé telle que toute série normalement convergente est convergente, alors E est un espace de Banach.*

<u>Remarque</u> Il en résulte que dans un espace vectoriel normé qui n'est pas complet, il existe toujours une série qui est normalement convergente mais qui n'est pas convergente.

<u>Preuve</u> On va considérer une suite de Cauchy (x_n) d'éléments de E. On va en extraire une suite convergente, ce qui assurera le résultat recherché. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\varphi(0) = 0$ et

$$\varphi(n+1) = \min \left\{ p \geq \varphi(n) + 1 \mid \sup_{q \in \mathbb{N}} \|x_p - x_{p+q}\| \leq \frac{1}{(n+2)^2} \right\}.$$

Comme (x_n) est de Cauchy, φ est bien définie et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)} \right\| \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

On en déduit que la série de terme $\|z_n\| = \left\| x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)} \right\|$ est convergente et d'après l'hypothèse du théorème, la suite $S_N = \sum_{n=0}^{N} z_n = x_{\varphi(N)} - x_0$ converge et donc la suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ converge.
□

4.2 Stabilité de l'ensemble des isomorphismes

<u>Définition</u> 4.2.1 Soient E et F deux espaces normés, et soit $f : E \to F$ une application linéaire. On dit que f est un monomorphisme si f est injective et si f est continue ainsi que $f^{-1} : f(E) \to E$. Si en outre $f(E) = F$, on dit que f est un isomorphisme.

<u>Théorème</u> 4.2.1 *Une application linéaire $f : E \to F$ est un monomorphisme si et seulement il existe $k_1, k_2 > 0$ telles que :*

$$\forall x \in E, \quad k_1\|x\| \leq \|f(x)\| \leq k_2\|x\|.$$

<u>Preuve</u> Si f est un monomorphisme, la continuité de f implique l'existence de k_2 et la continuité de f^{-1} celle de k_1. Inversement, si $k_1\|x\| \leq \|f(x)\|$, f est injective et f^{-1} est continue. Si de plus $\|f(x)\| \leq k_2\|x\|$, f est continue. □

<u>Théorème</u> 4.2.2 *Le sous ensemble des monomorphismes de $\mathcal{L}(E, F)$ est ouvert.*

<u>Preuve</u> Si f est un monomorphisme, choisissons k_1 comme dans le théorème précédent et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\|g\| < k_1$.On alors :

$$\forall x \in E, \quad (k_1 - \|g\|)\|x\| \leq \|(f+g)(x)\| \leq (k_1 + k_2)\|x\|$$

Comme $k_1 - \|g\| > 0$, $f + g$ est un monomorphisme. □

On généralise dans la suite ce résultat à l'ensemble des isomorphismes. Pour cela on devra supposer que E et F sont des espaces de Banach. Afin d'arriver à ce résultat (Théorème (4.2.6)), plusieurs résultats intermédiaires seront nécessaires.

<u>Théorème</u> 4.2.3 *Soit U un ouvert d'un espace de Banach F et soit $\phi : U \to F$ une application lipschitzienne de rapport $k < 1$. Alors $(\mathrm{id} + \phi)(U)$ est un ouvert de F.*

<u>PREUVE</u> Afin d'établir ce résultat, il suffit de montrer que l'image de toute boule fermé $\bar{B}(y,r) \subset U$ par $\mathrm{i}d + \phi$, contient la boule fermé $\bar{B}((\mathrm{i}d+\phi)(y),(1-k)r)$. On peut supposer sans perte de généralité que $y = y + \phi(y) = 0$. Il faudrait alors montrer que : $\forall z \in F$ tel que $\|z\| \leq (1-k)r$, l'équation $x + \phi(x) = z$ admet une solution $x \in F$ telle que $\|x\| \leq r$. Or cette équation s'écrit $x = \psi(x) = z - \phi(x)$ et l'application $x \mapsto z - \phi(x)$ est lipschitzienne de rapport k et $\psi(\bar{B}(0,r)) \subset \bar{B}(0,r)$. En effet, si $\|x\| \leq r$, on a

$$\|\psi(x)\| = \|z - \phi(x)\| \leq \|z\| + \|\phi(x) - \phi(0)\| \leq (1-k)r + kr = r.$$

Comme $\bar{B}(0,r)$ est un espace métrique complet, le théorème de point fixe de Banach permet de déduire l'existence de $x \in \bar{B}(0,r)$ telle que $z = x + \phi(x)$. □

<u>THÉORÈME</u> 4.2.4 *Soient A un espace métrique et F un espace de Banach et $f : A \to F$ une injection. On suppose que :*
- *$\exists K > 0$ telle que $\forall (x,y) \in A^2$, $\|f(x) - f(y)\| \geq K d(x,y)$;*
- *$f(A)$ est un ouvert de F.*

Soit $g : A \to F$ une application lipschitzienne de rapport $k < K$. Alors $(f+g)(A)$ est un ouvert de F.

<u>PREUVE</u> Posons $U = f(A)$ et $\phi : U \to F$ définie par $\phi = g \circ f^{-1}$. L'application ϕ est lipschitzienne de rapport $\frac{k}{K} < 1$. On est alors dans les conditions du théorème (4.2.3), $(\mathrm{i}d + \phi)(U)$ est un ouvert de F. De plus

$$(\mathrm{i}d + \phi)(U) = (f+g)(f^{-1}(U)) = (f+g)(A).$$

□

<u>THÉORÈME</u> 4.2.5 *Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ un isomorphisme. Soient A un ouvert de E et $g : A \to F$ une application lipschitzienne de rapport $k < \frac{1}{\|f^{-1}\|}$. Alors :*
- *$f + g$ est injective ;*
- *$f + g$ et $(f+g)^{-1}$ sont lipschitziennes ;*
- *$(f+g)(A)$ est un ouvert de F.*

<u>PREUVE</u> Comme f est un isomorphisme, f^{-1} est continue et donc $f(A)$ est un ouvert dans F. De plus, f multiplie les distances au moins par $K = \frac{1}{\|f^{-1}\|}$. D'après le Théorème (4.2.4), $(f+g)(A)$ est un ouvert de F. $f + g$ est clairement lipschitzienne. Pour tout $(x,y) \in A^2$, on a :

$$\|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| = \|(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))\| \geq (K-k)\|x - y\|$$

Cette relation montre que $f + g$ multiplie les distances au moins par $K - k > 0$. Ceci a deux conséquences, d'une part $f + g$ est injective et d'autre part $(f+g)^{-1}$ est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{K-k}$. □

<u>THÉORÈME</u> 4.2.6 *Si E et F sont deux espaces de Banach, l'ensemble des isomorphismes de E sur F est un ouvert (éventuellement vide) de $\mathcal{L}(E,F)$.*

<u>PREUVE</u> La démonstration est une conséquence des résultats précédents. □

4.3 Le théorème de Banach-Steinhaus

<u>THÉORÈME</u> 4.3.1 *Soit E et F, deux espaces vectoriels normés. Soit $(f_i)_{i \in I}$, une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$, l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Alors, si* $\sup\{\|f_i\| \mid$

$i \in I\} = +\infty$, il existe un sous-ensemble G de E qui est l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses, tel que pour tout $x \in G$, $\sup\{\|f_i(x)\| \mid i \in I\} = +\infty$.

Un ensemble qui est l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts est appelé un G_δ. Le théorème de Baire nous dit qu'un G_δ est dense dans les espaces complets si tous les ouverts de la famille sont denses. Donc, nous déduisons du théorème précédent, le corollaire suivant qui est le théorème de Banach-Steinhaus.

COROLLAIRE 4.3.1 *Soit E, un espace de Banach, et F, un espace vectoriel normé. Soit $(f_i)_{i\in I}$, une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$, l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Alors, si $\sup\{\|f_i\| \mid i \in I\} = +\infty$, il existe un G, G_δ dense, de E tel que pour tout $x \in G$, $\sup\{\|f_i(x)\| \mid i \in I\} = +\infty$.*

En fait, on utilise souvent dans ce résultat non pas la densité de G mais seulement le fait qu'il est non vide car dense. On peut aussi utiliser ce résultat en utilisant la contraposée de l'implication démontrée. En particulier, si l'ensemble des $x \in E$, tel que $\sup\{\|f_i(x)\| \mid i \in I\} = +\infty$ est vide alors $\sup\{\|f_i\| \mid i \in I\}$ est fini.

PREUVE DU THÉORÈME (4.3.1) Soit n, un entier non nul et soit Ω_n, le sous-ensemble de E défini par :

$$\Omega_n = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ \|f_i(x)\| > n\}$$

Comme les f_i sont continues, l'ensemble Ω_n est ouvert. Nous allons montrer maintenant que tous les ensembles Ω_n sont denses. Raisonnons par l'absurde. S'il existe n_0 tel que Ω_{n_0} est non dense, il existe $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \cap \Omega_{n_0} = \emptyset$. Donc, pour tout $x \in B(x_0, r)$, pour tout $i \in I$, $\|f_i(x)\| \leq n_0$. Pour tout $u \in B(0,1)$, $\|f_i(x_0 + ru)\| \leq n_0$. Donc,

$$\begin{aligned}\|f_i(ru)\| &= \|f_i(x_0+ru) - f_i(x_0)\| \\ &\leq \|f_i(x_0+ru)\| + \|f_i(x_0)\| \\ &\leq 2n_0\end{aligned}$$

Donc, $\|f_i(u)\| \leq \frac{2n_0}{r}$ pour tout $u \in B(0,1)$ et pour tout $i \in I$ ce qui implique que $\|f_i\| \leq \frac{2n_0}{r}$ pour tout $i \in I$. Ceci contredit l'hypothèse $\sup\{\|f_i\| \mid i \in I\} = +\infty$. Donc, tous les ensembles Ω_n sont denses et il est clair que pour tout $x \in G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$, $\sup\{\|f_i(x)\| \mid i \in I\} = +\infty$. La preuve du théorème est donc terminé. □

COROLLAIRE 4.3.2 *Soit E, un espace de Banach et soit F, un espace vectoriel normé et soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ tel que pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ converge vers une limite notée $f(x)$. Alors l'application f appartient à $\mathcal{L}(E,F)$.*

PREUVE Il est facile de montrer que f est linéaire. Nous remarquons maintenant que pour tout $x \in E$, $\sup\{\|f_n(x)\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini. Donc, en utilisant la contraposée du théorème de Banach-Steinhaus, $k = \sup\{\|f_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini. Pour tout $x \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\| \leq k\|x\|$. En passant à la limite, on obtient, $\|f(x)\| \leq k\|x\|$. Ceci montre que f est lipschitzienne donc continue.
□

4.4 Le théorème de l'application ouverte

THÉORÈME 4.4.1 *Soit E et F, deux espaces de Banach et f, une application linéaire continue de E dans F. f est surjective si et seulement si l'image par f de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

Une application qui transforme un ouvert en un ouvert est appelée une application ouverte d'où le nom donné à ce résultat.

<u>Preuve</u> Il est évident que la linéarité de f associée au fait que f est ouverte implique que f est surjective.

Montrons maintenant la réciproque. Supposons que f est surjective. Vu la linéarité de f, il suffit de montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\delta B_F(0,1) \subset f(B_E(0,1))$ pour montrer que f est ouverte.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $F_n = adh\, f(B_E(0,n))$. Comme f est surjective, $F = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Donc, le théorème de Baire implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{int} F_{n_0}$ est non vide. Donc, il existe $y_0 \in F$ et $r > 0$ tel que $B(y_0, r) \subset F_{n_0}$.

Soit $y \in B_F(0,r)$. D'après ce qui précède, il existe deux suites, (x'_n) et (x''_n) de $B_E(0,n_0)$ telles que $(f(x'_n))$ converge vers y_0 et $(f(x''_n))$ converge vers $y_0 + y$. Donc la suite $(x_n = x'_n - x''_n)$ de $B_E(0,2n_0)$ converge vers y. De ceci, nous déduisons que pour tout $y \in F$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leq \frac{2n_0}{r}\|y\|$ et $\|y - f(x)\| < \varepsilon$.

Soit $\delta = \dfrac{r}{2n_0}$. Nous allons maintenant montrer que $\frac{1}{2}\delta B_F(0,1) \subset f(B_E(0,1))$ ce qui terminera la démonstration. Soit $y \in \frac{1}{2}\delta B_F(0,1)$. D'après ce qui précède, il existe $x_1 \in B_E(0, \frac{1}{2})$ tel que $\|y - f(x_1)\| < \frac{1}{2^2}\delta$. En utilisant la même raisonnement avec $y - f(x_1)$, il existe $x_2 \in B_E(0, \frac{1}{2^2})$ tel que $\|y - f(x_1) - f(x_2)\| < \frac{1}{2^3}\delta$. On construit ainsi par récurrence une suite (x_n) de E telle que pour tout n, $\|x_n\| < \frac{1}{2^n}$ et $\|y - \sum_{i=1}^n f(x_i)\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}\delta$. Comme E est complet, la suite $(s_n = \sum_{i=1}^n x_i)$, qui est de Cauchy, converge vers s et on vérifie que $\|s\| < 1$. De plus, comme f est continue, $f(s) = \lim_{+\infty} f(s_n) = y$. Ceci nous montre que y appartient à $f(B_E(0,1))$. □

Nous allons maintenant donner deux corollaires du théorème précédent. Le premier concerne l'inverse d'une application linéaire continue bijective et le deuxième donne une caractérisation de la continuité des applications linéaires à travers la fermeture du graphe.

<u>Théorème</u> 4.4.2 *(Banach) Soit E et F, deux espaces de Banach et soit f, une application linéaire continue bijective de E dans F. Alors f^{-1} est continue et $\|f^{-1}\| \geq \dfrac{1}{\|f\|}$.*

<u>Preuve</u> D'après le résultat précédent, l'image de tout ouvert de E par f est un ouvert de F, donc l'image réciproque de tout ouvert de E par f^{-1} est un ouvert de F donc f^{-1} est continue. L'inégalité sur la norme provient du fait que pour tout $x \in E$, $\|f^{-1}(f(x))\| = \|x\| \leq \|f^{-1}\|\|f\|\|x\|$.

<u>Corollaire</u> 4.4.1 *Soit E et F, deux espaces de Banach et soit f, une application linéaire de E dans F. Alors f est continue si et seulement si le graphe de f est un fermé de $E \times F$.*

<u>Preuve</u> Si f est continue, il est clair que son graphe est fermé. Montrons maintenant la réciproque. Comme f est linéaire, G, le graphe de f est un sous-espace vectoriel de $E\times F$. Si G est fermé, c'est un espace de Banach car c'est un fermé de l'espace de Banach $E \times F$. La restriction à G de la projection de $E \times F$ sur E, est une application linéaire continue qui est bijective car tout élément x de E a pour unique antécédent l'élément $(x, f(x))$ de G. Donc, d'après le corollaire précédent, l'application linéaire réciproque de E dans G qui à x associe $(x, f(x))$ est continue. Ceci implique clairement que f est continue. □

4.5 Dualité dans les espaces de Banach

4.5.1 Généralités

Le dual d'un espace vectoriel normé est toujours un espace de Banach. Il est souvent utile de chercher à identifier un espace de Banach donné comme le dual d'un autre espace vectoriel normé. Cette démarche est très importante en analyse et notamment pour la théorie des distributions.

PROPOSITION 4.5.1 *Soit E un espace vectoriel normé. Alors, l'application $\langle .,. \rangle : E' \times E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définie par $\langle u, x \rangle = u(x)$ est une forme bilinéaire continue appelé crochet de dualité.*

Dans la suite, nous reprenons les notations de la proposition (3.3.1).

PROPOSITION 4.5.2 *Soient E et F deux espaces de Banach et B une forme bilinéaire continue sur $F \times E$. L'application δ_B qui à $y \in F$ associe l'élément E' définie par $\delta_B(y)(x) = B(y, x)$, est une application linéaire continue de F dans E'.*

PREUVE La linéarité ne pose pas de problème. Comme B est continue, il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$|\delta_B(y)(x)| = |B(y, x)| \leq c\|y\|\|x\|$$

et donc, $\delta_B(y) \in E'$. □

DÉFINITION 4.5.1 Soient E et F deux espaces de Banach et B une forme bilinéaire continue sur $F \times E$. On dit que B identifie E' à F si l'application δ_B définie ci-dessus est un isomorphisme de F sur E'. D'après le théorème (4.4.2), il suffit de vérifier que δ_B est bijective.

Le théorème suivant est une illustration de cette idée. Sa preuve est laissé en exercice.

THÉORÈME 4.5.1 *Soient $p \in [1, +\infty[$, $E = \ell^p$ et $F = \ell^{p'}$ avec $p' = \dfrac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = +\infty$ si $p = 1$. On considère la forme bilinéaire $B : F \times E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définie par $B(y, x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$. Alors B identifie isométriquement $(\ell^p)'$ à $\ell^{p'}$.*

REMARQUES
- Il résulte que les espaces ℓ^p pour $p \in]1, +\infty[$ sont réflexif.
- Le dual de ℓ^1 est un espace isométrique à ℓ^∞ et donc $(\ell^1)'$ et ℓ^∞ ont les mêmes propriétés topologiques. Ceci implique que ℓ^1 et son dual ne sont pas isomorphes, puisque, on sait par exemple, que ℓ^1 est séparable et que ℓ^∞ ne l'est pas. Contrairement au cas de la dimension finie, en général, on ne peut pas identifier un espace vectoriel normé et son dual.

4.5.2 Une définition affaiblie de la convergence dans E'

DÉFINITION 4.5.2 Soit E un espace vectoriel normé et (p_n) une suite d'éléments de E' et $p \in E'$. On dit que la suite (p_n) converge faiblement - étoile vers p et l'on note $p_n \xrightarrow{*} p$ si $\forall x \in E$, $\langle p_n, x \rangle \longrightarrow \langle p, x \rangle$.

<u>REMARQUE</u> La notion de convergence dans E' introduite ci-dessus correspond à une topologie, la topologie faible-*, qui n'est pas métrisable en dimension infinie. Cette notion dépasse largement le cadre de ce cours.

Le théorème de Banach-Steinhaus (4.3.1) s'écrit sous la forme suivante dans le cadre des formes linéaires.

<u>THÉORÈME</u> 4.5.2 *Soient E un espace de Banach et (p_n) une suite de E'. On suppose que $\forall x \in E$, la suite $(\langle p_n, x\rangle)$ est convergente vers $\langle p, x\rangle$. Alors la suite (p_n) est une suite bornée de E', ce qui implique que p est un élément de E'. De plus, on a $\|p\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|p_n\|$.*

<u>PROPOSITION</u> 4.5.3 *Soient E un espace de Banach et (x_n) et (p_n) deux suites de E et E'. Si $p_n \xrightarrow{*} p$ et $\|x_n - x\| \to 0$, alors $\langle p_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle p, x\rangle$.*

<u>PREUVE</u> On a $\langle p_n, x_n\rangle = \langle p_n, x_n - x\rangle + \langle p_n, x\rangle$. Par la convergence faible-*, on a pour tout $x \in E$, $\langle p_n, x\rangle \to \langle p, x\rangle$ et d'après le théorème ci-dessus, on déduit que la suite (p_n) est bornée par un réel noté M. On obtient que $|\langle p_n, x_n - x\rangle| \leq M\|x_n - x\|$. Ainsi, de l'égalité ci-dessus, on déduit le résultat de la proposition. □

<u>THÉORÈME</u> 4.5.3 *Soit E un espace séparable et (p_n) une suite bornée d'éléments de E'. Alors il existe une suite extraite de (p_n) qui converge faiblement-* dans E'.*

<u>REMARQUE</u> En fait, il est toujours vrai que la boule unité fermée du dual d'un espace de Banach E est compacte pour la topologie faible-*, sans hypothèse de séparabilité sur E. Si on ne fait pas l'hypothèse de séparabilité, on ne peut pas affirmer que toute suite bornée du dual de E admet une sous suite qui converge faiblement-*.

<u>PREUVE</u> Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E. Nous allons utiliser le procédé diagonal. La suite $(\langle p_n, x_0\rangle)$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on peut donc extraire une suite $(p_{\varphi_0(n)})$ telle que $\langle p_{\varphi_0(n)}, x_0\rangle$ converge vers un certain α_0. Supposons construites, φ_j, $j = 0, \ldots m$, des fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et des éléments de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ telle que pour $j = 0, \ldots, m$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle p_{\varphi_O\circ\ldots\circ\varphi_j(n)}, x_j\right\rangle = \alpha_j.$$

La suite $\left(\left\langle p_{\varphi_O\circ\ldots\circ\varphi_m(n)}, x_{m+1}\right\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Il existe une fonction φ_{m+1} strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et un élément α_{m+1} telle que

$$\forall j \leq m+1, \quad \lim_{n\to+\infty} \left\langle p_{\varphi_O\circ\ldots\circ\varphi_{m+1}(n)}, x_j\right\rangle = \alpha_j.$$

On pose comme cela est habituel dans le procédé d'extraction diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi(n) = \varphi_0 \circ \ldots \varphi_n(n)$. On vérifie que ψ est strictement croissante. On pose $\hat{p}(x_i) = \alpha_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. On a

$$|\hat{p}(x_i) - \hat{p}(x_j)| \leq M\|x_i - x_j\|,$$

ou M est une borne de la suite $(\|p_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\hat{p}$ est donc une application M-lipschitzienne définie sur l'ensemble $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. D'après la proposition (2.7.4), on peut trouver un prolongement (M-lipschitzien) $p : E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de $\hat{p}$. On a alors :

$$p(x) - p_{\psi(n)}(x) = p(x) - p(x_i) + p(x_i) - \langle p_{\psi(n)}, x_i\rangle + \langle p_{\psi(n)}, x_i - x\rangle.$$

D'où,

$$\left|p(x) - p_{\psi(n)}(x)\right| \leq |\alpha_i - \langle p_{\psi(n)}, x_i\rangle| + 2M\|x - x_i\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $i \in \mathbb{N}$ telle que $\|x - x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$. i étant choisi, comme $\langle p_{\psi(n)}, x_i \rangle \longrightarrow \alpha_i$, $\exists N \in \mathbb{N}$ telle que $\forall n \geq N$, $|\alpha_i - \langle p_{\psi(n)}, x_i \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi,

$$\forall n \geq N, \quad |p_{\psi(n)}(x) - p(x)| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, $\forall x \in E$, $\langle p_{\psi(n)}, x \rangle \to p(x)$, ce qui prouve le résultat du théorème. □

4.5.3 Application linéaire transposée

Cette notion est basée sur la proposition suivante.

<u>Proposition</u> 4.5.4 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire continue de E dans F. Alors l'application ${}^t f$ de F' dans E' définie par*

$$\forall u \in F', \quad \forall x \in E, \quad {}^t f(u)(x) = u(f(x))$$

est une application linéaire continue appelé application linéaire transposée.

<u>Proposition</u> 4.5.5 *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On a ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.*

Les preuves des deux propositions sont laissées en exercice.

4.6 Exercices

<u>Exercice</u> 4.1 Soit E l'espace des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que $f(0)=0$. On pose $N(f)=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)+f'(t)|$.

1 - Montrer que N est une norme et que (E,N) est complet.

2 - Montrer que N est équivalente à N' définie par

$$N'(f)=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|+\sup_{t\in[0,1]}|f'(t)|.$$

<u>Exercice</u> 4.2 Soit E, un espace de Banach et soit C un sous-ensemble non vide de E', le dual topologique de E. On suppose que pour tout $x\in E$, l'ensemble $\{f(x)\mid f\in C\}$ est borné. Montrer qu'alors C est borné.

<u>Exercice</u> 4.3 Soit E et F, deux espaces de Banach et soit f une application linéaire continue et bijective de E dans F. Soit g une application linéaire de E dans F telle que $\|g\|<\|f^{-1}\|^{-1}$. Montrer que $f+g$ est une application linéaire continue et bijective. En déduire que l'ensemble des applications linéaires continue et bijective est un sous-ensemble ouvert de $L(E,F)$, l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

<u>Exercice</u> 4.4 Soient X un espace métrique compact et $E=\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur X muni de la norme de la convergence uniforme. Soient (x_n) une suite d'éléments de X et $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ une série absolument convergente de nombres réels. On considère l'application $\gamma:E\to\mathbb{R}$, $f\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}a_nf(x_n)$. Montrer que γ est une forme linéaire continue sur E de norme $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$.

<u>Exercice</u> 4.5 Soit E et F, deux espaces de Banach, et soit $L(E,F)$, l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble $L_S(E,F)$ des applications linéaires continues surjectives de E dans F est un sous-ensemble ouvert de $L(E,F)$.

1 - Soit $f\in L_S(E,F)$. Montrer qu'il existe un élément $\rho>0$ tel que pour tout $y\in F$, il existe $x\in E$ tel que $\|x\|_E\le\rho\|y\|_F$ et $f(x)=y$.

2 - Soit $r\in]0,\rho^{-1}[$. Soit $h\in L(E,F)$ tel que $\|f-h\|_{L(E,F)}<r$. Soit $\bar{y}\in F$ tel que $\|\bar{y}\|_F\le 1$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F telles que :

a - $y_0=\bar{y}$ et $f(x_0)=y_0$;

b - pour tout $n\in\mathbb{N}$, $y_{n+1}=(f-h)(x_n)$ et $f(x_{n+1})=y_{n+1}$;

c - pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|y_{n+1}\|_F\le(r\rho)^{n+1}$ et $\|x_n\|_E\le\frac{1}{r}(r\rho)^{n+1}$.

3 - Montrer que la série de terme général x_n converge et en déduire qu'il existe un élément $\bar{x}$ de E tel que $h(\bar{x})=\bar{y}$.

4 - Déduire des questions précédentes que $L_S(E,F)$ est un sous-ensemble ouvert de $L(E,F)$.

<u>Exercice</u> 4.6 Soient E, un espace de Banach, F et G, deux sous-espaces vectoriels fermés de E tels que $F+G$ est fermé.

1 - Montrer qu'il existe une constante $c\ge 0$ telle que pour tout $z\in F+G$, il existe $x\in F$ et $y\in G$ vérifiant $z=x+y$, $\|x\|\le c\|z\|$ et $\|y\|\le c\|z\|$. (Indication : on pourra considérer l'application de $F\times G$ dans $F+G$, définie par $(x,y)\to x+y$.)

2 - Montrer alors qu'il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que $d(x, F \cap G) \leq \alpha\Big(d(x,F) + d(x,G)\Big)$ pour tout $x \in E$.

<u>EXERCICE</u> 4.7 Soit E et F, deux espaces de Banach et soit f une application linéaire continue de E dans F. On définit l'adjoint f^* de f comme étant l'application de F' dans E' qui à tout $g \in F'$ associe $f^*(g)$ définie par :

$$\forall x \in E,\ f^*(g)(x) = g(f(x)).$$

1 - Montrer que f^* est une application linéaire continue et que $\|f^*\| = \|f\|$.

2 - Soit $N(f)$ (resp. $N(f^*)$) le noyau de f (resp. f^*) et soit $I(f)$ (resp. $I(f^*)$) l'image de f (resp. f^*). Montrer que :

$N(f) = \{x \in E \mid g(x) = 0, \forall g \in I(f^*)\}$;

$N(f^*) = \{g \in F' \mid g(y) = 0, \forall y \in I(f)\}$;

$\overline{I(f^*)} \subset \{g \in E' \mid g(x) = 0, \forall x \in N(f)\}$;

$\overline{I(f)} = \{y \in F \mid g(y) = 0, \forall g \in N(f^*)\}$.

Indication : on pourra montrer, pour la dernière égalité, que si M est un sous-espace vectoriel fermé et x un vecteur qui n'appartient pas à M alors il existe une forme linéaire continue φ dont le noyau contient M et telle que $\varphi(x) = 1$.

3 - Montrer que si f est surjectif alors f^* est injectif et que si f^* est surjectif alors f est injectif. Montrer que les implications réciproques sont vraies si E ou F est de dimension finie.

4 - Soit $E = F = \ell^2$. Soit f l'application de E dans E définie par :

pour tout $(u_n) \in E$, $f((u_n)) = (\frac{1}{n}u_n)$.

Montrer que $f^* = f$ et que f est injective mais non surjective. Montrer que l'image de f est dense et non fermée dans E.

<u>EXERCICE</u> 4.8 Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L(E,F)$ et $f \in L(E,F)$. Montrer que si pour tout $x \in E$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ alors la limite est uniforme sur tout compact de E. ($\sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ pour tout compact K de E.)

<u>EXERCICE</u> 4.9 Soient E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach et (f_n) une suite bornée de $L(E,F)$. Montrer que

$$E_0 = \{x \in E \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente }\}$$

est un sous espace vectoriel fermé de E.

<u>EXERCICE</u> 4.10 Soit E et F deux espaces métriques compacts et soit H l'ensemble des applications continues et $E \times F$ dans $\mathbb{R}$. On note A le sous-espace vectoriel de H engendré par les applications du type $(x,y) \to f(x)g(y)$ où f (resp. g) est une application continue de E (resp. F) dans $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans H.

<u>EXERCICE</u> 4.11 Soient (Y,d) un espace métrique et X une partie non vide et compacte de Y. Soit $E = C_b(Y)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées de Y dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la

convergence uniforme. Soit $E_0 = C(X)$ muni également de la norme de la convergence uniforme. On considère l'application linéaire $\Phi : E \to E_0$, $\Phi(f) = f_{|X}$ la restriction de f à X.

1 - Montrer que si $f \in E$, alors, il existe un élément $\psi(f) \in E$ tel que $\Phi(f) = \Phi(\psi(f))$ et $\|\psi(f)\| = \|\Phi(f)\|$.

2 - Montrer que $\mathrm{I}m\,\Phi$ est dense dans E_0.

3 - Soit $g \in E_0$, limite uniforme d'une suite $(\Phi(f_n))_n$.

a - Montrer que l'on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\Phi(f_{n+1}) - \Phi(f_n)\| \leq 2^{-n}$.

b - Montrer que la série $\psi(f_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \psi(f_{n+1} - f_n)$ converge dans E. On notera f sa somme.

c - Montrer que $\Phi(f) = g$.

4 - Déduire de ce qui précède que toute fonction de $g \in E_0$ admet un prolongement en une fonction $f \in E$ telle que $\|f\| = \|g\|$.

5 - Soient A une partie non vide de Y et une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, lipschitzienne de rapport k. Soit :

$$\forall y \in Y,\ g(y) = \inf \{f(x) + kd(x,y), x \in A\}.$$

Montrer que g est un prolongement lipschitzien de rapport k de f sur Y.

<u>Exercice</u> 4.12 Soit E et F deux espaces vectoriels normés et soit $L(E,F)$ l'espaces des applications linéaires continues de E dans F. Une application linéaire f de E dans F est compacte si l'image de la boule unité fermée de E par f est relativement compacte dans F. On note $L_0(E,F)$, l'ensemble des applications linéaires compactes.

1 - Montrer que dans la définition précédente, on peut remplacer la boule fermée par la boule ouverte.

2 - Montrer qu'une application linéaire compacte est continue.

3 - Montrer qu'une application linéaire continue est compacte si E est de dimension finie ou si l'image de E par cette application est de dimension finie (dans ce dernier cas, on dit que l'application est de rang finie).

4 - Montrer que $L_0(E,F)$ est un espace vectoriel.

5 - Soit E_1 et F_1 deux espaces vectoriels normés. Soient $g \in L(E_1,E)$, $h \in L(F,F_1)$ et $f \in L_0(E,F)$. Montrer que $h \circ f \circ g$ est compacte.

6 - Soit f une application linéaire compacte de E dans E. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f si il existe un vecteur $x \in E$, $x \neq 0$, tel que $f(x) = \lambda x$. Le sous-espace propre associé à λ, E_λ, est le noyau de $f - \lambda Id$. Montrer que si λ est une valeur propre non-nulle de f, alors E_λ est de dimension finie. Indication : montrer que la boule unité de E_λ est compacte.

7 - Montrer que si E et F sont des espaces de Banach, alors $L_0(E,F)$ est fermé dans $L(E,F)$.

<u>Exercice</u> 4.13 Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$. En quels points de $[0,1]$, la famille $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est elle équicontinue.

<u>Exercice</u> 4.14 Soit X un espace métrique compact et F une famille équicontinue de $C(X)$.

1 - Montrer que le sous ensemble $A = \{x \in X \mid \{f(x), f \in F\} \text{ est borné}\}$ est ouvert et fermé.

2 - On suppose que X est connexe. Montrer que si A n'est pas vide, alors F est une partie relativement compact de $C(X)$.

<u>Exercice</u> 4.15 Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit$F$ un sous espace vectoriel fermé de E tel que toute fonction de F soit de classe C^1.

1 - Montrer que l'application $D : F \to E$, $f \mapsto f'$ (dérivée de f) est continue.

2 - En déduire que la boule unité de F est équicontinue.

3 - Montrer que F est de dimension finie.

<u>Exercice</u> 4.16 Soient X un espace métrique et (f_n) une suite de $C(X)$.

1 - Montrer que si $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue en un point $x \in X$, alors, pour toute suite (x_n) de X qui converge vers x, la suite $(f_n(x) - f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2 - $X = \mathbb{R}$. $f_n(x) = \sin nx$. Montrer que $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est équicontinue en aucun point $x \in \mathbb{R}$. (Considérer $x_n = x + \frac{\pi}{n}$.)

Exercices complémentaires

<u>Exercice</u> 4.17 Soit (X, d), un espace métrique compact. Soit $\mathcal{C}$, l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{L}$, l'ensemble des applications lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$. L'espace $\mathcal{C}$ est muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$.

1 - Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{L}$ est stable pour la multiplication des applications. Montrer que le supremum et l'infimum de deux fonctions de $\mathcal{L}$ sont des éléments de $\mathcal{L}$.

2 - En utilisant un théorème du cours, déduire de la question précédente que $\mathcal{L}$ est dense dans $\mathcal{C}$ pour la norme du supremum.

3 - On considère l'application φ de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\varphi(f) = \inf\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x, y) \in X \times X,\ |f(x) - f(y)| \leq kd(x, y)\}$$

Montrer que pour tout $t \geq 0$, pour tout $(f, g) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$, $\varphi(tf) = t\varphi(f)$ et $\varphi(f + g) \leq \varphi(f) + \varphi(g)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in X \times X$, $|f(x) - f(y)| \leq \varphi(f)d(x, y)$. Montrer, sur un exemple, que φ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}$.

4 - Soit x_0 un élément de X. On définit l'application $\|.\|_{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$\|f\|_{\mathcal{L}} = \varphi(f) + |f(x_0)|$$

Montrer que cette application est une norme sur $\mathcal{L}$.

5 - Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{L}$, $\|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{L}}$. Construire dans le cas où $X = [0, 1]$, une suite de fonctions g^n de $\mathcal{L}$ telle que $(\|g^n\|_\infty)$ est bornée et $\|g^n\|_{\mathcal{L}}$ tend vers $+\infty$. En conclure qu'en général les deux normes ne sont pas équivalentes.

6 - Soit $B_r = \{f \in \mathcal{L} \mid \|f\|_{\mathcal{L}} \leq r\}$ où r est un nombre réel positif. Montrer que B_r est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{C}$ pour la norme du supremum. Déduire d'un théorème du cours que B_r est un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}$.

7 - Soit (f^n) une suite de Cauchy de $\mathcal{L}$ pour la norme $\|.\|_{\mathcal{L}}$. Montrer qu'il existe $r > 0$, tel que pour tout n, $f^n \in B_r$. Montrer que la suite (f^n) est une suite de Cauchy de $\mathcal{C}$ pour la norme du supremum. Déduire de la question précédente que (f^n) converge, pour la norme du supremum, vers une limite notée f qui appartient à B_r. Montrer que (f^n) converge vers f pour la norme $\|.\|_{\mathcal{L}}$. En déduire que $\mathcal{L}$ muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{L}}$ est un espace de Banach.

<u>Exercice</u> 4.18 Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in [0, 1]$,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Montrer que la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers f. Indication : on pourra montrer les identités suivantes :

a - $1 = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}$

b - $x = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} x^k (1 - x)^{n-k}$

c - $\frac{x(1-x)}{n} = \sum_{k=0}^n C_n^k (\frac{k}{n} - x)^2 x^k (1 - x)^{n-k}$.

<u>Exercice</u> 4.19 Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On pose $a_{ni} = \frac{i}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$ et

$$q_{ni}(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - a_{nj}}{a_{ni} - a_{nj}}, \ x \in [0,1],$$

et, pour $f \in E$, on définit le polynôme :

$$P_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a_{ni}) q_{ni}(x).$$

1 - Montrer que $P_n(f)$ est le seul polynôme de degré $\leq n$ tel que $P_n(f)(a_{ni}) = f(a_{ni})$ pour $0 \leq i \leq n$.

2 - Montrer que l'ensemble des $f \in E$ tels que la suite $(P_n(f))_n$ converge vers f dans E est partout dense.

3 - Montrer que les application linéaires $P_n : f \mapsto P_n(f)$ sont continues et que

$$\|P_n\| = \sup\left\{\sum_{i=0}^{n} |q_{ni}(x)|, x \in [0,1]\right\}.$$

4 - Montrer que

$$\left| q_{ni}\left(\frac{1}{2n}\right)\right| \geq \frac{1}{4i} \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1.$$

5 - En déduire que l'ensemble des $f \in E$ tels que la suite $(P_n(f))_n$ converge uniformément est maigre (c'est à dire : contenue dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides.)

<u>Exercice</u> 4.20 (E,d) est un espace métrique complet. $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction semi continue inférieurement et minorée. On se donne $\varepsilon > 0$ et $a \in E$. On définit une suite (x_n) de E comme suit : $x_0 = a$, $E_0 = E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{n+1} = \{z \in E \mid f(z) \leq f(x_n) - \varepsilon d(x_n, z)\},$$

et on choisit $x_{n+1} \in E_{n+1}$ tel que

$$f(x_{n+1}) - \inf\{f(z), z \in E_{n+1}\} \leq \frac{1}{2}\left(f(x_n) - \inf\{f(z), z \in E_{n+1}\}\right).$$

1 - Montrer qu'une telle construction est possible.

2 - Montrer que la suite $(f(x_n))$ est décroissante et que la suite (x_n) est de Cauchy. On note x sa limite.

3 - Montrer que : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \{x\}$.

4 - Montrer que $\forall z \in E,\ f(z) \geq f(x) - \varepsilon d(x,z)$.

5 - Soit une application $\alpha : E \to E$ vérifiant : $\forall z \in E,\ d(z, \alpha(z)) \leq f(z) - f(\alpha(z))$. montrer que α admet un point fixe.

6 - On suppose que E est un convexe fermé d'un espace de Banach. Soit $\alpha : E \to E$ continue vérifiant :

$$\exists k \in]0,1[,\ \forall \lambda \in]0,1],\ \|\alpha(x) - \alpha(x_\lambda)\| \leq k\|x - x_\lambda\|,$$

ou $x_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda\alpha(x)$. Montrer que α admet un point fixe. Indication : considérer $z \mapsto \|z - \alpha(z)\|$ et utiliser le résultat de la question 4.

<u>Exercice</u> 4.21 Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| \mid t \in [0,1]\}$. On se donne une application continue K de $[0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (appelée noyau) et on définit une application f de E dans E par :

$$f(x)(t) = \int_0^1 K(s,t)x(s)ds, \ \forall t \in [0,1].$$

1 - Vérifier que $f(x)$ est continue et que f est linéaire et continue. Donner un majorant de la norme de f.

2 - Montrer que l'ensemble $\{f(x) \mid x \in \bar{B}_E(0,1)\}$ est uniformément équicontinu dans E.

3 - Montrer que l'application f est compacte.

4 - Montrer que si K est un polynôme, alors f est de rang fini.

5 - On rappelle que le sous-espace vectoriel des applications linéaires compactes est fermé dans l'espace des applications linéaires continues lorsque E est un espace de Banach. Trouver une nouvelle preuve du fait que f est une application linéaire compacte en utilisant la question 4 et le théorème de Stone-Weierstrass.

Chapitre 5

Analyse convexe

5.1 Généralités sur les ensembles convexes

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel réel. Pour tout couple d'éléments (x, y) de E, nous notons $[x, y]$, le sous-ensemble de E défini par

$$[x, y] = \{tx + (1 - t)y \mid t \in [0, 1]\}$$

<u>Définition</u> 5.1.1 Un sous-ensemble C de E est convexe si pour tout $(x, y) \in C \times C$, $[x, y]$ est inclus dans C.

<u>Exemples</u> : Pour tout couple d'éléments (x, y) de E, $[x, y]$ est un sous-ensemble convexe de E. Tout sous-espace vectoriel ou affine de E est convexe. Si E est normé, toutes les boules ouvertes ou fermées sont convexes. Tout ensemble de solutions d'un système d'égalités et d'inégalités linéaires est convexes. Si $E = \mathbb{R}$, les sous-ensembles convexes sont les intervalles.

<u>Proposition</u> 5.1.1

- *Soit $(C_i)_{i\in I}$,une famille de sous-ensembles convexes de E. Alors $\cap_{i\in I}C_i$ est convexe ;*
- *Soit $(C_i)_{i\in I}$,une famille de sous-ensembles convexes de E telle que pour tout $(i, j) \in I \times I$, il existe $k \in I$ tel que $C_i \cup C_j \subset C_k$. Alors $\cup_{i\in I}C_i$ est convexe ;*
- *Soit $(C_i)_{i\in I}$, une famille finie de sous-ensembles convexes de E. Alors $\sum_{i\in I} C_i = \{\sum_{i\in I} c_i \mid (c_i) \in \prod_{i\in I} C_i\}$ est convexe ;*
- *Soit C, un sous-ensemble convexe de E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda C = \{\lambda c \mid c \in C\}$ est convexe ;*
- *Soit F, un espace vectoriel réel, soit f, une application affine de E dans F, et soit C, un sous-ensemble convexe de E. Alors $f(C)$ est un sous-ensemble convexe de F ;*
- *Soit F, un espace vectoriel réel, soit f, une application affine de E dans F, et soit C, un sous-ensemble convexe de F. Alors $f^{-1}(C)$ est un sous-ensemble convexe de E ;*
- *Soit $(E_i)_{i\in I}$, une famille finie d'espaces vectoriels réels et soit $(C_i)_{i\in I}$, une famille de sous-ensembles convexes. Alors $\prod_{i\in I} C_i$ est un sous-ensemble convexe de $\prod_{i\in I} E_i$.*

Dans la suite, nous utiliserons souvent comme convexe de référence dans $\mathbb{R}^n$, le simplexe noté S^n qui est défini par :

$$S^n = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}$$

<u>Définition</u> 5.1.2 Soit $(x_1, \ldots, x_n)$, n points de E. Une combinaison convexe de $(x_1, \ldots, x_n)$ est un élément x de E tel qu'il existe $\lambda \in S^n$ vérifiant $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Si (x, y) est un couple d'éléments de E, l'ensemble des combinaisons convexes de x et y est le segment $[x, y]$.

<u>PROPOSITION</u> 5.1.2 *Soit C, un sous-ensemble de E. C est convexe si et seulement si C contient toutes les combinaisons convexes des familles finies d'éléments de C.*

<u>PREUVE</u> Il est évident que si C contient toutes les combinaisons convexes des familles finies d'éléments de C alors C est un sous-ensemble convexe de C.

Réciproquement, nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de la famille. Si la famille a un ou deux éléments, la définition d'un sous-ensemble convexe montre que toute combinaison convexe de cette famille est dans C. Supposons que ceci soit vraie pour toutes les familles ayant au plus n éléments. Soit $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, une famille d'éléments de C. Soit $\lambda \in S_{n+1}$ et soit $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$. Comme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, il existe au moins un λ_i non nul. Posons sans perte de généralité $\lambda_1 \neq 0$. Alors

$$x = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

Par notre hypothèse de récurrence, $x' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_i$ est un élément de C car c'est une combinaison convexe d'une famille de n éléments de C. De plus, comme $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) + \lambda_{n+1} = 1$, x est la combinaison convexe de x' et x_{n+1}. Donc $x \in C$ ce qui termine la preuve. $\square$

<u>DÉFINITION</u> 5.1.3 Soit A, un sous-ensemble de E. L'enveloppe convexe de A, notée $co(A)$, est l'intersection de tous les convexes de E contenant A.

Comme E est convexe si A est non vide, $co(A)$ est aussi non vide. Comme les sous-ensembles convexes sont stables par intersection, $co(A)$ est le plus petit ensemble convexe contenant A pour l'intersection.

<u>PROPOSITION</u> 5.1.3 *Soit A, un sous-ensemble de E. $co(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des familles finies d'éléments de A.*

<u>PREUVE</u> On note B, l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des familles finies d'éléments de A. $B \subset co(A)$ car $co(A)$ est un sous-ensemble convexe de E contenant A qui, d'après la proposition précédente, contient toutes les combinaisons convexes des familles finies d'éléments de $co(A)$.

Montrons que $co(A) \subset B$. Il est clair que $A \subset B$. Donc, pour démontrer cette inclusion, il suffit de montrer que B est convexe d'après la définition de $co(A)$. Soit x et y, deux éléments de B et $t \in [0, 1]$. Il existe donc deux familles $(x_1 \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ d'éléments de A, $\lambda \in S^n$ et $\mu \in S^p$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et $y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j$. Donc

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{n} t\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{p} (1-t)\mu_j y_j$$

Donc $tx + (1-t)y$ est une combinaison convexe de la famille $(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_p)$ car

$$\sum_{i=1}^{n} t\lambda_i + \sum_{j=1}^{p} (1-t)\mu_j = t + (1-t) = 1$$

et donc, $(t\lambda_1, \ldots, t\lambda_n, (1-t)\mu_1 \ldots, (1-t)\mu_p)$ appartient à S^{n+p}. □

On appelle polytope, l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Par exemple, le simplexe de $\mathbb{R}^n$ est le polytope engendré par les éléments de la base canonique.

<u>Théorème</u> 5.1.1 *(Carathéodory) Soit A, une partie non vide d'un espace vectoriel de dimension n. Alors $\mathrm{co}(A)$ est l'ensemble des enveloppes convexes des familles de A contenant au plus $n+1$ éléments.*

<u>Preuve</u> Pour démontrer ce résultat, il suffit de montrer qu'une combinaison convexe d'une famille contenant $p > n+1$ éléments est aussi combinaison convexe d'une famille d'au plus $p-1$ éléments. Soit $p > n+1$, soit $(x_1, \ldots, x_p) \in A^p$, soit $\lambda \in S^p$ et soit $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$. Comme $p > n+1$, les vecteurs $(x_2 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$ sont liés dans E. Il existe un vecteur non nul $(\mu_2, \ldots, \mu_p)$ tel que $\sum_{i=2}^p \mu_i (x_i - x_1) = 0$. Posons $\mu_1 = -\sum_{i=2}^p \mu_i$. Le vecteur μ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$ dont la somme des composantes est égales à 0 et de plus, $\sum_{i=1}^p \mu_i x_i = 0$. L'ensemble $I_+ = \{i \in \{1, \ldots, p\} \mid \mu_i > 0\}$ est donc non vide. Soit

$$t = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \mid i \in I_+ \right\}$$

et soit i_0 tel que $t = \dfrac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}$. Posons maintenant $\beta_i = \lambda_i - t\mu_i$ pour tout i. Il est clair que la définition de t implique que le vecteur β a toutes ses composantes positives et $\beta_{i_0} = 0$. Comme $\sum_{i=1}^p \mu_i = 0$, $\sum_{i \neq i_0} \beta_i = 1$. De plus, comme $\sum_{i=1}^p \mu_i x_i = 0$,

$$x = \sum_{i=1}^p \beta_i x_i = \sum_{i \neq i_0} \beta_i x_i$$

Donc x est la combinaison convexe d'une famille contenant $p-1$ éléments. Ceci termine notre démonstration. □

<u>Définition</u> 5.1.4 Un sous-ensemble K de E est un cône (pointé de sommet 0) si pour tout $x \in K$ et pour tout $t \geq 0$, tx appartient à K.

<u>Proposition</u> 5.1.4 *Un cône K est convexe si et seulement si il est stable par addition.*

<u>Preuve</u> Soit K, un cône convexe. Soit x et y deux éléments de K. Alors $\frac{1}{2}(x+y)$ appartient à K car celui-ci est convexe et $x + y = 2\frac{1}{2}(x+y)$ appartient à K car c'est un cône. Donc K est stable par addition.

Soit K, un cône stable par addition et soit x et y deux éléments de K. Pour tout $t \in [0,1]$, tx et $(1-t)y$ sont des éléments de K car c'est un cône. Comme K est stable par addition, $tx + (1-t)y$ appartient à K et donc K est convexe. □

<u>Exemples</u> : tout sous-espace vectoriel de E est un cône convexe. Tout ensemble de solutions d'un système d'équations et d'inéquations linéaires homogènes est un cône convexe. Tout image ou image réciproque d'un cône convexe par une application linéaire est un cône convexe.

<u>Définition</u> 5.1.5 Soit A, un sous-ensemble de E. L'enveloppe conique de A, notée $cone(A)$ est le plus petit cône convexe contenant A.

Il est facile de voir que toute intersection de cônes convexes est aussi un cône convexe. Par conséquent, $cone(A)$ est l'intersection de tous les cônes convexes contenant A. Il est aussi facile de montrer que $cone(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs ou nuls d'éléments de A.

Nous énonçons maintenant un résultat qui est l'équivalent du théorème de Carathéodory pour les enveloppes coniques. Nous laissons la démonstration au lecteur car elle est presque identique à celle donnée pour l'enveloppe convexe et même plus simple.

<u>Théorème</u> 5.1.2 *Soit A, une partie non vide d'un espace vectoriel de dimension n. Alors pour tout $y \in cone(A) \setminus \{0\}$, il existe une famille libre $(a_1, \dots, a_p)$ d'éléments de A et un élément $\lambda \in \mathbb{R}^p_+$ tels que $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$.*

<u>Définition</u> 5.1.6 Un sous-ensemble A de E est un sous-espace affine si pour tout $(x, y) \in A \times A$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $tx + (1-t)y$ appartient à A.

Tout sous-espace affine de E est convexe. Tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace affine.

<u>Proposition</u> 5.1.5 *Un sous-ensemble A de E est un sous-espace affine de E si et seulement si pour toute famille finie $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de A et pour tout $(t_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ tel que $\sum_{i\in I} t_i = 1$, $\sum_{i\in I} t_i x_i$ est un élément de A.*

La preuve est laissée au lecteur.

<u>Proposition</u> 5.1.6 *Soit A, un sous-espace affine de E. Alors, il existe un unique sous-espace vectoriel F de E, appelé direction de A, tel que pour tout $a \in A$, $A = \{a\} + F$.*

<u>Définition</u> 5.1.7 Soit B, un sous-ensemble de E. Le sous-espace affine engendré par B, noté $\mathrm{A}ff(B)$, est le plus petit sous-espace affine contenant B.

On montre facilement que $\mathrm{A}ff(B)$ est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant B. On a aussi :

$$\mathrm{A}ff(B) = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \mid I \text{ fini}, \ \sum_{i\in I} \lambda_i = 1, \ x_i \in B, \ \forall\, i \in I \right\}$$

La direction de $\mathrm{A}ff(B)$ est le sous-espace vectoriel engendré par $B - \{b\}$ pour tout $b \in B$.

5.2 Propriétés topologiques des convexes

<u>Théorème</u> 5.2.1 *Soit E, un espace vectoriel normé. Soit C, un sous-ensemble convexe de E. Pour tout $x \in \operatorname{int} C$ et pour tout $y \in \operatorname{adh} C$, l'ensemble $[x, y[$ est inclus dans l'intérieur de C.*

<u>Preuve</u> Soit $x \in \operatorname{int} C$, $y \in \operatorname{adh} C$ et $t \in]0, 1[$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset C$. Il existe $z \in C$ tel que $\|z - y\| < \frac{tr}{1-t}$. Soit $D = B(tx + (1-t)z, tr)$. Pour montrer que $tx + (1-t)y$ appartient à $\operatorname{int} C$, nous allons prouver que $D \subset C$ et $tx + (1-t)y$ appartient à D.

Soit $u \in E$ tel que $\|u - tx - (1-t)z\| < tr$. Donc, $\|\frac{1}{t}u - \frac{1-t}{t}z - x\| < r$. Ceci est équivalent à $v = \frac{1}{t}u - \frac{1-t}{t}z$ appartient à $B(x, r)$. Donc v appartient à C. Comme $u = tv + (1-t)z$, u appartient à C comme combinaison convexe de v et z. Ceci montre que D est inclus dans C.

Finalement, $\|tx + (1-t)y - (tx + (1-t)z)\| = (1-t)\|y - z\| < (1-t)\frac{tr}{1-t} = tr$. Donc $tx + (1-t)y$ appartient à D. □

Proposition 5.2.1 *Soit C, un sous-ensemble convexe de E. Alors,* $\mathrm{int}\, C$ *et* $\mathrm{a}dh\, C$ *sont convexes. De plus, si* $\mathrm{int}\, C \neq \emptyset$*, alors* $\mathrm{int}(\mathrm{a}dh\, C) = \mathrm{int}\, C$ *et* $\mathrm{a}dh(\mathrm{int}\, C) = \mathrm{a}dh\, C$*.*

Preuve Soit x et y, deux éléments de $\mathrm{int}\, C$. Comme $y \in \mathrm{int}\, C \subset \mathrm{a}dh\, C$, le théorème précédent implique que $[x, y[\subset \mathrm{int}\, C$. De plus $y \in \mathrm{int}\, C$ donc $[x, y] \subset \mathrm{int}\, C$. Donc $\mathrm{int}\, C$ est convexe.

Soit x et y, deux éléments de $\mathrm{a}dh\, C$. Il existe donc deux suites (x_n) et (y_n) de C qui convergent respectivement vers x et y. Pour tout $t \in [0, 1]$, $tx_n + (1-t)y_n$ appartient à C car C est convexe et la suite $(tx_n + (1-t)y_n)$ converge vers $tx + (1-t)y$. Donc $tx + (1-t)y$ appartient à $\mathrm{a}dh\, C$ ce qui montre que $\mathrm{a}dh\, C$ est convexe.

Supposons maintenant que $\mathrm{int}\, C$ est non vide. Il est clair que $\mathrm{int}\, C \subset \mathrm{a}dh\, C$. Donc, $\mathrm{int}\, C \subset \mathrm{int}(\mathrm{a}dh\, C)$. Soit $y \in \mathrm{int}(\mathrm{a}dh\, C)$. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset \mathrm{a}dh\, C$. Comme $\mathrm{int}\, C$ est non vide, nous pouvons choisir $x \in \mathrm{int}\, C$. Il existe $\lambda > 0$ assez petit, $z = y + \lambda(x - y)$ appartient à $B(y, r)$. Le théorème précédent implique donc que $[x, z[$ est inclus dans $\mathrm{int}\, C$. Or $y = \frac{\lambda}{1+\lambda}x + \frac{1}{1+\lambda}z \in [x, z[$. Donc, y appartient à $\mathrm{int}\, C$ ce qui montre que $\mathrm{int}\, C = \mathrm{int}(\mathrm{a}dh\, C)$.

Comme $\mathrm{int}\, C \subset C$, $\mathrm{a}dh(\mathrm{int}\, C) \subset \mathrm{a}dh\, C$. Soit $y \in \mathrm{a}dh\, C$. Comme $\mathrm{int}\, C$ est non vide, nous pouvons choisir $x \in \mathrm{int}\, C$. D'après le théorème précédent, $[x, y[$ est inclus dans $\mathrm{int}\, C$. De façon évidente, $y \in \mathrm{a}dh[x, y[\subset \mathrm{a}dh(\mathrm{int}\, C)$. Ceci montre que $\mathrm{a}dh(\mathrm{int}\, C) = \mathrm{a}dh\, C$. □

Remarque : Si l'intérieur de C est vide, les propriétés énoncées ne sont plus vrai. Par exemple, si C est un singleton, son intérieur est vide et donc aussi l'adhérence de son intérieur mais l'adhérence de C est égale à C et est non vide. Si $E = \ell_1$, l'espace vectoriel des séries absolument convergente. Prenons C égal au sous-espace vectoriel engendré par les séries dont tous les termes sont nuls sauf un qui est égal à 1. Il est clair que l'intérieur de C est vide car C est différent de ℓ_1 et l'adhérence de C est ℓ_1. Donc l'intérieur de l'adhérence de C est ℓ_1 qui n'est pas égal à l'intérieur de C.

Nous allons maintenant affiner les résultats ci-dessus lorsque l'espace E est de dimension finie. Nous supposons dans les résultats suivants que E est de dimension finie.

Définition 5.2.1 Soit C, un sous-ensemble convexe de E. L'intérieur relatif de C, noté $\mathrm{i}r(C)$, est son intérieur pour la topologie induite sur $\mathrm{A}ff(C)$.

Théorème 5.2.2 *Soit C, un sous-ensemble convexe non vide de E, alors* $\mathrm{i}r(C)$ *est non vide.*

Preuve Par une translation, on peut supposer que $0 \in C$. Alors $\mathrm{A}ff(C)$ est un sous-espace vectoriel de C. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$, une base de $\mathrm{A}ff(C)$ formée d'éléments de C. Une telle base existe car $\mathrm{A}ff(C)$ est engendré par les éléments de C.

On considère l'application linéaire Φ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathrm{A}ff(C)$ qui a tout élément λ de $\mathbb{R}^p$ fait correspondre $\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$. Φ est un isomorphisme linéaire donc bicontinue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathrm{A}ff(C)$. Soit

$$\Omega = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^p \mid \forall i,\ \lambda_i > 0,\ \text{et}\ \sum_{i=1}^p \lambda_i < 1 \right\}.$$

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et donc $\Phi(\Omega)$ est un ouvert de $\mathrm{A}ff(C)$. Or $\Phi(\Omega)$ est inclus dans C. En effet, soit $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$ avec $\lambda \in \Omega$. On remarque que $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + (1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i)0$ et donc u est une combinaison convexe d'éléments de C donc appartient à C. Ceci termine la démonstration car $\Phi(\Omega)$ est non vide et inclus dans l'intérieur relatif de C. □

En adaptant la démonstration du théorème (5.2.1), on démontre le résultat suivant.

Théorème 5.2.3 *Soit C, un sous-ensemble convexe de E. Pour tout $x \in$* $\mathrm{i}r(C)$ *et pour tout $y \in$* $\mathrm{a}dh\, C$*, l'ensemble $[x, y[$ est inclus dans l'intérieur relatif de C.*

Corollaire 5.2.1 *Soit C, un sous-ensemble convexe non vide de E, alors $\mathrm{ir}(\mathrm{a}dh(C)) = \mathrm{ir}(C)$ et $\mathrm{a}dh(\mathrm{ir}(C)) = \mathrm{a}dh(C)$.*

Preuve La démonstration est identique à celle de la proposition 5.2.1 après avoir remarqué que $\mathrm{A}ff(C) = \mathrm{A}ff(\mathrm{a}dh(C))$. En effet, $\mathrm{A}ff(C)$ est fermé car E est de dimension finie. Comme $C \subset \mathrm{A}ff(C)$, $\mathrm{a}dh(C) \subset \mathrm{A}ff(C)$. Donc $\mathrm{A}ff(\mathrm{a}dh(C)) \subset \mathrm{A}ff(C)$. L'autre inclusion est une conséquence directe du fait que $C \subset \mathrm{a}dh(C)$. □

Théorème 5.2.4 *Soit C, un sous-ensemble convexe de E, espace vectoriel de dimension finie. Alors, $x \in \mathrm{int}(C)$ si et seulement si pour tout $u \in E$, il existe $r_u > 0$ tel que $x + r_u u$ appartient à C.*

Preuve Si $x \in \mathrm{int}(C)$, il est évident que la propriété est satisfaite. Montrons maintenant l'implication inverse.

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$, une base de E. Posons, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $v_i = -u_i$. Par hypothèse, pour tout i, il existe $r_i > 0$ et $r_i' > 0$ tels que $x + r_i u_i \in C$ et $x + r_i' v_i \in C$. Soit r égal au minimum des r_{u_i} et des r_{v_i}. Soit Φ, l'isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans E défini par

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

Soit $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |\lambda_i| < r\}$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et donc $\Phi(\Omega)$ est un ouvert de E. Nous allons maintenant montrer que $\{x\} + \Phi(\Omega)$ est inclus dans C. Soit $\lambda \in \Omega$. Soit $I_+ = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \lambda_i \geq 0\}$ et $I_- = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \lambda_i < 0\}$.

$$\begin{aligned} x + \Phi(\lambda) &= x + \textstyle\sum_{i \in I_+} |\lambda_i| u_i + \sum_{i \in I_-} |\lambda_i| v_i \\ &= \frac{1}{r}(r - \textstyle\sum_{i=1}^n |\lambda_i|)x + \sum_{i \in I_+} \frac{1}{r}|\lambda_i|(x + r u_i) + \sum_{i \in I_-} \frac{1}{r}|\lambda_i|(x + r v_i) \end{aligned}$$

Donc, $x + \Phi(\lambda)$ est une combinaison convexe d'éléments de C, donc il appartient à C. Comme $x \in \{x\} + \Phi(\Omega) \subset \mathrm{int}(C)$, ceci montre que x appartient à l'intérieur de C. □

Remarque : La propriété précédente n'est pas vraie en dimension quelconque. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt$. Soit

$$C = \{x \in E \mid \sup\{x(t) \mid t \in [0,1]\} < 1\}$$

Il est facile de voir que C est convexe et que 0 vérifie la propriété du théorème. Cependant, 0 n'est pas dans l'intérieur de C. En effet, les fonctions x_n définies par

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

convergent vers la fonction nulle et n'appartiennent pas C.

Nous allons donner maintenant une dernière propriété spécifique de la dimension finie concernant l'enveloppe convexe.

Proposition 5.2.2 *Soit K, un sous-ensemble compact de E. Alors, $\mathrm{co}(K)$ est compacte.*

Preuve Le théorème de Carathéodory implique que

$$co(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \mid (\lambda_i) \in S^{n+1}, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in K^{n+1} \right\}$$

Donc $co(K)$ est l'image du compact $S^{n+1} \times K^{n+1}$ par l'application continue qui à $(\lambda, x_1, \dots, x_{n+1})$ associe $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$. Donc $co(K)$ est compact. □

Nous revenons maintenant au cas général, c'est-à-dire que nous ne supposons plus que E est de dimension finie. Nous allons nous intéresser à quelques propriétés de l'enveloppe convexe.

PROPOSITION 5.2.3 *Soit A, un sous-ensemble de E. Alors* $\mathrm{adh}(\mathrm{co}(A))$ *est le plus petit convexe fermé contenant A.* $\mathrm{adh}(cone(A))$ *est le plus petit cône convexe fermé contenant A.*

PREUVE Il est clair que $adh(co(A))$ est un convexe fermé contenant A. Soit C, un convexe fermé contenant A. Alors, $co(A) \subset C$ et comme C est fermé, $adh(co(A)) \subset C$. Donc $adh(co(A))$ est le plus petit convexe fermé contenant A. La preuve est la même pour $adh(cone(A))$. □

On peut aussi remarquer que $adh(co(A))$ est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes fermés contenant A.

PROPOSITION 5.2.4 *Tout polytope est compact.*

PREUVE Soit $(x_1, \dots, x_n)$, n points de E. $co(x_1, \dots, x_n)$ est l'image du compact S^n par l'application linéaire continue (car d'espace de départ de dimension finie) qui à $\lambda \in \mathbb{R}^n$ associe $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Donc $co(x_1, \dots, x_n)$ est compact. □

PROPOSITION 5.2.5 *Si E est un espace de Banach et si K est compact alors* $\mathrm{adh}(\mathrm{co}(K))$ *est compact.*

PREUVE Il est clair que $adh(co(K))$ est un fermé d'un espace de Banach, donc il est complet. Pour montrer que c'est un compact, d'après la proposition (2.7.3), il suffit de montrer qu'il est pré-compact. Soit $r > 0$. Comme K est compact, il existe $(x_1, \dots, x_n)$ appartenant à K^n tels que $K \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{r}{3})$. D'après la proposition précédente, $co(x_1, \dots, x_n)$ est compact, donc il existe $(y_1, \dots, y_m)$ appartenant à $co(x_1, \dots, x_n)$ tels que $co(x_1, \dots, x_n) \subset \cup_{j=1}^{m} B(y_j, \frac{r}{3})$.

Nous allons montrer que $adh(co(K)) \subset \cup_{j=1}^{m} B(y_j, r)$. Pour cela, il suffit de montrer que $co(K)$ est inclus dans $\cup_{j=1}^{m} B(y_j, \frac{2r}{3})$. Soit $x \in co(K)$. Il existe $(z_1, \dots, z_p)$ appartenant à K^p et $\lambda \in S^p$ tels que $x = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha z_\alpha$. Comme z_α appartient à K, il existe $i_\alpha \in \{1, \dots, n\}$ et $u_\alpha \in E$ tels que $\|u_\alpha\| < \frac{r}{3}$ et $z_\alpha = x_{i_\alpha} + u_\alpha$. Donc, $x = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha x_{i_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha u_\alpha$. Comme $\sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha x_{i_\alpha}$ appartient à $co(x_1, \dots, x_n)$, il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ et $v \in E$ tels que $\|v\| < \frac{r}{3}$ et $\sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha x_{i_\alpha} = y_j + v$. Donc $x = y_j + v + \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha u_\alpha$. Comme $\sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha u_\alpha$ est une combinaison convexe de vecteurs de norme strictement inférieure à $\frac{r}{3}$, c'est un vecteur de norme strictement inférieure à $\frac{r}{3}$. Donc $\|x - y_j\|$ est strictement inférieure à $\frac{2r}{3}$ ce qui termine notre démonstration. □

REMARQUE : L'exemple suivant montre que dans un espace de Banach, l'enveloppe convexe d'un compact peut ne pas être fermée. Soit $E = \ell^1$. Soit $(u_n) \in \ell^1$ à termes strictement positifs. L'ensemble $K = \{0, (u_n e_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ est un compact de E. (e_n est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ème qui est égal à 1). Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $v^n = (0, \frac{1}{2}u_1, \dots, \frac{1}{2^n}u_n, 0, \dots)$ est un élément de $co(K)$. Mais cette suite tend dans ℓ^1 vers la suite $w = (0, \frac{1}{2}u_1, \dots, \frac{1}{2^n}u_n, \dots)$ qui n'est pas dans $co(K)$. Donc $co(K)$ n'est pas fermé.

Dans tous les cas, si A est ouvert alors $co(A)$ est ouvert. Même en dimension finie, A fermé n'implique pas que $co(A)$ soit fermé (voir figure 5.1) comme pour le sous ensemble A de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y \geq \frac{1}{x}\right\} \bigcup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ et } y \geq -\frac{1}{x}\right\}.$$

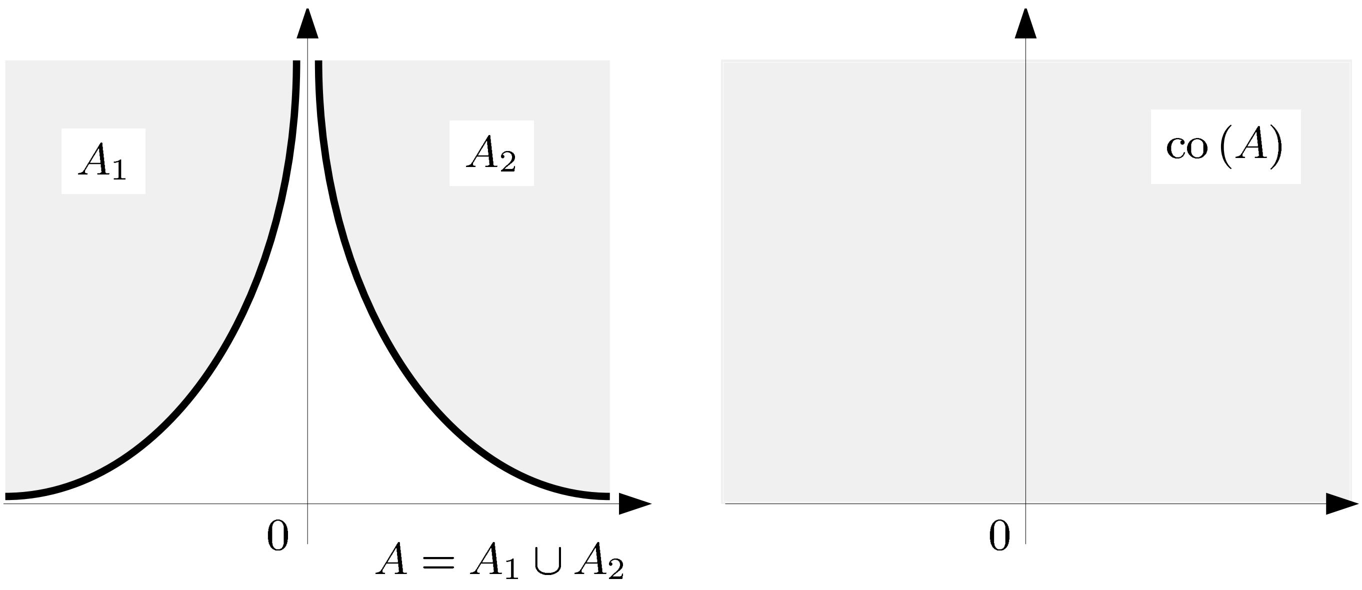

FIG. 5.1 – A est fermé tandis que $\mathrm{co}\, A$ est ouvert

Nous finissons cette partie par un résultat sur les cônes finiment générés.

<u>DÉFINITION</u> 5.2.2 Soit E, un espace vectoriel réel et soit C, un cône de E. C est finiment généré s'il existe une famille finie $(a_1, \dots, a_p)$ d'éléments de E telle que

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \middle| \ \lambda \in \mathbb{R}_+^p \right\}$$

En fait, un cône finiment généré est l'enveloppe conique d'une famille finie d'éléments de E.

<u>PROPOSITION</u> 5.2.6 *Soit E, un espace vectoriel normé réel et soit C, un cône finiment généré de E, alors C est fermé.*

<u>PREUVE</u> Soit $(a_1, \dots, a_p)$ une famille d'éléments de E telle que

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \middle| \ \lambda \in \mathbb{R}_+^p \right\}$$

Soit P, l'ensemble des parties non vides I de $\{1, \dots, p\}$ telles que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est libre. D'après le théorème (5.1.2),

$$C = \bigcup_{I \in P} \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^I \right\}$$

Comme P est fini, il suffit de montrer que pour tout $I \in P$, $C_I = \{\sum_{i \in I} \lambda_i a_i \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^I\}$ est fermé. Soit φ, l'application de $\mathbb{R}^I$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}((a_i)_{i \in I})$ engendré par la famille $(a_i)_{i \in I}$ définie par $\varphi(\lambda) = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$. Comme la famille $(a_i)_{i \in I}$ est libre, φ est une bijection linéaire donc bicontinue de $\mathbb{R}^I$ dans $\mathcal{L}((a_i)_{i \in I})$. C_I est l'image par φ du fermé $\mathbb{R}_+^I$, donc C_I est un fermé de $\mathcal{L}((a_i)_{i \in I})$. Comme cette espace est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, il est fermé et donc C_I est un fermé de E. $\square$

5.3 Fonctions convexes

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel et f est une application de E dans $]-\infty,+\infty]$ lorsque nous considérerons des applications convexes ou dans $[-\infty,+\infty[$ pour les applications concaves. Nous adoptons les règles de calcul suivantes :

$$\begin{cases} 0\times+\infty & =0 \\ t\times+\infty & =+\infty \quad \text{si } t>0 \\ 0\times-\infty & =0 \\ t\times-\infty & =-\infty \quad \text{si } t>0 \end{cases}$$

<u>Définition</u> 5.3.1 L'application est convexe (resp. concave) si pour tout $(x,y)\in E\times E$ et pour tout $t\in[0,1]$, $f(tx+(1-t)y)\leq$ (resp. $\geq$) $tf(x)+(1-t)f(y)$.

Une fonction f est convexe si et seulement si $-f$ est concave. Donc, les résultats obtenus pour les fonctions convexes se transposent aisément aux fonctions concaves.

<u>Définition</u> 5.3.2 Le domaine de f, noté d$om(f)$, est l'ensemble des éléments de E qui ont une image finie par f, c'est-à-dire d$om(f)=\{x\in E\mid f(x)\in\mathbb{R}\}$.

<u>Proposition</u> 5.3.1 *Si f est convexe ou concave,* d$om(f)$ *est un sous-ensemble convexe de E.*

<u>Définition</u> 5.3.3 Une fonction convexe ou concave est dite propre si son domaine n'est pas vide.

Cette terminologie est très mauvaise car l'adjectif propre est employé dans différents sens et le contexte n'indique pas clairement lequel il faut comprendre.

<u>Définition</u> 5.3.4 L'épigraphe (resp. hypographe) d'une fonction est l'ensemble noté e$pi(f)$ (resp. h$ypo(f)$) et défini par

$$\text{e}pi \text{ (resp. h}ypo)(f)=\{(x,t)\in E\times\mathbb{R}\mid t\geq \text{ (resp. } \leq)f(x)\}.$$

<u>Théorème</u> 5.3.1 *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

($\imath$) *f est convexe (resp. concave) ;*

($\imath\imath$) *Pour tout $n\geq 2$, $(x_i)\in E^n$ et $\lambda\in S^n$, $f(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)\leq$ (resp. $\geq$) $\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)$;*

($\imath\imath\imath$) *L'épigraphe (resp. l'hypographe) de f est un sous-ensemble convexe de $E\times\mathbb{R}$.*

<u>Preuve</u> Nous ferons la démonstration uniquement dans le cas convexe. Il est évident que ($\imath\imath$) implique ($\imath$). Montrons maintenant que ($\imath$) implique ($\imath\imath\imath$). Soit (x,λ) et (y,μ) deux éléments de e$pi(f)$ et soit $t\in[0,1]$. Donc $f(x)\leq\lambda$ et $f(y)\leq\mu$. Comme f est convexe, $f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)$. Donc, $f(tx+(1-t)y)\leq t\lambda+(1-t)\mu$. Ceci est équivalent à $t(x,\lambda)+(1-t)(y,\mu)=(tx+(1-t)y,t\lambda+(1-t)\mu)$ appartient à l'épigraphe de f. Donc cet ensemble est convexe.

Nous finissons la démonstration en montrant que ($\imath\imath\imath$) implique ($\imath\imath$). Soit $n\geq 2$, $(x_i)\in E^n$ et $\lambda\in S^n$. Si pour un élément $i\in\{1,\ldots,n\}$, $f(x_i)=+\infty$ et $\lambda_i>0$, le résultat est évident car le membre de droite de l'inégalité est $+\infty$. Si pour certains i, $\lambda_i=0$, ils peuvent être enlevés car, vu les conventions adoptées, ils n'interviennent dans aucun des deux membres de l'inégalité. Donc nous considérons seulement le cas où pour tout i, $f(x_i)$ est fini. Alors, $(x_i,f(x_i))$ est un élément de l'épigraphe de f et comme celui-ci est convexe, $\sum_{i=1}^n\lambda_i(x_i,f(x_i))=(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i,\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i))$ est un élément de e$pi(f)$. Donc par définition de l'épigraphe, $f(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)\leq\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)$. □

<u>Exemples</u> : Toute fonction affine est à la fois convexe et concave. On montre aisément que toute fonction convexe et concave est affine. Une norme est une fonction convexe. Soit C, un sous-espace de E, et soit 1_C, l'application de E dans $]-\infty,+\infty]$, qui à x associe 1 si x appartient à C et $+\infty$ sinon. Cette fonction est convexe si et seulement si C est un sous-ensemble convexe de E.

Nous allons maintenant présenter une fonction convexe associée à un ensemble convexe qui est appelée la jauge.

<u>Définition</u> 5.3.5 Soit C, un sous-ensemble de E contenant l'origine. La jauge de C notée j_C est définie par :

$$j_C(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda C\}$$

<u>Proposition</u> 5.3.2 *La fonction j_C vérifie :*

($\imath$) *pour tout $(x,y) \in E \times E$, $j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$;*

($\imath\imath$) *pour tout $x \in E$ et pour tout $t \geq 0$, $j_C(tx) = tj_C(x)$;*

($\imath\imath\imath$) *pour tout $x \in E$, si $x \in$ (resp. $\notin$)C, alors $j_C(x) \leq$ (resp. $\geq$)1 ;*

($\imath v$) *Si $0 \in \operatorname{int} C$, alors $j_C(x)$ est finie pour tout $x \in E$.*

En particulier, j_C est une application convexe.

<u>Preuve</u> ($\imath$) est évidemment vrai si $j_C(x)$ ou $j_C(y)$ est égal à $+\infty$. Nous considérons donc le cas où $j_C(x)$ et $j_C(y)$ sont finis. Soit $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ tels que $x \in \lambda C$ et $y \in \mu C$. Il existe x' et y', éléments de E, tels que $x = \lambda x'$ et $y = \mu y'$. Nous avons

$$x + y = \lambda x' + \mu y' = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x' + \frac{\mu}{\lambda+\mu}y'\right)$$

donc $x+y$ appartient à $(\lambda+\mu)C$ car $\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x' + \frac{\mu}{\lambda+\mu}y'\right)$ est un élément de C comme combinaison convexe de deux éléments de C.

Nous déduisons de cela que pour tout $\lambda \in \{\lambda' > 0 \mid x \in \lambda' C\}$ et pour tout $\mu \in \{\mu' > 0 \mid x \in \mu' C\}$, $j_C(x+y) \leq \lambda + \mu$. Donc, en considérant les infima, $j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$.

Montrons maintenant la propriété ($\imath\imath$). Soit $x \in E$ et $t \geq 0$. Si $t = 0$, $j_C(tx) = j_C(0) = 0$ car $0 \in C$ et donc pour tout $\lambda > 0$, $0 \in \lambda C$. En conséquence, l'inégalité est satisfaite vu les règles de calcul. Si $t > 0$, soit $\lambda \in \{\lambda' > 0 \mid tx \in \lambda' C\}$. Alors, $x \in \frac{\lambda}{t}C$ et donc $\frac{\lambda}{t} \geq j_C(x)$. En passant à l'infimum sur λ et en multipliant par t, on obtient $j_C(tx) \geq tj_C(x)$. Finalement, $j_C(x) = j_C(\frac{1}{t}tx) \geq \frac{1}{t}j_C(tx)$, donc $j_C(tx) \leq tj_C(x)$ ce qui implique l'égalité.

($\imath\imath\imath$) D'après la définition de j_C, il est clair que si $x \in C$, alors $j_C(x) \leq 1$. Si $x \notin C$, raisonnons par l'absurde et supposons que $j_C(x) < 1$. Alors, il existe $\lambda < 1$ et $c \in C$ tel que $x = \lambda c$. Donc $x = (1-\lambda)0 + \lambda c$. Comme $0 \in C$, ceci implique que $x \in C$ ce qui est contradictoire.

($\imath v$) Il suffit de remarquer que si $0 \in \operatorname{int} C$, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset C$ et donc $j_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$.
□

<u>Proposition</u> 5.3.3

($\imath$) *Une somme finie de fonctions convexes (resp. concaves) est convexe (resp. concave) ;*

($\imath\imath$) *Si f est convexe (resp. concave) et $\lambda > 0$, λf est convexe (resp. concave) ;*

($\imath\imath\imath$) *Le supremum (resp. infimum) d'une famille quelconque de fonctions convexes (resp. concaves) est convexe (resp. concave) ;*

(iv) si f est une fonction convexe (resp. concave) de E dans $\mathbb{R}$ et si φ est une fonction convexe (resp. concave) croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $\varphi \circ f$ est convexe (resp. concave).

La preuve de cette proposition est laissée en exercice au lecteur. Avant de passer aux propriétés de continuité des fonctions convexes, nous allons introduire rapidement la définition de la quasi-convexité (resp. quasi-concavité).

<u>Définition</u> 5.3.6 Une fonction f de E dans $]-\infty, +\infty]$ (resp. $[-\infty, +\infty[$) est quasi-convexe (resp. quasi-concave) si pour tout $(x, y) \in E \times E$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $f(tx+(1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ (resp. $\geq \min\{f(x), f(y)\}$).

Une fonction convexe (resp. concave) est quasi-convexe (resp. quasi-concave). Une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est quasi-convexe et quasi-concave. On remarque que si f est quasi-convexe alors $-f$ est quasi-concave. Ceci nous permet de déduire des résultats énoncés pour les fonctions quasi-convexes les résultats pour les fonctions quasi-concaves.

<u>Proposition</u> 5.3.4 *Soit f, une fonction de E dans $]-\infty, +\infty]$. Alors, les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f est quasi-convexe ;

(ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$ est convexe ;

(iii) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in E \mid f(x) < \alpha\}$ est convexe.

<u>Proposition</u> 5.3.5 *Soit f, une fonction quasi-convexe de E dans $]-\infty, +\infty]$. Pour tout $t \geq 0$, tf est quasi-convexe. Si g est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est quasi-convexe.*

Il faut aussi remarquer que la somme de deux fonctions quasi-convexes n'est pas toujours quasi-convexe. La démonstration des deux propositions précédentes est laissées aux lecteurs.

Nous revenons maintenant aux fonctions convexes et nous donnons un résultat qui permet de caractériser la continuité pour ces fonctions de façon très simple.

<u>Théorème</u> 5.3.2 *Soit E, un espace vectoriel normé et f une fonction convexe de E dans $]-\infty, +\infty]$. Soit $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. f est continue en x_0 si et seulement si il existe $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in B(x_0, r)$, $f(x) \leq a$. Si cette condition est vérifiée en un point du domaine de f, alors f est localement lipschitzienne sur l'intérieur de son domaine.*

<u>Preuve</u> Il est évident que si f est continue en un point de son domaine, alors elle est majorée sur un voisinage de ce point. Montrons maintenant la réciproque. Soit $x \in B(x_0, \frac{r}{2})$. Pour tout $y \in B(x, \frac{r}{2})$ tel que $y \neq x$, soit $z^+ = x + \frac{r}{2\|y-x\|}(y-x)$ et $z^- = x - \frac{r}{2\|y-x\|}(y-x)$. Il est clair que z^+ et z^- sont des éléments de $B(x_0, r)$. Donc, $f(z^+) \leq a$ et $f(z^-) \leq a$.

Nous remarquons que

$$y = \frac{2\|y-x\|}{r} z^+ + \left(1 - \frac{2\|y-x\|}{r}\right) x$$

et

$$x = \frac{2\|y-x\|}{r+2\|y-x\|} z^- + \frac{r}{r+2\|y-x\|} y.$$

Donc, en utilisant la convexité de f, on en déduit que

$$f(y) \leq \frac{2\|y-x\|}{r} f(z^+) + \left(1 - \frac{2\|y-x\|}{r}\right) f(x)$$

et

$$f(x) \leq \frac{2\|y-x\|}{r+2\|y-x\|} f(z^-) + \frac{r}{r+2\|y-x\|} f(y)$$

Donc, on en déduit que

$$f(y) - f(x) \leq \frac{2\|y-x\|}{r}(f(z^+) - f(x)) \leq \frac{2\|y-x\|}{r}(a - f(x)) \tag{1}$$

et

$$f(x) - f(y) \leq \frac{2\|y-x\|}{r+2\|y-x\|}(f(z^-) - f(y)) \leq \frac{2\|y-x\|}{r+2\|y-x\|}(a - f(y)) \tag{2}$$

En réécrivant l'inégalité (2), on obtient

$$f(y) \geq \frac{2\|y-x\|+r}{r} f(x) - \frac{2\|y-x\|}{r} a$$

ce qui est équivalent à

$$a - f(y) \leq -\frac{2\|y-x\|+r}{r} f(x) + \frac{r+2\|y-x\|}{r} a = \frac{2\|y-x\|+r}{r}(a - f(x)) \tag{3}$$

En reportant l'inégalité (3) dans la (2), on obtient

$$f(x) - f(y) \leq \frac{2\|y-x\|}{r+2\|y-x\|} \frac{2\|y-x\|+r}{r}(a - f(x)) = \frac{2\|y-x\|}{r}(a - f(x)) \tag{4}$$

Des inégalités (1) et (4), on déduit que

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{2\|y-x\|}{r}(a - f(x)) \tag{5}$$

Considérons maintenant un élément $x \in B(x_0, \frac{r}{4})$. En reprenant l'inégalité (3) appliquée à x et x_0, on obtient

$$a - f(x) \leq \frac{2\|x-x_0\|+r}{r}(a - f(x_0)) \leq \frac{3}{2}(a - f(x_0)) \tag{6}$$

Pour tout $y \in B(x_0, \frac{r}{4})$, y est un élément de $B(x, \frac{r}{2})$. En combinant les inégalités (5) et (6), on obtient alors

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{3}{r}(a - f(x_0))\|y-x\|$$

donc la fonction f est localement lipschitzienne de rapport $\frac{3}{r}(a - f(x_0))$ sur la boule $B(x_0, \frac{r}{4})$ ce qui implique en particulier que f est continue en x_0.

Pour finir la démonstration du théorème, il suffit de montrer que si f est majorée au voisinage d'un point alors f est majorée au voisinage de tous les points de l'intérieur de son domaine. Soit x_0 un point autour duquel f est majoré. Il existe donc $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$, $f(x) \leq a$. Soit y, $y \neq x$, un élément de l'intérieur du domaine de f. Il existe donc $\rho > 0$ tel que $B(y, 2\rho)$ est incluse dans le domaine de f. Soit $z = y + \frac{\rho}{\|y-x_0\|}(y - x_0)$. z appartient au domaine de f. On remarque que

$$y = \frac{\rho}{\rho + \|y-x_0\|} x_0 + \frac{\|y-x_0\|}{\rho + \|y-x_0\|} z$$

Soit $u \in E$ tel que $\|u\| < \frac{\rho r}{\rho + \|y-x_0\|}$. Alors,

$$\begin{aligned} y + u &= \frac{\rho}{\rho + \|y-x_0\|} x_0 + \frac{\|y-x_0\|}{\rho + \|y-x_0\|} z + u \\ &= \frac{\rho}{\rho + \|y-x_0\|}\left(x_0 + \frac{\rho + \|y-x_0\|}{\rho} u\right) + \frac{\|y-x_0\|}{\rho + \|y-x_0\|} z \end{aligned}$$

On remarque que $\frac{\rho + \|y - x_0\|}{\rho}\|u\| < r$ et donc, $x_0 + \frac{\rho + \|y - x_0\|}{\rho}u$ appartient à la boule $B(x_0, r)$. D'où

$$\begin{aligned} f(y+u) &\leq \frac{\rho}{\rho + \|y - x_0\|} f\left(x_0 + \frac{\rho + \|y - x_0\|}{\rho}u\right) + \frac{\|y - x_0\|}{\rho + \|y - x_0\|} f(z) \\ &\leq \frac{\rho}{\rho + \|y - x_0\|} a + \frac{\|y - x_0\|}{\rho + \|y - x_0\|} f(z) \end{aligned}$$

Donc f est majorée dans un voisinage de y ce qui termine notre démonstration. □

Dans le cas où l'espace E est de dimension finie, on peut encore améliorer ce résultat.

<u>Corollaire</u> 5.3.1 *Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie et si f est une fonction convexe de E dans $]-\infty, +\infty]$, alors f est localement lipschitzienne sur l'intérieur de son domaine.*

<u>Preuve</u> D'après le théorème précédent, il suffit de montrer que f est majorée au voisinage d'un point de son domaine. Soit x_0, un élément de l'intérieur du domaine de f et soit $(u_1, \ldots, u_p)$, une base de E. Il existe donc $r > 0$ tel que pour tout $i = 1, \ldots, p$, $x_0 + ru_i \in \mathrm{d}om(f)$. Soit $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \lambda_i > 0,\ \forall i = 1, \ldots, p,\ \sum_{i=1}^p \lambda_i < 1\}$ et soit φ, l'isomorphisme affine de $\mathbb{R}^p$ dans E qui à $\lambda \in \mathbb{R}^p$ associe $\varphi(\lambda) = x_0 + r\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$. Il est clair que Λ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et donc $\varphi(\Lambda)$ est un ouvert de E. Nous allons maintenant montrer que $\varphi(\Lambda)$ est inclus dans le domaine de f et que f est majorée sur cet ensemble ce qui finira la démonstration.

Soit $x \in \varphi(\Lambda)$. Il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $x = x_0 + r\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = (1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i)x_0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i(x_0 + ru_i)$. Donc x appartient au domaine de f car il s'écrit comme une combinaison convexe d'éléments du domaine. De plus, comme f est convexe,

$$f(x) \leq \left(1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i\right) f(x_0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_0 + ru_i) \leq \max\{f(x_0), f(x_0 + ru_1), \ldots, f(x_0 + ru_p)\}$$

Donc f est majorée sur $\varphi(\Lambda)$. □

Nous allons maintenant utiliser ce résultat pour donne une propriété topologique des sous-ensembles convexes compacts d'un espace de dimension finie.

<u>Théorème</u> 5.3.3 *Soit C, un sous-ensemble convexe compact non vide et non réduit à un point d'un espace vectoriel de dimension fini. Soit p, la dimension de la direction de $\mathrm{A}ff(C)$. Alors C est homéomorphe à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^p$.*

<u>Preuve</u> Par translation C est homéomorphe à D, sous-ensemble convexe compact de F, la direction de $\mathrm{A}ff(C)$ et, en plus, 0 appartient à l'intérieur relatif de D. Soit j_D, la jauge de D. j_D est finie sur F et convexe, donc elle est continue. De plus, comme D est fermé, $D = \{x \in F \mid j_D(x) \leq 1\}$.

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$, une base de F. Nous considérons la norme sur F définie par :

$$\|x\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^p \xi_i^2}$$

où $(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ sont les coordonnées de x dans la base $(u_1, \ldots, u_p)$. Nous notons par ψ, l'isomorphisme linéaire entre F et $\mathbb{R}^p$ qui a tout x fait correspondre ses coordonnées dans la base $(u_1, \ldots, u_p)$.

Nous définissons maintenant l'application φ de F dans $\mathbb{R}^p$ de la façon suivante. Si $x \neq 0$,

$$\varphi(x) = \frac{j_D(x)}{\|\psi(x)\|}\psi(x)$$

et si $x = 0$, $\varphi(x) = 0$. Il est évident que φ est continue sauf en 0. Or, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset D$. Donc, $j_D(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|_F = \frac{1}{r}\|\psi(x)\|$. Donc, $\|\varphi(x)\| \leq \frac{1}{r}\|\psi(x)\| = \frac{1}{r}\|x\|_F$. Donc, φ est continue en 0.

Montrons maintenant que φ est injective. Si $x \neq 0$, alors $\varphi(x) \neq 0$. Considérons maintenant le cas où x_1 et x_2 sont non nuls et $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Alors, $\psi(x_1) = \lambda\psi(x_2)$ avec $\lambda > 0$. Donc, $x_1 = \lambda x_2$ et $\frac{1}{\|\psi(x_1)\|}\psi(x_1) = \frac{1}{\|\psi(x_2)\|}\psi(x_2)$. De ceci, on déduit que $j_D(x_1) = j_D(x_2)$. Or, $j_D(x_1) = j_D(\lambda x_2) = \lambda j_D(x_2)$. Donc, $\lambda = 1$ et $x_1 = x_2$.

Montrons pour finir que φ est surjective. Soit $u \in \bar{B}(0,1)$. Si $u = 0$, alors $u = \varphi(0)$. Si $u \neq 0$, il existe $t > 0$ tel que $\xi = t\psi^{-1}(u)$ appartient à la frontière de D. Donc, $j_D(\xi) = 1$. Soit $x = \|u\|\xi$. Alors $\varphi(x) = \frac{j_D(x)}{\|\psi(x)\|}\psi(x)$. Or, $\psi(x) = \psi(\|u\|t\psi^{-1}(u)) = \|u\|tu$ et $j_D(x) = j_D(\|u\|\xi) = \|u\|j_D(\xi) = \|u\|$. Donc, $\varphi(x) = \frac{\|u\|}{t\|u\|^2}\|u\|tu = u$.

Comme D est compact et φ est continue et bijective, c'est un homéomorphisme. □

5.4 Théorèmes de séparation

Le théorème suivant nous donne un des outils essentiels de l'analyse convexe qui est utilisé dans tous les développements de la théorie.

<u>THÉORÈME</u> 5.4.1 *Soit E, un espace vectoriel normé et soit A et B des sous-ensembles convexes non vides et disjoints de E. Si l'intérieur de A est non vide alors il existe une forme linéaire continue non nulle f telle que :*

$$\sup\{f(a) \mid a \in A\} \leq \inf\{f(b) \mid b \in B\}$$

<u>PREUVE</u> Fixons $a_0 \in \operatorname{int} A$ et $b_0 \in B$. Soit $x_0 = b_0 - a_0$. x_0 est non nul car A et B sont disjoints. Soit $C = A - B + \{x_0\}$. C est convexe car A, B et $\{x_0\}$ le sont et l'intérieur de C est non vide car $\operatorname{int}(A) - B + \{x_0\}$ est un ouvert inclus dans C. Finalement, 0 appartient à $\operatorname{int} A$ car $0 = a_0 - b_0 + x_0$.

Soit j_C, la jauge de C. D'après la proposition (5.3.2), j_C est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et vérifie, pour tout $(x,y) \in E \times E$, $j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$ et, pour tout $x \in E$ et pour tout $t \geq 0$, $j_C(tx) = tj_C(x)$. De plus, x_0 n'appartient pas à C car A et B sont disjoints. Donc, $j_C(x_0) \geq 1$.

Considérons le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}x_0$ de E et la forme linéaire de $\mathbb{R}x_0$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(tx_0) = t$. On remarque que $g(tx_0) \leq j_C(tx_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. C'est évident si $t \leq 0$ car $j_C(tx_0) \geq 0$. Si $t > 0$, $g(tx_0) = t \leq tj_C(x_0) = j_C(tx_0)$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un prolongement de g à E, que nous noterons f, et qui vérifie pour tout $x \in E$, $f(x) \leq j_C(x)$. Nous remarquons tout d'abord que f est continue car pour tout $x \in C$, $f(x) \leq j_C(x) \leq 1$. Donc f est majorée sur un ouvert car l'intérieur de C est non vide, donc f est continue.

Pour tout $(a,b) \in A \times B$, $a - b + x_0 \in C$. Donc,

$$f(a - b + x_0) = f(a) - f(b) + f(x_0) = f(a) - f(b) + 1 \leq j_C(a - b + x_0) \leq 1$$

Nous en déduisons que $f(a) \leq f(b)$ ce qui implique $\sup\{f(a) \mid a \in A\} \leq \inf\{f(b) \mid b \in B\}$. □

L'interprétation géométrique qui justifie le nom donné à ce théorème est que si deux ensembles convexes non vides sont disjoints et si l'intérieur de l'un est non vide, on peut les séparer par un hyperplan, c'est-à-dire qu'il existe un hyperplan fermé tel que l'un des convexes est dans l'un des demi-espaces fermés délimités par cet hyperplan et l'autre convexe est dans l'autre demi-espace.

<u>Corollaire</u> 5.4.1 *Soit E, un espace vectoriel normé et soit A et B des sous-ensembles convexes non vides et disjoints de E. Si A est compact et B est fermé alors il existe une forme linéaire continue non nulle f telle que :*

$$\sup\{f(a) \mid a \in A\} < \inf\{f(b) \mid b \in B\}$$

<u>Preuve</u> Soit d_B la fonction distance à B définie par :

$$d_B(x) = \inf\{\|x - b\| \mid b \in B\}$$

Cette fonction est continue car lipschitzienne de rapport 1 et si $x \notin B$, $d_B(x) > 0$ car B est fermé.

Soit $\bar{a}$, un minimum de d_B sur A. $\bar{a}$ existe car A est compact et d_B est continue. Comme A et B sont disjoints, $r = d_B(\bar{a}) > 0$. Soit $\tilde{A} = \cup_{a \in A} B(a, \frac{r}{2})$. $\tilde{A}$ est un ouvert convexe et, vu la définition de r, $\tilde{A}$ et B sont disjoints. En appliquant le théorème précédent, il existe un forme linéaire continue non nulle telle que

$$\sup\{f(a) \mid a \in \tilde{A}\} \leq \inf\{f(b) \mid b \in B\}$$

Remarquons maintenant que $\sup\{f(a) \mid a \in A\} < \sup\{f(a) \mid a \in \tilde{A}\}$. En effet, comme A est compact, il existe $a_0 \in A$ tel que $\sup\{f(a) \mid a \in A\} = f(a_0)$. Comme f est non nulle, il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $f(u) > 0$. Donc, $a_0 + \frac{r}{2}u$ appartient à $\tilde{A}$ et $f(a_0 + \frac{r}{2}u) > f(a_0)$. Ceci implique que $\sup\{f(a) \mid a \in A\} < \sup\{f(a) \mid a \in \tilde{A}\}$. Donc, f vérifie

$$\sup\{f(a) \mid a \in A\} < \inf\{f(b) \mid b \in B\}$$

□

<u>Corollaire</u> 5.4.2 *Soit E, un espace vectoriel normé et soit x et y deux éléments différents de E. Alors, il existe $f \in E'$ tel que $f(x) \neq f(y)$.*

<u>Preuve</u> Il suffit d'appliquer le corollaire précédent aux deux convexes compacts $\{x\}$ et $\{y\}$. □

<u>Corollaire</u> 5.4.3 *Soit E, un espace vectoriel normé, soit M, un sous-espace vectoriel de E et soit x un élément E. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

($\imath$) $x \in \mathrm{a}dh\, M$ *;*

($\imath\imath$) *pour tout $f \in E'$, si f s'annule sur M alors $f(x) = 0$.*

<u>Preuve</u> ($\imath$) implique ($\imath\imath$) est une conséquence directe de la continuité des éléments de E'.

Montrons maintenant la réciproque en raisonnant par l'absurde. Si $x \notin \mathrm{a}dh\, M$, alors le corollaire 5.13 appliqué au convexe compact $\{x\}$ et au convexe fermé $\mathrm{a}dh\, M$, implique qu'il existe une forme linéaire continue f telle que $f(x) < \inf\{f(y) \mid y \in \mathrm{a}dh\, M\}$. Montrons que f s'annule sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{a}dh\, M$. En effet, si ceci est faux, il existe $y_0 \in \mathrm{a}dh\, M$ tel que $f(y_0) \neq 0$. Donc, $\lim_{t \to +\infty} f(ty_0)$ ou $\lim_{t \to -\infty} f(ty_0)$ est égale à $-\infty$ ce qui contredit le fait que f est minorée par $f(x)$ sur $\mathrm{a}dh\, M$. Ceci implique aussi que $f(x) \neq 0$.

Donc, si $x \notin \mathrm{a}dh\, M$, il existe une forme linéaire qui s'annule sur $\mathrm{a}dh\, M$ et tel que $f(x) \neq 0$. Ceci est la contraposée de ($\imath\imath$) implique ($\imath$). □

Le résultat suivant montre que les conclusions peuvent être plus précises si l'espace vectoriel est de dimension finie.

<u>Corollaire</u> 5.4.4 *Soit E, un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $x \in E$ et A, un sous-ensemble convexe non vide de E tels que $x \notin \mathrm{ir}\, A$. Alors, il existe une forme linéaire non nulle f sur E telle que pour tout $a \in A$, $f(x) \leq f(a)$.*

<u>Preuve</u> Si $x \notin \mathrm{A}ff\,A$, il suffit de séparer le compact $\{x\}$ et le sous-espace affine $\mathrm{A}ff\,A$ qui est fermé car E est de dimension finie.

Si $x \in \mathrm{A}ff\,A$, une translation par l'opposé d'un élément de A ramène le problème dans le sous-espace vectoriel qui est la direction de $\mathrm{A}ff\,A$. Dans ce sous-espace vectoriel, l'intérieur du translaté de A est non vide et on peut appliquer le résultat de séparation entre le translaté de x et cet intérieur. Ensuite, il suffit de prolonger à E de n'importe quelle manière la forme linéaire trouvée pour obtenir le résultat. □

De ce résultat, on déduit facilement le théorème de séparation suivant.

<u>Corollaire</u> 5.4.5 *Soit E, un espace vectoriel normé de dimension finie et soit A et B, deux sous-ensembles convexes non vides de E tels que $\mathrm{ir}\,A \cap \mathrm{ir}\,B = \emptyset$. Alors, il existe une forme linéaire non nulle f sur E telle que*

$$\sup\{f(a) \mid a \in A\} \leq \inf\{f(b) \mid b \in B\}$$

5.5 Polarité et orthogonalité

<u>Définition</u> 5.5.1 Soit E, un espace vectoriel normé, soit E', son dual, soit A, un sous-ensemble de E et soit B, un sous-ensemble de E'.
- Le cône polaire négatif de A, noté A° est défini par $A^\circ = \{f \in E' \mid \forall a \in A, f(a) \leq 0\}$;
- L'orthogonal de A, noté $A^\perp$ est défini par $A^\perp = \{f \in E' \mid \forall a \in A, f(a) = 0\}$;
- Le cône polaire négatif de B, noté B° est défini par $B^\circ = \{x \in E \mid \forall f \in B, f(x) \leq 0\}$;
- L'orthogonal de B, noté $B^\perp$ est défini par $B^\perp = \{x \in E \mid \forall f \in B, f(x) = 0\}$.

Il faut bien noter que les définitions ne sont pas symétriques pour E et E' car E n'est pas le dual de E'. En utilisant le plongement isométrique de E dans E'', on note que l'orthogonal ou le polaire négatif d'un sous-ensemble de E' au sens de son dual E'' est en général plus grand que celui définit ci-dessus.

<u>Proposition</u> 5.5.1 *Soit E, un espace vectoriel normé, soit E', son dual, soit A, un sous-ensemble de E et soit B, un sous-ensemble de E'.*
- *A° et B° sont des cônes convexes fermés de sommet 0 ;*
- *$A^\perp$ et $B^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels fermés ;*
- *$A^\perp \subset A^\circ$ et $B^\perp \subset B^\circ$;*
- *Si $A_1 \subset A_2$, alors $A_2^\circ \subset A_1^\circ$ et $A_2^\perp \subset A_1^\perp$;*
- *Si $B_1 \subset B_2$, alors $B_2^\circ \subset B_1^\circ$ et $B_2^\perp \subset B_1^\perp$;*
- *Si A est un sous-espace vectoriel, alors $A^\circ = A^\perp$; si B est un sous-espace vectoriel, alors $B^\circ = B^\perp$;*
- *$A^\circ = (\mathrm{a}dh\,A)^\circ$ et $A^\perp = (\mathrm{a}dh\,A)^\perp$.*

La preuve simple de cette proposition est laissée au lecteur. Nous allons maintenant donner un théorème important qui s'obtient en utilisant les théorèmes de séparation.

<u>Théorème</u> 5.5.1 *(Théorème des bipolaires)* *Soit A, un sous-ensemble non vide de E, espace vectoriel normé. Alors, $(A^\circ)^\circ = \mathrm{a}dh(cone\,A)$ et $(A^\perp)^\perp = \mathrm{a}dh(\mathcal{L}(A))$, où $\mathcal{L}(A)$ est l'espace vectoriel engendré par A.*

<u>Preuve</u> $(A^\circ)^\circ$ est un cône convexe fermé qui contient A. Donc, $\mathrm{a}dh(cone\,A) \subset (A^\circ)^\circ$. Montrons maintenant l'inclusion inverse en raisonnant par l'absurde. Soit $x_0 \in (A^\circ)^\circ$ et $x_0 \notin \mathrm{a}dh(cone\,A)$. Alors,

on peut utiliser le deuxième théorème de séparation entre le convexe compact $\{x_0\}$ et le convexe fermé $adh(cone\, A)$. Il existe donc $f \in E'$ telle que $\sup\{f(y) \mid y \in adh(cone\, A)\} < f(x_0)$. Comme f est majorée sur le cône $adh(cone\, A)$, on en déduit que $\sup\{f(y) \mid y \in adh(cone\, A)\} = 0 < f(x_0)$. Comme $A \subset adh(cone\, A)\}$, on en déduit que $f \in A^\circ$. Alors, $f(x_0) > 0$ contredit $x_0 \in (A^\circ)^\circ$ ce qui termine la démonstration. □

<u>Corollaire</u> 5.5.1 *Soit E, un espace vectoriel normé, et soit A, un sous-ensemble de E. A est un cône convexe fermé si et seulement si $A = (A^\circ)^\circ$. A est un sous-espace vectoriel fermé si et seulement si $A = (A^\perp)^\perp$.*

<u>Corollaire</u> 5.5.2 *Soit E, un espace vectoriel normé, et soit M, un sous-espace vectoriel de E. $adh\, M = E$ si et seulement si $M^\perp = \{0\}$.*

<u>Preuve</u> Si $adh\, M = E$, alors $M^\perp = (adh\, M)^\perp = E^\perp = \{0\}$.

Si $M^\perp = \{0\}$, alors $adh\, M = (M^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$. □

<u>Théorème</u> 5.5.2 *(Lemme de Farkas) Soit E, un espace vectoriel normé, et soit E', son dual. Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$, deux familles finies d'éléments de E. Soit*

$$A = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i a_i + \sum_{j\in J} \mu_j b_j \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^I,\ \mu \in \mathbb{R}^J \right\}$$

et

$$B = \{f \in E' \mid f(a_i) \le 0, \forall i \in I,\ f(b_j) = 0, \forall j \in J\}$$

Alors, $A^\circ = B$ et $B^\circ = A$.

<u>Preuve</u> Il est clair que $A^\circ = B$ et que $A \subset B^\circ$. De plus, la première égalité et le théorème des bipolaires nous donnent que $B^\circ = adh(cone\, A)$. Pour avoir la deuxième égalité, il suffit donc de montrer que A est un cône convexe fermé. Or A est un cône finiment généré par la famille $((a_i)_{i\in I}, (b_j)_{j\in J}, (-b_j)_{j\in J})$. Donc, d'après la proposition (5.2.6), A est fermé. □

<u>Corollaire</u> 5.5.3 *Soit E, un espace vectoriel normé, et soit E', son dual. Soit $(a_i)_{i\in I}$, une famille finie d'éléments de E. Soit*

$$A = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i a_i \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^I \right\}$$

et

$$B = \{f \in E' \mid f(a_i) \le 0, \forall i \in I\}.$$

Alors, $A^\circ = B$ et $B^\circ = A$.

<u>Corollaire</u> 5.5.4 *Soit E, un espace vectoriel normé, et soit E', son dual. Soit $(a_i)_{i\in I}$, une famille finie d'éléments de E. Soit $b \in E$ vérifiant la propriété suivante :*

pour tout $f \in E'$ vérifiant $f(a_i) \le 0$, pour tout $i \in I$, alors $f(b) \le 0$.

Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^I$ tel que $b = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i$.

<u>Preuve</u> Soit $A = \{\sum_{i\in I} \lambda_i a_i \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^I\}$ et $B = \{f \in E' \mid f(a_i) \le 0, \forall i \in I\}$. Alors, la condition : $\forall f \in E'$ vérifiant $f(a_i) \le 0$, pour tout $i \in I$, alors $f(b) \le 0$, est équivalente à $b \in B^\circ$. D'après le corollaire précédent, ceci implique $b \in A$. □

COROLLAIRE 5.5.5 *Soit E, un espace vectoriel normé, et soit E', son dual. Soit $(a_i)_{i \in I}$, une famille finie d'éléments de E. Soit*

$$A = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \mid \lambda \in \mathbb{R}^I \right\}$$

et

$$B = \{ f \in E' \mid f(a_i) = 0, \ \forall i \in I \} .$$

Alors, $A^\perp = B$ et $B^\perp = A$.

La démonstration de ce corollaire repose simplement sur le fait que le polaire est égal à l'orthogonal lorsqu'il s'agit de sous-espaces vectoriels.

5.6 Exercices

Exercice 5.1 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x;\ 0 \leq y;\ z^2 \leq xy\}$$

et la droite D d'équations $x = 0$, $z = 1$. Montrer que C est un convexe fermé et que tout hyperplan affine passant par D rencontre C.

Exercice 5.2 Soient A et B deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}^n$ et A est fermé. Montrer que A est un demi-espace.

Exercice 5.3 Soit E un espace de Banach et soit K un sous-ensemble compact de E. le but de l'exercice est de montrer que l'enveloppe convexe fermée de K, $\overline{\text{co}}K$ est compact.

1 - Montrer qu'il suffit de vérifier que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (x_1, \ldots, x_p) \in (\overline{\text{co}}K)^p \text{ tel que } \overline{\text{co}}K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon).$$

2 - En utilisant la compacité de K, montrer que cette condition est satisfaite.

3 - Donner un exemple de compact dans un espace de Banach dont l'enveloppe convexe est non fermée.

Exercice 5.4 Déterminer les polaires négatifs des ensembles :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_k \geq 0\ \forall k = 1, ..., n \text{ et } \sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1 \right\};$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} |x_k| \right\};$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1 \right\};$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 1 - \sqrt{1 + x_2^2} \right\}.$$

Exercice 5.5 Soit K, un sous-ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^n$. On suppose que l'intérieur de K est non vide. Le but de l'exercice est de montrer que cet ensemble est homéomorphe à la boule unité fermée.

1 - Soit $a \in \text{int}\, K$. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la demi-droite affine $\{a + tu \mid t \geq 0\}$ rencontre la frontière de K en exactement un point.

2 - Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. On définit l'application $g : \text{Fr}K \to S$ par

$$g(x) = \frac{x - a}{\|x - a\|}$$

Montrer que g est injective et continue.

3 - Montrer que g est surjective à l'aide de la première question, et en déduire que g est un homéomorphisme de $\text{Fr}K$ sur S.

4 - Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. On définit la fonction f de B dans K par :

$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(y) = (1 - \|y\|)a + \|y\| g^{-1}\left(\dfrac{y}{\|y\|}\right) \quad \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

5 - Soit $x \in K \backslash \{a\}$. On pose $y = g^{-1}\left(\dfrac{x-a}{\|x-a\|}\right)$. Montrer que $x \in [a, y]$ et que $f\left(\dfrac{x-a}{\|y-a\|}\right) = x$. En déduire que f est surjective.

6 - Montrer que $f(y) = a$ implique $y = 0$.

Soient $y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}^n$ tels que $y_1 \neq y_2$ et $0 < \|y_1\| \leq \|y_2\| \leq 1$. Montrer que $f(y_1) = f(y_2)$ implique $\dfrac{y_1}{\|y_1\|} = \dfrac{y_2}{\|y_2\|}$. En déduire que f est injective et conclure.

Exercice 5.6 Soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et x un élément de C. On pose :

$L(C, x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists t > 0 \text{ telque } x + ty \in C \text{ et } x - ty \in C\}$

$F(C, x) = (\{x\} + L(C, x)) \cap C$

$F(C, x)$ est appelé la facette de C en x.

1 - Montrer que $F(C, x)$ est convexe et que $x \in F(C, x) \subset C$.

2 - Montrer que $F(C, x) = C$ si et seulement si $x \in ir(C)$ où $ir(C)$ désigne l'intérieur relatif de C.

3 - Montrer que $x \in irF(C, x)$. Montrer également que si y est un élément de C, $F(C, x) = F(C, y)$ si et seulement si $y \in irF(C, x)$.

4 - On dit que x est un point extrémal de C si l'ensemble $C \setminus \{x\}$ est convexe. Montrer que x est un point extrémal si et seulement si $F(C, x) = \{x\}$.

Exercice 5.7 Soit A et B deux sous-ensembles d'un espace vectoriel E. Montrer que :

$$\text{co}(A) + \text{co}(B) = \text{co}(A + B),$$

où $\text{co}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de A.

Exercice 5.8 Soit A un sous-ensemble fermé non vide d'un espace vectoriel normé E. Montrer que A est convexe si et seulement si la fonction $x \to d_A(x) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ est convexe.

Montrer sur un exemple que le résultat précédent n'est pas vrai si on ne suppose pas que A est fermé.

Exercice 5.9 Soit C un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que $ir(f(C)) = f(ir(C))$.

Exercice 5.10 Soit E un espace vectoriel normé et soit C un sous-ensemble convexe fermé de E et c un élément de C. Un vecteur u de E est appelé direction asymptotique de C en c si la demi-droite $\{c + tu \mid t \geq 0\}$ est incluse dans C.

1 - Montrer que l'ensemble des directions asymptotiques de C en c est un cône convexe fermé.

2 - Soit c' un autre élément de C. Montrer que l'ensemble des directions asymptotiques de C en c' est égal à l'ensemble des directions asymptotiques de C en c.

Cet ensemble est appelé le cône asymptotique de C et il est noté N_C^∞.

3 - Montrer que si C est borné, $N_C^\infty = \{0\}$. Montrer que si E est de dimension fini, alors $N_C^\infty = \{0\}$ si seulement si C est compact.

4 - Donner un exemple de sous-ensemble convexe fermé non borné d'un espace vectoriel de dimension infinie tel que $N_C^\infty = \{0\}$.

5 - On suppose dans cette question que E est de dimension finie. Soit C_1 et C_2 deux sous-ensembles convexes fermés de E. On suppose que $N_{C_1}^\infty \cap -N_{C_2}^\infty = \{0\}$. Montrer qu'alors $C_1 + C_2$ est fermé.

<u>Exercice</u> 5.11 Soit f une application convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On suppose que l'épigraphe de f est fermé et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\}$ est non vide et borné. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}$ est borné.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et montrer que si l'ensemble $C_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}$ est non borné, il existe $x_0 \in C_\alpha$ et $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $x_0 + tu \in C_\alpha$ pour tout $t \geq 0$. On déduira de ce résultat préliminaire que C_a est non borné.

<u>Exercice</u> 5.12 Soit (f^n) une suite de fonctions convexes de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in]0,1[$, la suite $(f^n(x))$ est convergente. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f^n(x), \ \forall x \in]0,1[.$$

1 - Montrer que f est convexe.

2 - Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans $]0,1[$.

<u>Exercice</u> 5.13 Soient E un espace de Banach et C un sous-ensemble convexe et fermé de E vérifiant :

$$E = \bigcup_{t\geq 0} tC$$

1 - Montrer que 0 appartient à C.

2 - Montrer que l'intérieur de C est non vide. On pourra considérer les ensembles nC pour $n \in \mathbb{N}$.

3 - Montrer que 0 est dans l'intérieur de C.

<u>Exercice</u> 5.14 Soit C, un sous-ensemble convexe, fermé et non vide d'un espace vectoriel normé E. Montrer que C est l'intersection de tous les demi-espaces ouverts qui le contiennent.

<u>Exercice</u> 5.15 Soient E un espace vectoriel réel et C un sous-ensemble de E. Un point c de C est dans l'intérieur algébrique de C, si $\forall u \in E, \exists \alpha > 0$, tel que $\{c + tu, t \in]-\alpha, +\alpha[\} \subset C$.

Soient C_1 et C_2 deux sous-ensembles non vides de E, convexes et disjoints. On suppose que C_1 a un intérieur algébrique non vide. Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle sur E, f, telle que :

$$\sup\{f(c_1), c_1 \in C_1\} \leq \inf\{f(c_2), c_2 \in C_2\}.$$

<u>Exercice</u> 5.16 Soient E un espace vectoriel normé, (x_n) une suite de E et (α_n) une suite de $\mathbb{R}$. Soit $\gamma > 0$. Montrer l'équivalence entre :

($\imath$) Il existe une forme linéaire continue f sur E telle que : pour tout n, $f(x_n) = \alpha_n$ et $\|f\| \leq \gamma$;

($\imath\imath$) Pour tout entier $k \geq 1$ et toute famille de réels $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, on a

$$\left|\sum_{i=1}^k \beta_i \alpha_i\right| \leq \gamma \left\|\sum_{i=1}^k \beta_i x_i\right\|.$$

Exercice 5.17 Soit C un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ non réduit à $\{0\}$. Pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$, on note $x \cdot y$ le produit scalaire canonique de x et y. On dit que C est saillant si $C \cap -C = \{0\}$.

1 - Montrer que C est saillant si et seulement si le cône polaire négatif de C, $C^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot c \leq 0 \ \forall c \in C\}$ est d'intérieur non vide.

2 - On suppose que C est saillant. Soit u un élément de l'intérieur de C°. Montrer que pour tout $\alpha \leq 0$, l'ensemble $C_\alpha = \{c \in C \mid u \cdot c = \alpha\}$ est compact. Montrer que si $\alpha < 0$, $C = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda C_\alpha$.

Exercice 5.18 Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ tels que 0 appartient à l'intérieur de $A - B$. Montrer que l'ensemble $A^\circ + B^\circ$ est fermé, où A° (resp. B°) est le polaire négatif de A (resp. B).

Exercices complémentaires

<u>Exercice</u> 5.19 Soient E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. On suppose qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x)$ est fini et que l'épigraphe de f est fermé. Une fonction $h : E \to \mathbb{R}$ est affine s'il existe une forme linéaire g sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in E$, $h(x) = g(x) + \alpha$. On note dans la suite $A(f)$, l'ensemble des fonctions affines continues qui minorent f sur E.

1 - Soit x_0 un élément du domaine de f et $\alpha_0 < f(x_0)$. Montrer qu'il existe un élément h de $A(f)$ telle que $h(x_0) = \alpha_0$.

On choisit un élément h_0 dans $A(f)$ et on pose dans la suite $\varphi = f - h_0$.

2 - Soit x_0, un élément de E qui n'est pas dans l'adhérence du domaine de f et soit $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction affine continue h de E dans $\mathbb{R}$ qui minore φ et telle que $h(x_0) = \alpha_0$.

3 - Soit x_0, un élément de l'adhérence du domaine de f qui n'est pas dans le domaine de f. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $r > 0$, tel que :

$$\text{épi}(f) \bigcap (B(x_0, r) \times] - \infty, \alpha]) = \emptyset.$$

En déduire qu'il existe une fonction affine continue h de E dans $\mathbb{R}$ qui minore f et telle que $h(x_0) = \alpha$.

4 - Déduire des questions précédentes que :

$$f(x) = \sup \{h(x), h \in A(f)\}, \ \forall x \in E.$$

5 - Montrer que le résultat précédent est faux si l'épigraphe de f n'est pas fermé.

<u>Exercice</u> 5.20 Soient E un espace vectoriel normé, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E', le dual topologique de E et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels. On suppose que l'ensemble $C = \{x \in E \mid f_i(x) \geq \alpha_i, \ \forall i \in I\}$ est non vide. Si A est un sous-ensemble de E, on note $\overline{\text{cone}}(A)$, le plus petit cône convexe fermé de sommet 0 contenant A.

1 - Soit $g \in E'$, $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$(\imath)$ pour tout $x \in C$, $g(x) \geq \beta$;

$(\imath\imath)$ $(g, \beta) \in \overline{\text{cone}}\{(f_i, \gamma) \mid \gamma \leq \alpha_i, \ \forall i \in I\}$.

2 - En déduire dans le cas où I est fini que $(\imath)$ est vérifiée si et seulement si il existe $\lambda_i \geq 0$, pour tout $i \in I$, tel que :

$$g = \sum_{i\in I} \lambda_i f_i \text{ et } \beta \leq \sum_{i\in I} \lambda_i \alpha_i.$$

<u>Exercice</u> 5.21 Soit E, un espace vectoriel normé et soit E', son dual topologique. Soit f, une application convexe de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit x_0, un élément du domaine de f. Le sous-différentiel de f en x_0, est l'ensemble des éléments p de E' tel que :

$$f(x) - f(x_0) \geq p(x - x_0), \ \forall x \in E.$$

1 - Montrer que si f est continue en x_0, un élément du domaine de f, alors le sous-différentiel de f en x_0 est non vide. On pourra séparer le point $(x_0, f(x_0))$ de l'intérieur de l'épigraphe de f.

La fonction f est dite propre (au sens de Mas-Colell) en x_0, un élément de son domaine, s'il existe un cône convexe ouvert de sommet 0, U, tel que :

$$(\{x_0\} + U) \cap \{x \in E \mid f(x) \leq f(x_0)\} = \emptyset.$$

2 - Montrer que si le sous-différentiel de f en x_0 est non-vide, alors f est propre en x_0.

Exercice 5.22 Soient E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique. Soit f, une application convexe de E dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On rappelle que la conjuguée de f, notée f^*, est une application convexe de E' dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ définie par :

$$f^*(p) = \sup\{p(x) - f(x), x \in E\}, \forall p \in E'.$$

1) Montrer que la conjuguée d'une forme linéaire continue q est la fonction définie par :

$$q^*(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = q \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

2 - Montrer que la conjuguée de la norme est l'application φ définie par :

$$\varphi(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in \bar{B}_{E'}(0,1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

3 - Montrer que si p est une forme linéaire continue, la conjuguée de $f + p$ est définie par : $(f+p)^*(q) = f^*(q-p)$.

4 - Montrer que si x et p sont des éléments respectivement dans le domaine de f et de f^* tels que $f(x) + f^*(p) = p(x)$, alors p est dans le sous-différentiel de f en x et x est dans le sous-différentiel de f^* en p. Montrer que si p est dans le sous-différentiel de f en x, alors p est dans le domaine de f^* et $f(x) + f^*(p) = p(x)$.

Exercice 5.23 Dans $\mathbb{R}^n$, on note $x \cdot y$ le produit scalaire canonique des vecteurs x et y. Une application affine h de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est une application telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $h(x) = a \cdot x + b$.

Soit f, une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On suppose que l'épigraphe de f est fermé et non vide. Une minorante affine de f est une application affine g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) \leq f(x)$. Soit M, une matrice $n \times n$ symétrique définie positive. On rappelle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot Mx \geq \alpha\|x\|^2$. On note φ la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} x \cdot Mx$$

A tout $x \in \mathbb{R}^n$, on associe la fonction g_x définie par :

$$g_x(y) = f(y) + \varphi(y - x)$$

et le problème suivant :

$$P(x) \ : \ \begin{cases} \text{minimiser } g_x(y) \\ y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

On note $v(x)$ la valeur du problème $P(x)$, c'est-à-dire $v(x) = \inf\{g_x(y) \mid y \in \mathbb{R}^n\}$.

1 - Montrer que, pour tout $(u, u') \in (\mathbb{R}^n)^2$, $u \neq u'$, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\varphi(tu + (1-t)u') < t\varphi(u) + (1-t)\varphi(u').$$

2 - Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \leq t\}$ est fermé. Montrer qu'il existe une minorante affine de f.

3 - Soit $h(y) = a \cdot y + b$, une minorante affine de f. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$g_x(y) \geq \frac{1}{2}\alpha\|y\|^2 - (\|a\| + \alpha\|x\|)\,\|y\| + b + \frac{1}{2}\alpha\|x\|^2.$$

En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^n \mid g_x(y) \leq t\}$ est compact.

4 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le problème $P(x)$ a une unique solution. En déduire que v est fini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

5 - Soit $h(x) = a \cdot x + b$, une minorante affine de f. Soit

$$v_h(x) = \inf \left\{ h(y) + \frac{1}{2}(y - x) \cdot M(y - x) \mid y \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Montrer que v_h est une application affine et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $v_h(x) \leq v(x)$.

6 - Montrer que v est convexe. On pourra montrer que l'épigraphe de v est la somme de l'épigraphe de f et de l'épigraphe de φ.

Exercice 5.24 Soient E un espace de Banach et A une partie non vide de E.

1 - Montrer l'équivalence entre :

$(\imath)$ A est compacte ;

$(\imath\imath)$ A est fermée, bornée, et, si $\varepsilon > 0$, il existe un sous espace vectoriel E_ε de E de dimension finie tel que pour tout $x \in A$, $\inf\{\|x - z\|, z \in E_\varepsilon\} \leq \varepsilon$.

2 - Montrer qu'une partie A de ℓ^1 est compacte si et seulement si A est fermée, bornée, et équisommable, c'est à dire : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall x \in A$, $\sum_{n \geq N} |x_n| \leq \varepsilon$.

3 - Si A est une partie compacte de E, montrer que $co\,A$ est précompacte.

4 - $E = \ell^2$ muni de sa base canonique $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soient $u_n = \frac{e_n}{n+1}$ et $K = \{0\} \cup \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que K est compact mais que $co\,K$ n'est pas fermé.

Chapitre 6

Espaces de Hilbert

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique définie positive et qui est complet pour la norme issue de ce produit scalaire. Dans ce chapitre, E est un espace de Hilbert et nous notons $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de x et de y. La norme de x est définie par , $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous dit que pour tout $(x, y) \in E \times E$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. Il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires. L'égalité du parallélogramme est

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

x et y sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci est équivalent par le théorème de Pythagore à $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

<u>Exemples</u> : $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un espace de Hilbert.

ℓ^2, l'espace vectoriel des suites réelles (x_n) telles que $\sum_{n=0}^\infty x_n^2 < \infty$, est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n$.

Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert car la restriction du produit scalaire est un produit scalaire sur le sous-espace vectoriel et il est complet car un fermé d'un complet est un complet.

6.1 Projection sur un ensemble convexe fermé

Le résultat que nous allons maintenant énoncer et démontrer est un résultat essentiel pour les espaces de Hilbert ce qui en fait une catégorie particulière parmi les espaces de Banach pour lesquels des résultats spécifiques sont obtenus en utilisant ce théorème de projection.

<u>Théorème</u> 6.1.1 *Soit C, un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique élément appelé la projection de x sur C et noté $\mathrm{p}roj_C(x)$ vérifiant :*

$$\|x - \underset{C}{\mathrm{p}roj}(x)\| = \min\{\|x - c\| \mid c \in C\}$$

<u>Preuve</u> Montrons d'abord l'unicité de $\mathrm{p}roj_C(x)$. Supposons qu'il existe deux points c_1 et c_2 de C tels que $c_1 \neq c_2$ et $\|x - c_1\| = \|x - c_2\| = \min\{\|x - c\| \mid c \in C\}$. Posons $c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$. Comme C est convexe, c appartient à C. Nous allons montrer que $\|x - c\| < \|x - c_1\|$ ce qui contredit $\|x - c_1\| = \min\{\|x - c\| \mid c \in C\}$.

Nous remarquons que $x - c = \frac{1}{2}(x - c_1) + \frac{1}{2}(x - c_2)$. L'égalité du parallélogramme implique alors

$$\|x - c\|^2 = 2\left(\left\|\frac{1}{2}(x - c_1)\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}(x - c_2)\right\|^2\right) - \left\|\frac{1}{2}(c_2 - c_1)\right\|^2$$

Vu que $\|x - c_1\| = \|x - c_2\|$, on obtient

$$\|x - c\|^2 = \|x - c_1\|^2 - \left\|\frac{1}{2}(c_2 - c_1)\right\|^2$$

donc, $\|x - c\| < \|x - c_1\|$ car $c_1 \neq c_2$.

Nous montrons maintenant l'existence de $proj_C(x)$. Soit $\alpha = \inf\{\|x - c\| \mid c \in C\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, il existe $c_n \in C$ tel que $\|x - c_n\| \leq \alpha + \frac{1}{n}$. Nous montrons maintenant que la suite (c_n) est de Cauchy.

L'égalité du parallélogramme implique que pour tout (n, m),

$$\|x - c_n + x - c_m\|^2 + \|c_m - c_n\|^2 = 2(\|x - c_n\|^2 + \|x - c_m\|^2)$$

Donc, en remarquant que $x - c_n + x - c_m = 2\left(x - \frac{1}{2}(c_n + c_m)\right)$, on obtient

$$\|c_m - c_n\|^2 = 2\left(\|x - c_n\|^2 + \|x - c_m\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{1}{2}(c_n + c_m)\right\|^2$$

Vu les choix de c_n et c_m plus le fait que $\frac{1}{2}(c_n + c_m)$ appartient à C, on en déduit

$$\|c_m - c_n\|^2 \leq 2\left(\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\alpha + \frac{1}{m}\right)^2\right) - 4\alpha^2 = \frac{4\alpha}{n} + \frac{4\alpha}{m} + 2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right)$$

Si n et m sont plus grands que n_0, on en déduit que

$$\|c_n - c_m\| \leq \sqrt{\frac{8\alpha}{n_0} + \frac{4}{n_0^2}}$$

Il est clair que le deuxième membre de l'inégalité tend vers 0 lorsque n_0 tend vers l'infini. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si n et m sont plus grands que n_0, alors $\|c_n - c_m\| \leq \varepsilon$. Donc la suite (c_n) est de Cauchy.

Comme C est fermé, la suite (c_n) converge vers un élément $\bar{c}$ de C et $\|x - \bar{c}\| = \alpha$. Donc $\bar{c}$ est la projection de x sur C. □

Dans le résultat suivant, nous caractérisons la projection sur un convexe fermé.

<u>Proposition</u> 6.1.1 *Soit C, un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert E et soit $x \in E$. Alors $c \in C$ est égal à la projection de x sur C si et seulement si $\langle x - c, d - c\rangle \leq 0$ pour tout $d \in C$.*

<u>Preuve</u> Si $c = proj_C(x)$ alors, pour tout $d \in C$, $\|x - c\|^2 \leq \|x - d\|^2$. En utilisant le fait que $x - d = x - c + c - d$, on obtient

$$\|x - c\|^2 \leq \|x - c\|^2 + \|c - d\|^2 + 2\langle x - c, c - d\rangle$$

Donc, $2\langle x-c, d-c\rangle \leq \|c-d\|^2$. Comme C est convexe, pour tout $t\in]0,1]$, $d'=(1-t)c+td$ appartient à C. Donc, en appliquant l'inégalité obtenue ci-dessus à d',

$$2\langle x-c, d'-c\rangle = 2t\langle x-c, d-c\rangle \leq \|c-d'\|^2 = t^2\|c-d\|^2$$

En divisant par t et en faisant tendre t vers 0, on en déduit que $\langle x-c, d-c\rangle \leq 0$.

Montrons maintenant l'implication inverse. Soit $c\in C$ tel que $\langle x-c, d-c\rangle \leq 0$ pour tout $d\in C$. Alors, pour tout $d\in C$,

$$\|x-d\|^2 = \|x-c+c-d\|^2 = \|x-c\|^2 + \|c-d\|^2 + 2\langle x-c, c-d\rangle$$

Or $\|c-d\|^2 + 2\langle x-c, c-d\rangle$ est positif donc $\|x-d\|^2 \geq \|x-c\|^2$ pour tout $d\in C$, donc c est la projection de x sur C. □

Nous donnons maintenant deux propriétés utiles de la projection en utilisant la caractérisation obtenue dans le précédent résultat.

<u>Proposition</u> 6.1.2 *Soit C, un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert E. Alors*

($\imath$) $\mathrm{proj}_C\circ \mathrm{proj}_C = \mathrm{proj}_C$;

($\imath\imath$) *pour tout* $(x,y)\in E$, $\|\mathrm{proj}_C(x)-\mathrm{proj}_C(y)\| \leq \|x-y\|$.

<u>Preuve</u> ($\imath$) est évident car la projection d'un élément de C sur C est lui-même.

Montrons maintenant ($\imath\imath$). D'après la proposition précédente, comme $\mathrm{proj}_C(x)$ et $\mathrm{proj}_C(y)$ sont des éléments de C, nous avons

$$\langle x-\mathrm{proj}_C(x), \mathrm{proj}_C(y)-\mathrm{proj}_C(x)\rangle \leq 0$$

et

$$\langle y-\mathrm{proj}_C(y), \mathrm{proj}_C(x)-\mathrm{proj}_C(y)\rangle \leq 0$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\langle y-\mathrm{proj}_C(y)-x+\mathrm{proj}_C(x), \mathrm{proj}_C(x)-\mathrm{proj}_C(y)\rangle \leq 0$$

d'où on déduit en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz que

$$\|\mathrm{proj}_C(x)-\mathrm{proj}_C(y)\|^2 \leq \langle x-y, \mathrm{proj}_C(x)-\mathrm{proj}_C(y)\rangle \leq \|x-y\|\|\mathrm{proj}_C(x)-\mathrm{proj}_C(y)\|$$

Donc, $\|\mathrm{proj}_C(x)-\mathrm{proj}_C(y)\| \leq \|x-y\|$. □

Nous allons maintenant donner deux résultats qui précisent la caractérisation de la projection dans le cas où le convexe est un cône ou un sous-espace vectoriel.

<u>Proposition</u> 6.1.3 *Soit C, un cône convexe fermé de sommet 0 et soit $x\in E$. $c\in C$ est la projection de x sur C si et seulement si $\langle x-c, c\rangle = 0$ et pour tout $d\in C$, $\langle x-c, d\rangle \leq 0$.*

<u>Preuve</u> Si c est la projection de x sur C, alors d'après la proposition (6.1.1), pour tout $d\in C$, $\langle x-c, d-c\rangle \leq 0$. En prenant $d=0$, on obtient $\langle x-c, -c\rangle \leq 0$. En prenant $d=2c$ qui appartient à C car C est un cône, on obtient $\langle x-c, c\rangle \leq 0$. Donc $\langle x-c, c\rangle = 0$. On conclut alors de la première inégalité que $\langle x-c, d\rangle \leq 0$.

Maintenant, si $c\in C$ vérifie les inégalités, alors en faisant la somme des deux, on déduit que $\langle x-c, d-c\rangle \leq 0$ pour tout $d\in C$. D'après la proposition (6.1.1), c est la projection de x sur C. □

<u>PROPOSITION</u> 6.1.4 *Soit M, un sous-espace vectoriel fermé de E et soit $x \in E$. $c \in M$ est la projection de x sur M si et seulement si $\langle x-c, d\rangle = 0$ pour tout $d \in M$. De plus l'opérateur $\mathrm{p}roj_M$ est linéaire et vérifie $\|\mathrm{p}roj_M\| = 1$ si $M \neq \{0\}$. $\mathrm{p}roj_M$ est appelé la projection orthogonal sur M.*

<u>PREUVE</u> Il est clair que si $c \in M$ vérifie $\langle x-c, d\rangle = 0$ pour tout $d \in M$, alors $\langle x-c, c\rangle = 0$ et donc, d'après la proposition précédente, comme un sous-espace vectoriel est un cas particulier de cône, c est la projection de x sur M.

Réciproquement, si c est la projection de x sur M, alors d'après la proposition précédente, pour tout $d \in M$, $\langle x-c, d\rangle \leq 0$. Mais alors, $-d$ appartient aussi à M et donc, $\langle x-c, -d\rangle \leq 0$. On en conclut donc que $\langle x-c, d\rangle = 0$.

Montrons maintenant que $\mathrm{p}roj_M$ est linéaire. Soit x_1 et x_2, deux éléments de E. Comme M est un espace vectoriel, $\mathrm{p}roj_M(x_1) + \mathrm{p}roj_M(x_2)$ appartient à M. De plus, pour tout $d \in M$,

$$\langle x_1 + x_2 - (\underset{M}{\mathrm{p}roj}(x_1) + \underset{M}{\mathrm{p}roj}(x_2)), d\rangle = \langle x_1 - \underset{M}{\mathrm{p}roj}(x_1), d\rangle + \langle x_2 - \underset{M}{\mathrm{p}roj}(x_2), d\rangle = 0$$

d'après la proposition précédente. De nouveau d'après cette proposition, ceci implique que $\mathrm{p}roj_M(x_1) + \mathrm{p}roj_M(x_2) = \mathrm{p}roj_M(x_1 + x_2)$.

La preuve est identique pour montrer que $\mathrm{p}roj_M(\lambda x) = \lambda\, \mathrm{p}roj_M(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{p}roj_M$ est une application linéaire.

Si $M \neq \{0\}$, il existe $x \in M$, $x \neq 0$. $\mathrm{p}roj_M(x) = x$, donc $\|\mathrm{p}roj_M\| \geq 1$. D'après la proposition (6.1.2), $\|\mathrm{p}roj_M(x) - \mathrm{p}roj_M(0)\| = \|\mathrm{p}roj_M(x)\| \leq \|x\|$. Donc $\|\mathrm{p}roj_M\| \leq 1$. Finalement, on en déduit que $\|\mathrm{p}roj_M\| = 1$. □

6.2 Dualité dans les espaces de Hilbert

Du résultat sur la projection, nous allons déduire un résultat fondamental sur le dual d'un espace de Hilbert. Pour cela, nous définissons l'application J de E dans E' de la façon suivante : pour tout $x \in E$, $J(x)$ est la forme linéaire qui à tout $y \in E$, associe $J(x)(y) = \langle x, y\rangle$.

<u>THÉORÈME</u> 6.2.1 *J est une isométrie linéaire bijective de E dans E'.*

<u>PREUVE</u> Pour tout $x \in E$, il est clair que $J(x)$ est linéaire. Il est aussi évident que la bilinéarité du produit scalaire entraîne que J est linéaire.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour tout $y \in E$, $|J(x)(y)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. Donc $J(x)$ est continue et $\|J(x)\| \leq \|x\|$.

Si $x \neq 0$, $J(x)\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) = \left\langle x, \frac{1}{\|x\|}x\right\rangle = \|x\|$. Donc, $\|J(x)\| \geq \|x\|$. On en conclut donc que $\|J(x)\| = \|x\|$, c'est-à-dire que J est une isométrie.

Montrons pour finir que J est surjectif. Si $f \in E'$ est l'application nulle alors f est l'image par J de 0. Si f est différent de 0, soit M, le noyau de f. Comme f est non nulle, il existe $u \in E$ tel que $f(u) = 1$. Soit $v = u - \mathrm{p}roj_M(u)$. D'après la proposition (6.1.4), pour tout $w \in M$, $\langle v, w\rangle = 0$. Pour tout $x \in E$, $f(x - f(x)v) = f(x) - f(x)f(v) = f(x)(1 - f(u) + f(\mathrm{p}roj_M(u))) = f(x)(1-1+0) = 0$. Donc, $x - f(x)v$ appartient à M. On a donc, $\langle v, x - f(x)v\rangle = 0$. On en déduit que $\langle v, x\rangle = f(x)\|v\|^2$. Donc, $\left\langle \frac{1}{\|v\|^2}v, x\right\rangle = f(x)$. Ceci signifie que $f = J\left(\frac{1}{\|v\|^2}v\right)$, donc J est surjective. □

<u>COROLLAIRE</u> 6.2.1 *Le dual d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.*

<u>Preuve</u> On définit l'application $\langle .,. \rangle_{E'}$ de $E' \times E'$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante : pour tout $(f,g) \in E' \times E'$,

$$\langle f, g \rangle_{E'} = \langle J^{-1}(f), J^{-1}(g) \rangle$$

Comme $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire et que J est linéaire, il est facile de montrer que $\langle .,. \rangle_{E'}$ est un produit scalaire sur E'. De plus, pour tout $f \in E'$, $\langle f, f \rangle_{E'} = \langle J^{-1}(f), J^{-1}(f) \rangle = \|J^{-1}(f)\|^2 = \|f\|^2$. La dernière égalité provient du fait que J est une isométrie. Donc, la norme de E' est bien issue du produit scalaire $\langle .,. \rangle_{E'}$. Donc, E' est un espace de Hilbert car il est complet comme dual d'un espace vectoriel normé. $\square$

Le corollaire suivant montre que, si E est un espace de Hilbert, il est isomorphe à son bidual E'' par l'isométrie canonique i qui à x associe l'élément de E'' défini par : pour tout $f \in E'$, $i(x)(f) = f(x)$. En général, cette application n'est pas surjective.

<u>Corollaire</u> 6.2.2 *Si E est un espace de Hilbert, l'isométrie canonique de E sur E'' est bijective.*

<u>Preuve</u> D'après le corollaire précédent, nous savons que E' est un espace de Hilbert. Nous noterons J', l'isométrie bijective de E' dans E'' associée au produit scalaire sur E'. Pour montrer que i est surjective, nous allons montrer que $i = J' \circ J$.

Pour tout $x \in E$ et pour tout $f \in E'$, $(J' \circ J)(x)(f) = \langle J(x), f \rangle_{E'}$ par définition de J'. Par définition de $\langle .,. \rangle_{E'}$, $\langle J(x), f \rangle_{E'} = \langle x, J^{-1}(f) \rangle = \langle J^{-1}(f), x \rangle = f(x)$. La dernière égalité provient de la définition de J. Donc, pour tout $x \in E$ et pour tout $f \in E'$, $(J' \circ J)(x)(f) = f(x) = i(x)(f)$ ce qui montre $i = J' \circ J$. $\square$

En utilisant l'opérateur J entre E et E', on peut définir la polarité et l'orthogonalité dans un espace de Hilbert sans passer par E'. Soit A, un sous-ensemble non vide de E. Alors, on peut définir le polaire et l'orthogonal de A de la façon suivante :

$$A^\circ = \{y \in E \mid \langle y, a \rangle \leq 0, \text{ pourtout } a \in A\}$$

et

$$A^\perp = \{y \in E \mid \langle y, a \rangle = 0, \text{ pour tout } a \in A\}$$

Les résultats énoncés dans le cadre général se transposent aisément. Donc A° est un cône convexe fermé de sommet 0, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé, $(A^\circ)^\circ = adh(cone\, A)$ et $(A^\perp)^\perp$ est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par A.

6.3 Adjoint d'un opérateur linéaire continue

<u>Théorème</u> 6.3.1 *Soit E et F, deux espaces de Hilbert et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors, il existe un unique élément f^* de $\mathcal{L}(F,E)$ vérifiant pour tout $(x,y) \in E \times F$, $\langle f(x), y \rangle_F = \langle x, f^*(y) \rangle$. De plus, $\|f\| = \|f^*\|$. f^* est appelé l'opérateur adjoint de f.*

<u>Preuve</u> Pour tout $y \in F$, on considère la forme linéaire φ_y sur E qui à x associe $\langle f(x), y \rangle_F$. Cette forme linéaire est continue car f est continue et même $\|\varphi_y\|_{E'} \leq \|f\| \|y\|_F$. Donc, il existe un unique élément de E que nous noterons $f^*(y)$ tel que $\varphi_y(x) = \langle x, f^*(y) \rangle_E$. Il est facile de montrer que l'application qui à y associe $f^*(y)$ est linéaire. Montrons maintenant qu'elle est continue.

Pour tout $(x,y) \in E \times F$,

$$|\langle x, f^*(y) \rangle_E| = |\langle f(x), y \rangle_F| \leq \|f\| \|x\| \|y\|$$

En prenant $x = f^*(y)$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient,

$$\|f^*(y)\|^2 \leq \|f\|\|y\|\|f^*(y)\|$$

Donc, f^* est continue et $\|f^*\| \leq \|f\|$. Comme l'adjoint de f^* est f, on en déduit que $\|f^*\| = \|f\|$. □

PROPOSITION 6.3.1 *Soit E, F et G, trois espaces de Hilbert, soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$, $h \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(*ı*) *Si f est l'application nulle, f^* est l'application nulle ;*

(*ıı*) $(f + g)^* = f^* + g^*$;

(*ııı*) $(\lambda f)^* = \lambda f^*$;

(*ıv*) $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*$;

(*v*) *Si $E = F$ et si f est une isométrie bijective continue, alors $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.*

La preuve de cette proposition est laissée au lecteur.

PROPOSITION 6.3.2 *Soit E et F, deux espaces de Hilbert et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, le noyau de f^* est égal à l'orthogonal de l'image de f et le noyau de f est égal à l'orthogonal de l'image de f^*.*

PREUVE Soit y, un élément du noyau de f^* et soit z appartenant à l'image de f. Il existe $x \in E$ tel que $z = f(x)$. Donc, $\langle y, z\rangle_F = \langle y, f(x)\rangle_F = \langle f^*(y), x\rangle_E = \langle 0, x\rangle_E = 0$. Donc, y appartient à l'orthogonal de l'image de f.

Réciproquement si y appartient à l'orthogonal de l'image de f, pour tout $x \in E$, $0 = \langle y, f(x)\rangle_F = \langle f^*(y), x\rangle_E$. Donc $f^*(y)$ appartient à l'orthogonal de E, donc $f^*(y)$ est nul ce qui montre que y est dans le noyau de f^*.

Comme l'adjoint de l'adjoint d'une application est l'application elle-même, la deuxième partie de la proposition est identique à la première. □

COROLLAIRE 6.3.1 *Soit E et F, deux espaces de Hilbert et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, f est injectif si et seulement si l'image de f^* est dense dans E. De même, f^* est injectif si et seulement si l'image de f est dense dans F. En particulier, si f est surjectif, alors f^* est injectif.*

6.4 Exercices

<u>EXERCICE</u> 6.1 Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique définie positive. Nous notons $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de x et y et $\|x\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Soit E' et E'', respectivement l'espace dual et l'espace bidual de E. On note i l'injection canonique de E dans E'' définie par :

pour tout $f \in E'$, pour tout $x \in E$, $i(x)(f) = f(x)$.

Soit $\hat{E}$, l'adhérence de l'image de E par i dans E''.

1 - Montrer que i est linéaire et qu'elle conserve la norme.

2 - Montrer qu'il existe un produit scalaire $\langle ., .\rangle_{\hat{E}}$ sur $\hat{E}$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle i(x), i(y)\rangle_{\hat{E}} = \langle x, y\rangle.$$

3 - Montrer que pour tout $h \in \hat{E}$, $\|h\|_{E''} = \sqrt{\langle h, h\rangle_{\hat{E}}}$.

4 - Déduire des questions précédentes que $\hat{E}$ muni du produit scalaire $\langle ., .\rangle_{\hat{E}}$ est un espace de Hilbert.

<u>EXERCICE</u> 6.2 Soit H, un espace de Hilbert. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire des vecteurs x et y. Une suite (e_n) de H est orthonormale si pour tout n, $\|e_n\| = 1$ et pour tout n, n', $n \neq n'$, $\langle e_n, e_{n'}\rangle = 0$.

1 - Montrer qu'une suite orthonormale est un système libre de H.

2 - Soit (e_n) une suite orthonormale de H. Pour tout $x \in H$, on note $x^n = \langle x, e_n\rangle$. Montrer que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la projection de x sur l'espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n=0,\dots,n_0}$ est $\sum_{n=0}^{n_0} x^n e_n$. En déduire que $\sum_{n=0}^{n_0} (x^n)^2 \leq \|x\|^2$ et que la suite $(x^n) \in \ell^2$.

3 - On suppose maintenant que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans H. Montrer que la suite $(\sum_{k=0}^{n} x^k e_k)$ converge vers x quand n tend vers $+\infty$. En déduire que $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)^2$. Montrer que pour tout x, y, $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n$.

4 - On suppose que l'espace H est de dimension infinie et qu'il est séparable, c'est-à-dire qu'il existe une suite (a_n) de H qui est dense dans H. Construire une suite orthonormale (e_n) de H telle que l'espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans H. Une telle suite est appelée une base hilbertienne de H. Montrer qu'il existe une isométrie entre H et ℓ^2.

5 - Montrer que H est séparable s'il admet une base hilbertienne dénombrable.

<u>EXERCICE</u> 6.3 Soit H un espace de Hilbert et soit p une application linéaire continue de H dans H. Montrer que p est un projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel fermé de H si et seulement si $p \circ p = p$ et $\|p\| \leq 1$.

<u>EXERCICE</u> 6.4 Soient E un espace de Hilbert et $a \in E \setminus \{0\}$.

1 - Montrer que

$$d\left(x, \{a\}^{\perp}\right) = \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}.$$

2 - Soit F le sous espace vectoriel de $E = L^2([0, 1])$ défini par

$$F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}.$$

Trouver $F^{\perp}$. Soit f définie par $f(x) = e^x$. Calculer $d(f, F)$.

<u>EXERCICE</u> 6.5 Soit H un espace de Hilbert. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire des vecteurs x et y. Soit $A \subset H$. On définit l'orthogonal $A^\perp$ de A comme étant le sous-ensemble de H défini par :

$$A^\perp = \{x \in H \mid \langle x, a\rangle = 0,\ \forall a \in A\}.$$

1 - Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H. Monter que A est un sous-espace vectoriel fermé de H si et seulement si $A = (A^\perp)^\perp$.

2 - Montrer que si A est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de A dans H.

3 - On suppose que A est un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit $a_0 \in H$. Montrer que :

$$\min\{\|a - a_0\| \mid a \in A\} = \max\left\{|\langle a_0, y\rangle| \mid y \in A^\perp,\ \|y\| = 1\right\}.$$

<u>EXERCICE</u> 6.6 Soit H un espace de Hilbert. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire des vecteurs x et y. Soit $L(H)$ l'ensemble des applications linéaires continues de H dans H. Soit $f \in L(H)$.

1 - Montrer qu'il existe un unique élément f^* de $L(H)$ telle que pour tout x, y de H, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$. L'application f^* est appelée l'adjoint de f.

2 - Montrer que $\|f^*\| = \|f\|$. Montrer que l'application qui à f associe f^* est une isométrie linéaire surjective de $L(H)$. Montrer que $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ et que $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ si f est inversible.

3 - Soit $p \in L(H)$. Montrer que p est un projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel fermé de H si et seulement si $p \circ p = p$ et $p^* = p$.

<u>EXERCICE</u> 6.7 Soit H un espace de Hilbert. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire des vecteurs x et y. Soit $f : H \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction convexe propre. La transformée de Fenchel de f est l'application $f^* : H \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ définie par :

$$f^*(x) = \sup\{\langle x, y\rangle - f(y) \mid y \in H\},\ \forall x \in H.$$

1 - Montrer que f^* est convexe et que l'épigraphe de f^* est fermé.

2 - Soit f l'application définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2.$$

Montrer que $f^*(x) = f(x)$.

<u>EXERCICE</u> 6.8 Soit H un espace de Hilbert. Soit g, une application linéaire continue de H dans H. On dit que g est auto-adjointe si $g^* = g$ où g^* est définie à l'exercice (4.7). On dit que g est positive si pour tout $x \in H$, $\langle g(x), x\rangle$ est positif ou nul.

1 - Montrer que si g est auto-adjointe et positive, alors :

$$\forall x,\ y \in H,\ |\langle g(x), y\rangle| \leq \sqrt{\langle g(x), x\rangle}\sqrt{\langle g(y), y\rangle}.$$

2 - Montrer que si g est auto-adjointe et positive, la fonction $\varphi : H \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle g(x), x\rangle$$

est convexe et continue. Montrer que, si g est de plus inversible, alors φ^*, la transformée de Fenchel de φ, est définie par :

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{2}\langle g^{-1}(x), x\rangle.$$

<u>Exercice</u> 6.9 Dans cet exercice, si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $x \cdot y$ est le produit scalaire canonique de x et de y. Soit C, un sous-ensemble convexe fermé non vide et contenu dans $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, n\}$. On suppose de plus que pour tout $(c, u) \in C \times \mathbb{R}^n_+$, $c + u$ appartient à C. On note $\mathbb{R}^n_{++}$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0,\ \forall i = 1, \ldots, n\}$.

1 - Montrer que pour tout $(u, w) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid u \cdot x \leq w\}$ est compact. En déduire que l'ensemble $C(u) = \{c \in C \mid \forall \gamma \in C,\ u \cdot c \leq u \cdot \gamma\}$ est non vide.

Dans la suite, on note $\sigma(u) = \inf\{u \cdot c \mid c \in C\}$.

2 - Montrer que σ est concave, positive, positivement homogène de degré 1 et continue sur $\mathbb{R}^n_{++}$.

3 - Montrer que si $c \in C$, alors $\inf\{u \cdot c - \sigma(u) \mid u \in \mathbb{R}^n_{++}\} \geq 0$.

4 - Soit $d \in \mathbb{R}^n$, $d \notin \mathbb{R}^n_+$. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n_{++}$ tel que $d \cdot u < 0 \leq \sigma(u)$.

5 - Soit $d \in \mathbb{R}^n_+$, $d \notin C$. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{O\}$ tel que $d \cdot u < \inf\{c \cdot u \mid c \in C\}$. Montrer qu'il existe $t > 0$ tel que $d \cdot (u + te) < \sigma(u + te)$ où $e = (1, \ldots, 1)$.

6 - En déduire que

$$C = \left\{c \in \mathbb{R}^n \mid \inf\{u \cdot c - \sigma(u) \mid u \in \mathbb{R}^n_{++}\} \geq 0\right\}$$

7 - Montrer que pour tout $(u, u') \in (\mathbb{R}^n_{++})^2$, pour tout $c \in C(u)$, $\sigma(u') - \sigma(u) \leq c \cdot (u' - u)$.

8 - Soit $u \in \mathbb{R}^n_{++}$ et soit $c \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $u' \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\sigma(u') - \sigma(u) \leq c \cdot (u' - u)$. Montrer que $c \cdot u - \sigma(u) \geq 0$. En déduire que c appartient à C et finalement montrer que c appartient à $C(u)$.

<u>Exercice</u> 6.10 Soit H un espace de Hilbert. Soit $\varphi : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

1 - Montrer que φ est continue si et seulement si il existe $\rho \geq 0$ tel que pour tout $(x, y) \in H \times H$,

$$|\varphi(x, y)| \leq \rho \|x\| \|y\|$$

2 - Montrer qu'on peut associer à tout vecteur x de H un unique élément, noté $f(x)$, de H, tel que pour tout $y \in H$,

$$\varphi(x, y) = \langle f(x), y \rangle$$

3 - Montrer que l'application f définie dans la question précédente est linéaire. Montrer que φ est continue si et seulement si f est continue. On pourra montrer que si f est continue, alors $|\varphi(x, y)| \leq \|f\| \|x\| \|y\|$ et que si φ est continue alors $\|f(x)\| \leq \rho \|x\|$ où ρ est donné par la première question.

4 - On suppose dans cette question que φ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ et que C est un sous-ensemble convexe fermé non vide de H. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $\rho > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in H \times H$,

$$|\varphi(x, y)| \leq \rho \|x\| \|y\| \quad \text{et} \quad \varphi(x, x) \geq \alpha \|x\|^2$$

Le but de cette question est de montrer que pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in H$ tel que

$$\varphi(y, z - y) \geq \langle x, z - y \rangle \quad \text{pour tout } z \in C \tag{1}$$

Dans la suite, on choisit un élément fixé x de H.

a - Soit $t > 0$ et soit $proj_C$ la projection sur C. Montrer que y vérifie l'équation (1) si et seulement si

$$y = \operatorname*{proj}_C(t(x - f(y)) + y)$$

où f est l'application linéaire associée à φ comme dans la question 2.

b - Soit $\bar{t} = \frac{\alpha}{\rho^2}$. On considère l'application g de H dans C définie par :

$$g(z) = \underset{C}{proj}(\bar{t}(x - f(z)) + z)$$

Montrer que g est contractante, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $(z, z') \in H \times H$,

$$\|g(z) - g(z')\| \leq k\|z - z'\|$$

c - Déduire de la question précédente qu'il existe un unique élément y^* de C tel que $y^* = g(y^*)$ et conclure.

5 - On suppose dans cette question que φ vérifie les hypothèses de la question précédente et on note f l'application linéaire associée à φ comme dans la question 2. Montrer, en utilisant la question précédente avec $C = H$, que pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in H$ tel que $f(y) = x$. En déduire que f est une application linéaire continue et bijective et de réciproque continue de H dans lui-même.

Exercice 6.11 E désigne un espace vectoriel réel normé. On dit que E est uniformément convexe si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \|x\|, \|y\| \leq 1, \ \|x - y\| > \varepsilon \Longrightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

1 - Montrer que tout espace de Hilbert est uniformément convexe.

2 - Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathbb{R}^n$ muni de l'une des normes $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1, ..., n\}$ n'est pas uniformément convexe.

Dans la suite E est un Banach uniformément convexe.

3 - Soit C un sous ensemble convexe, fermé et non vide de E. Montrer que pour tout x de E, il existe un vecteur unique $y \in C$ tel que :

$$\|x - y\| = \inf \{\|x - z\|, z \in C\}.$$

(Étudier d'abord le cas $x = 0$.)

4 - Soient $f \in E'$ tel que $\|f\| = 1$ et (x_n) une suite de E tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| = 1$. Montrer que si la suite $(f(x_n))$ converge vers 1, alors, la suite (x_n) est convergente.

5 - Soit $g \in E'$. Montrer que l'application $x \mapsto |g(x)|$ atteint son maximum sur $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$.

6 - Soit ℓ^1 l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de $\mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ muni de la norme $\|u\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$. Soit

$$C = \left\{ u \in \ell^1 \mid u_n \geq 0 \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq 1 \right\}$$

a - Montrer que C est un convexe, fermé et non vide de ℓ^1.

b - Trouver la distance de 0 à C : $d(0, C) = \inf\{\|x\|, x \in C\}$.

Montrer qu'elle n'est pas atteinte. Que peut on dire alors de ℓ^1 ?

<u>Exercice</u> 6.12 (Théorème de Krein-Milman) E, $\|.\|$ désigne un espace vectoriel réel normé. Soit C un sous ensemble de E. Une partie A de C est extrémale si elle est non vide et si :

$$\forall x, y \in C, \forall t \in]0,1[,\ tx + (1-t)y \in A \Longrightarrow x, y \in A.$$

Un vecteur a de C est extrémal si $\{a\}$ est extrémale. On note $Ex(C)$ l'ensemble des vecteurs extrémaux de C.

Soit C une partie non vide et compacte de E. Le but de cette partie est de montrer que $C \subset adh(co(Ex(C)))$.

1 - Montrer que tout vecteur extrémal de C est un élément de la frontière de C.

2 - Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe. Montrer que $\{x \in C \mid f(x) = \sup_{y \in C} f(y)\}$ est une partie extrémale de C, non vide et compacte.

3 - On suppose dans cette question que E est uniformément convexe. Soit $B = \{x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1\}$. Montrer que $Ex(B) = \{x \in E$ tel que $\|x\| = 1\}$.

4 - Soit ℓ^∞ l'ensemble des suites $x = (x_n)$ de $\mathbb{R}$ bornées. On rappelle que $\|x\| = \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$. Soit B_∞ la boule unité fermée de ℓ^∞. Montrer que $Ex(B_\infty) = \{(a_n) \in \ell^\infty$ tel que $|a_n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}\}$. Que peut on dire de ℓ^∞ ?

5 - Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties extrémales fermées de C ordonnée par l'opposée de l'inclusion ($A, B \in \mathcal{F}$, $A \succeq B$ signifie $A \subset B$).

a - Montrer que $\mathcal{F}$ est non vide et inductif.

b - Soient $A \in \mathcal{F}$ et $f \in E'$. Montrer que

$$\{x \in A \text{ tel que } f(x) \geq f(y)\ \forall y \in A\} \in \mathcal{F}.$$

c - En déduire que tout élément maximal de $\mathcal{F}$ est réduit à un élément et que $Ex(C) \neq \emptyset$.

6 - Montrer que $C \subset adh(co(Ex(C)))$. Que dire du cas de l'égalité ?

Exercices complémentaires

<u>Exercice</u> 6.13 Soit H un espace de Hilbert et soit f une application linéaire continue de H dans H. f est inversible à gauche si il existe une application linéaire continue g de H dans H telle que $g \circ f = \mathrm{i}d$.

1 - Montrer que si f est inversible à gauche alors il existe $k > 0$ tel que : $\forall x \in H$, $\|f(x)\| \geq k\|x\|$. En déduire que f est injective.

Soit f une application continue telle qu'il existe $k > 0$ tel que : $\forall x \in H$, $\|f(x)\| \geq k\|x\|$. Le but des questions suivantes est de montrer que f est inversible à gauche.

2 - Soit $\mathrm{I}m\, f$ l'image de f. Soit (y^q) une suite de Cauchy de $\mathrm{I}m\, f$. Soit une suite (x^q) de H telle que pour tout q, $f(x^q) = y^q$. Montrer que la suite (x^q) est de Cauchy et en déduire que la suite (y^q) est convergente. En déduire que le sous-espace $\mathrm{I}m\, f$ est fermé.

3 - Montrer que f est une bijection de H dans $\mathrm{I}m\, f$ et en déduire qu'il existe une application linéaire continue γ de $\mathrm{I}m\, f$ dans H telle que $\gamma \circ f = \mathrm{i}d$.

4 - Pour tout $x \in H$, il existe un unique couple $(y, z) \in \mathrm{I}m\, f \times (\mathrm{I}m\, f)^{\perp}$ tel que $x = y + z$. On définit l'application $g : H \to H$ par $g(x) = \gamma(y)$. Montrer que g est un inverse à gauche de f.

5 - Soit ℓ^2 l'espace de Hilbert des suites réelles telles que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty$ muni du produit scalaire $\langle (u_n), (v_n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. Soit (w_n) une suite réelle convergeant vers 0 telle que $w_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit f l'application linéaire de ℓ^2 dans l'ensemble des suites réelles définie par $f((u_n)) = (w_n u_n)$. Montrer que f est une application continue injective de ℓ^2 dans lui-même. Montrer que f n'est pas inversible à gauche.

<u>Exercice</u> 6.14 Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. On dit qu'une application linéaire de E dans F est compacte si l'image de la boule unité fermée de E est relativement compacte dans F. On note $L_0(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F.

1 - Montrer que la définition est équivalente si on remplace boule unité fermée par boule unité ouverte. Montrer que $L_0(E, F)$ est un sous espace vectoriel de $L(E, F)$.

2 - Soit $f \in L(E, F)$. Montrer que si E ou bien $f(E)$ est de dimension finie (on dit alors que f est de rang fini), alors f est compacte.

3 - Le but de cette question est de montrer que si F est un Hilbert, alors tout $f \in L(E, F)$ est limite d'opérateurs linéaires continus de rang fini.

a - Soit B la boule unité de E. Montrer que :

$$\forall \varepsilon,\ \exists (y_i^\varepsilon)_{i=1,\ldots,n_\varepsilon} \text{ tel que : } f(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(y_i^\varepsilon, \varepsilon).$$

Montrer que

$$\inf_{i=1,\ldots,n_\varepsilon} \|f(x) - y_i^\varepsilon\| \leq \varepsilon,\ \forall x \in B.$$

b - Soient F_ε le sous espace vectoriel engendré par $(y_i^\varepsilon)_{i=1,\ldots,n_\varepsilon}$ et P_ε le projecteur orthogonal sur F_ε. Montrer que $\|f - P_\varepsilon \circ f\| \leq \varepsilon$.

c - Conclure.

4 - Soit f une application linéaire compacte de E dans E. Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de f, alors, le sous espace propre associé à λ est de dimension finie.

5 - Si E et F sont des espaces de Banach, montrer que $L_0(E, F)$ est fermé dans $L(E, F)$. En déduire une réciproque de la question 3.

<u>Exercice</u> 6.15 Soit H un espace de Hilbert. A tout élément f de $L(H)$, on associe son ensemble résolvant, noté $e(f)$, qui est l'ensemble des réels λ tels que $f-\lambda\, id$ est inversible. L'application qui à $\lambda \in e(f)$ associe $(f-\lambda\, \mathrm{id})^{-1}$ est appelée résolvante de f et notée $R_f(\lambda)$. On appelle spectre de f, noté $\sigma(f)$, le complémentaire de $e(f)$ dans $\mathbb{R}$. On note f^* l'adjoint de f.

1 - Montrer que $\sigma(f)$ contient les valeurs propres de f, c'est-à-dire l'ensemble des réels λ tel que le noyau de $f-\lambda\, id$ est non réduit au vecteur nul. L'ensemble des valeurs propres est noté $\sigma_p(f)$ et est appelé spectre ponctuel de f.

2 - Montrer qu'en dimension finie $\sigma_p(f)=\sigma(f)$.

3 - Dans cette question : $H=\ell^2$. Soit (v_n), une suite de ℓ^∞. On définit l'application f par

$$f((u_n)_{n\in\mathbb{N}})=(v_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Montrer que $\|f\|=\|(v_n)\|_\infty$ et déterminer $\sigma_p(f)$ et $\sigma(f)$.

4 - Montrer que pour tout $f\in L(H)$, $\sigma(f)$ est compact et : $\sigma(f)\subset[-\|f\|,\|f\|]$.

5 - Montrer que la résolvante R_f est une application $\mathcal{C}^\infty$ de $e(f)$ dans $L(H)$ et vérifie l'identité :

$$R_f(\lambda_1)-R_f(\lambda_2)=(\lambda_1-\lambda_2)R_f(\lambda_1)\circ R_f(\lambda_2).$$

6 - Montrer que pour tout $f\in L(H)$, on a $\sigma(f^*)=\sigma(f)$. Montrer que $\sigma_p(f^*)$ peut être distinct de $\sigma_p(f)$.

7 - Montrer que pour tout $f\in L(H)$ et tout polynôme P, on a :

$$\sigma(P(f))P(\sigma(f))\subset\sigma(P(f)) \text{ et } P(\sigma_p(f))\subset\sigma_p(P(f)).$$

8 - Montrer que si f est auto-adjointe et positive, alors $\sigma(f)$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

9 - Montrer que si f est auto-adjoint et si H est séparable, alors $\sigma_p(f)$ est au plus dénombrable.

10 - Montrer que si $f\circ f^*=id$, alors $\sigma(f)\subset\{-1,1\}$.

<u>Exercice</u> 6.16 Soit H un espace de Hilbert. Si x et y sont deux vecteurs de H, leur produit scalaire est noté $\langle x,y\rangle$. Soit g une application linéaire continue et autoadjointe de H dans H. On suppose qu'il existe $c>0$ tel que pour tout $x\in H$, $\langle g(x),x\rangle\geq c\langle x,x\rangle$.

1 - Soit M la norme de g et soit $\lambda=\frac{c}{M^2}$. Montrer que $\mathrm{i}d-\lambda g$ est une application de norme strictement plus petite que 1. En déduire que pour tout $y\in H$, l'application affine de H dans H qui à x associe $x+\lambda(y-g(x))$ a un unique point fixe.

2 - Déduire de la question précédente que g est bijective.

3 - Soit $y\in H$ et soit $\bar{x}$ vérifiant $g(\bar{x})=y$. Montrer que pour tout $x\in H$,

$$\frac{1}{2}\langle g(x),x\rangle-\langle y,x\rangle\geq-\frac{1}{2}\langle g(\bar{x}),\bar{x}\rangle.$$

4 - Soit C un sous-ensemble convexe fermé non vide de H. Soit $\mathrm{p}roj_C$ la projection sur C. Montrer que pour tout $y\in H$, l'application de H dans C qui à x associe $\mathrm{p}roj_C(x+\lambda(y-g(x)))$ a un unique point fixe noté $x_C(y)$ qui appartient à C.

5 - Montrer que pour tout $y\in H$ et pour tout $x\in C$,

$$\frac{1}{2}\langle g(x),x\rangle-\langle y,x\rangle\geq\frac{1}{2}\left\langle g(x_C(y)),x_C(y)\right\rangle-\left\langle y,x_C(y)\right\rangle.$$

Chapitre 7

Applications : Théorèmes de Points fixes

Ce chapitre contient deux parties. La première concerne les théorèmes de point fixe pour les applications. Nous montrons cette série de théorèmes à partir du lemme de Sperner. Dans la deuxième partie, on généralise les théorèmes de point fixe au cadre des correspondances ou applications multivoques.

Nous considérons, sauf mention explicite, des applications définies sur un ensemble X (de $\mathbb{R}^n$) et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

7.1 Une première série d'équivalences

Soit B, la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ ($B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$). Le théorème suivant est dû à Brouwer (1912). La démonstration d'origine fait appel à des outils mathématiques sophistiqués. La démonstration donnée dans ce chapitre repose sur le lemme KKM (1929) qui est une conséquence du lemme de Sperner (1928).

<u>Théorème</u> 7.1.1 *(Brouwer) Soit $f : B \to B$, une application continue. Alors, il existe un point fixe $\overline{x}$ de f, c'est-à-dire, tel que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.*

<u>Remarques</u> :

- L'unicité n'est en général pas satisfaite sous les hypothèses du théorème ci-dessus. Elle sera vérifiée si f est contractante, c'est-à-dire, s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que, pour tout $x, y \in B$, nous avons $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$. En effet, considérons deux points fixes de f, x' et x''. Nous aurions $\|x' - x''\| = \|f(x') - f(x'')\| \leq k\|x' - x''\|$ et dès lors $(1 - k)\|x' - x''\| \leq 0$, ce qui implique que $x' = x''$. □
- Dans le cas de la dimension 1, ce théorème est une conséquence immédiate du théorème des valeurs intermédiaires. Il suffit de considérer $g(x) = f(x) - x$. Nous avons $g(-1) \geq 0, g(1) \leq 0$ et g continue. Dès lors, il existe $\overline{x} \in [-1, 1]$ tel que $g(\overline{x}) = f(\overline{x}) - \overline{x} = 0$.

Le résultat suivant montre que le théorème de point fixe reste vrai pour un sous-ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, si C est homéomorphe à B, alors on peut en déduire un résultat de point-fixe pour C.

<u>Théorème</u> 7.1.2 *Soit un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$, compact convexe et non vide et une application $f : C \to C$ une application continue. Alors, il existe $\overline{x}$ tel que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.*

<u>Preuve</u> : D'après le théorème 5.3.3, C est homéomorphe à la boule unité de dimension égale à la dimension de $\mathrm{A}ff(C)$, c'est-à-dire, il existe une application bijective et continue $h : C \to B$ telle que

h^{-1} soit également continue. Considérons l'application $\tilde{f} := h^{-1} \circ f \circ h$ de B à valeurs dans B. Cette application est continue comme composée d'applications continues. D'après le théorème de Brouwer, $\tilde{f}$ possède un point fixe $\overline{x}$. Dès lors, $\phi(\overline{x}) = f(\phi(\overline{x}))$ et f possède un point fixe $\phi(\overline{x}) \in C$. □

<u>Définition</u> 7.1.1 Soit C un sous-ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in C$. Nous définissons le cône tangent à C en x comme étant l'ensemble

$$T_C(x) := \mathrm{a}dh\,\{\lambda(y-x) \mid y \in C, \lambda > 0\}$$

et le cône normal à C en x par

$$N_C(x) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x\rangle \geq \langle p, y\rangle \;\; \forall y \in C\}.$$

<u>Théorème</u> 7.1.3 *(Existence de point critique) Soit C un sous-ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $g : C \to \mathbb{R}^n$ une application continue vérifiant la condition tangentielle :*

$$(CT) \quad \forall x \in C,\; g(x) \in T_C(x).$$

Alors, g admet un point critique : il existe $\overline{x} \in C$ tel que $g(\overline{x}) = 0$.

<u>Remarque</u> : Il est à noter que la condition tangentielle (CT) n'apporte aucune contrainte lorsque $x \in \mathrm{int}\, C$ puisque, dans ce cas, $T_C(x) = \mathbb{R}^n$. On peut donc réécrire de manière équivalente cette condition comme suit :

$$(CT) \quad \forall x \in \mathrm{Fr}\, C,\; g(x) \in T_C(x).$$

<u>Preuve</u> : Considérons l'application $f : C \to C$ définie par $f(x) = \mathrm{p}roj_C(x+g(x))$. Par continuité de g et de la projection sur C, l'application f est continue. Elle possède donc, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe $\overline{x} \in C$ tel que $\overline{x} = \mathrm{p}roj_C(\overline{x} + g(\overline{x}))$. Or, par définition de la projection sur C, nous avons, $\forall y \in C$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle y - \mathrm{p}roj_C(x), x - \mathrm{p}roj_C(x)\rangle \leq 0$. Dès lors, pour tout $y \in C$, $\langle y - \overline{x}, \overline{x} + g(\overline{x}) - \overline{x}\rangle \leq 0$, c'est-à-dire, pour tout $y \in C$, $\langle y - \overline{x}, g(\overline{x})\rangle \leq 0$. Mais nous avons $g(\overline{x}) \in T_C(\overline{x})$ et dès lors $g(\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(y_n - x)$ avec $\lambda_n > 0$, $y_n \in C$. Nous en déduisons que $\lambda_n \langle y_n - \overline{x}, g(\overline{x})\rangle \leq 0$ et, par passage à la limite, $-\|g(\overline{x})\|^2 \leq 0$ et enfin $g(\overline{x}) = 0$. □

Ce théorème d'existence d'un point critique admet pour corollaire un théorème de point fixe "plus fort" que le théorème de Brouwer énoncé précédemment.

<u>Corollaire</u> 7.1.1 *(Point fixe des applications rentrantes) Soit C un sous-ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}^n$ une application continue vérifiant la condition :*

$$(CTR) \quad \forall x \in \mathrm{Fr}\, C,\; f(x) \in \{x\} + T_C(x).$$

Alors, f admet un point fixe.

<u>Preuve</u> : Nous allons déduire le théorème de point fixe des applications rentrantes du théorème d'existence d'un point critique. Considérons l'application $g : C \to \mathbb{R}^n$ définie par $g(x) = f(x) - x$. Cette application est continue et vérifie manifestement la condition tangentielle (CT). L'application g admet donc un point critique $\overline{x}$ qui est un point fixe de f. □

<u>Corollaire</u> 7.1.2 *(Point fixe des applications sortantes) Soit C un sous-ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $g : C \to \mathbb{R}^n$ une application continue vérifiant la condition :*

$$(CTS) \quad \forall x \in \mathrm{Fr}\, C,\, g(x) \in x - T_C(x).$$

Alors, g admet un point fixe.

<u>Preuve</u> : Soit g une application continue vérifiant la condition tangentielle (CTS). Définissons l'application f par $f(x) := 2x - g(x)$. Cette application f est continue et vérifie la condition tangentielle (CTR). Dès lors, d'après le théorème de point fixe des applications rentrantes, f possède un point fixe $\overline{x}$ qui est manifestement un point fixe de g. $\square$

<u>Théorème</u> 7.1.4 *(Inéquation variationnelle) Soit C un sous-ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors, il existe $\overline{x} \in C$ tel que*

$$(IV) \quad 0 \in f(\overline{x}) - N_C(\overline{x}).$$

<u>Lemme</u> 7.1.1 *Le cône normal à C en x est le cône polaire négatif du cône tangent à C en x, c'est-à-dire :*

$$N_C(x) = T_C(x)^\circ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, v\rangle \leq 0,\ \forall v \in T_C(x)\}.$$

<u>Preuve du lemme</u> : En effet, nous avons $T_C(x)^\circ \subset N_C(x)$ car $y - x \in T_C(x)$ si $y \in C$. Nous montrons maintenant que $N_C(x) \subset T_C(x)^\circ$. Soient $p \in N_C(x)$ et $v \in T_C(x)$. Nous devons prouver que $\langle p, v\rangle \leq 0$. Nous avons, par définition, $v = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(y_n - x)$ avec $\lambda_n > 0$, $y_n \in C$ et $\langle p, x - y_n\rangle \geq 0$. Par conséquent, en multipliant cette inégalité par λ_n et en passant à la limite, nous obtenons le résultat souhaité. $\square$

<u>Preuve</u> : (Inéquation variationnelle) Nous allons déduire ce théorème du théorème de point fixe de Brouwer. Soit $f : C \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Considérons l'application $g : C \to C$ définie par $g(x) = \mathrm{p}roj_C(x + f(x))$. Par continuité de f et de la projection sur un sous-ensemble compact convexe, l'application g est continue et possède, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe $\overline{x}$. Or, par définition de la projection sur C, nous avons, pour tout $y \in C$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle y - \mathrm{p}roj_C(x), x - \mathrm{p}roj_C(x)\rangle \leq 0$. Dès lors, pour tout $y \in C$, $\langle y - \overline{x}, \overline{x} + f(\overline{x}) - \overline{x}\rangle \leq 0$, c'est-à-dire, pour tout $y \in C$, $\langle y - \overline{x}, f(\overline{x})\rangle \leq 0$ et donc $f(\overline{x}) \in N_C(\overline{x})$. Nous avons donc montré qu'il existe $\overline{x} \in C$ tel que $0 \in f(\overline{x}) - N_C(\overline{x})$. $\square$

<u>Proposition</u> 7.1.1 *Le théorème d'existence pour les inéquations variationnelles implique le théorème d'existence d'un point critique.*

<u>Preuve</u> : (Existence de point critique) Soit $g : C \to \mathbb{R}^n$ une application continue vérifiant la condition tangentielle (CT). Il existe, d'après le théorème d'existence pour les inéquations variationnelles, $\overline{x} \in C$ tel que $g(\overline{x}) \in N_C(\overline{x}) \cap T_C(\overline{x})$. Nous avons, dès lors, $\langle g(\overline{x}), g(\overline{x})\rangle \leq 0$ et donc $g(\overline{x}) = 0$. $\square$

<u>Définition</u> 7.1.2 On appelle rétraction de B sur C toute application $r : B \to C$ continue telle que $r(x) = x$ pour tout $x \in C$.

La démonstration d'origine de Brouwer reposait sur le "lemme de non rétraction", le théorème qui suit précise que les deux résultats sont équivalents.

<u>Théorème</u> 7.1.5 *Le théorème de point fixe de Brouwer est équivalent au lemme de non rétraction : Il n'existe pas de rétraction de B sur* $\mathrm{Fr}\, B$.

<u>Preuve</u> : Montrons, dans un premier temps, que le lemme de non-rétraction implique le théorème de Brouwer. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une application continue f de B à valeurs dans B telle que, pour tout $x \in B$, $f(x) \neq x$. Définissons $g(x) = x + t(x)(x - f(x))$ avec $t(x) \geq 0$ tel que $\|g(x)\| = 1$ (voir figure 7.1). L'application $g(x)$ est continue par continuité de f (par hypothèse) et de t (racine d'un polynôme du second degré dont les coefficients sont des fonctions

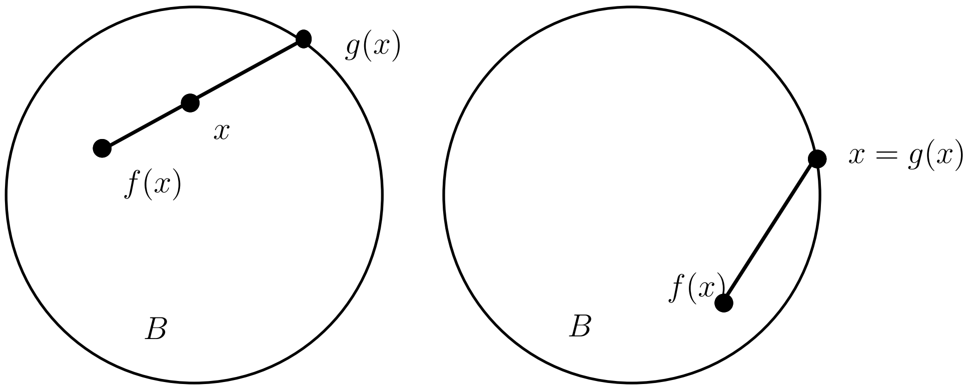

FIG. 7.1 – application g dans le lemme de non rétraction

continues de x). De plus, pour tout $x \in \mathrm{Fr}\, B$, $g(x) = x$. Nous avons donc construit une rétraction de B dans B, ce qui contredit le théorème de non-rétraction.

Montrons maintenant la réciproque. Supposons qu'il existe une rétraction r de B dans B. Considérons $f(x) = -r(x)$. L'application f de B dans B est continue et admet donc, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe $\overline{x}$ vérifiant $\overline{x} = -r(\overline{x})$. Dès lors, $-\overline{x} = r(\overline{x}) \in \mathrm{Fr}\, B$. De plus, puisque $\overline{x} \in \mathrm{Fr}\, B$, nous avons : $r(\overline{x}) = \overline{x}$ et donc $\overline{x} = 0$, ce qui contredit $\overline{x} \in \mathrm{Fr}\, B$. □

7.2 Le lemme de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz

Nous montrer que les théorèmes de points fixes précédents sont équivalents aux différentes versions du lemme de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (1929) que nous allons d'abord commencer par énoncer.

Nous nous plaçons, d'abord dans un sous-cas du cadre de n points $a_1, \dots, a_n$ affinement indépendants de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire, tels que les vecteurs $a_2 - a_1, \dots, a_n - a_1$ soient indépendants. Dans un second temps, nous considérerons le cas de n points quelconques de $\mathbb{R}^p$. Enfin, nous étendrons le principe KKM fermé au cas d'un d'un espace de dimension quelconque.

<u>DÉFINITION</u> 7.2.1 Soient $a_1, \dots, a_n$, n points de $\mathbb{R}^p$. Nous définissons alors les ensembles suivants :

$$S_I = co\{a_i \mid i \in I\}, \quad \forall I \subset \{1, \dots, n\};$$

$$S_{-i} = co\{a_j \mid j \neq i\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\};$$

$$S = co\{a_i \mid i = 1, \dots, n\}.$$

<u>DÉFINITION</u> 7.2.2 Soit $F = (F_1, \dots, F_n)$ une collection de n parties de $\mathbb{R}^p$. On dit que F est un KKM-recouvrement de $co\{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ (ou KKM-recouvrement s'il n'y a pas de risque d'ambiguïtés) si

$$\text{pour tout } I \subset \{1, \dots, n\},\ S_I \subset \bigcup_{i \in I} F_i.$$

Cette notion due à Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz particularise la notion de recouvrement de $co\{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$.

7.2.1 Le cas du simplexe unité

Définition 7.2.3 Dans le cas particulier où $a_i = e_i$ ($i^{\text{ème}}$ vecteur de base), l'ensemble S est appelé simplexe unité de $\mathbb{R}^n$, il peut s'écrire

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Les ensembles S_I sont alors $S_I = \{x \in S \mid \forall i \notin I, x_i = 0\}$. et les ensembles S_{-i} sont $\{x \in S \mid x_i = 0\}$. Notons que S est convexe compact et que les n points sont affinement indépendants. Nous utiliserons pour tout $x \in S$ la notation $J(x) = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid x_i > 0\}$. Pour le point x, les composantes à l'extérieur de $J(x)$ sont nulles.

Théorème 7.2.1 *Les trois énoncés suivants sont équivalents :*
- *($\imath$) Principe KKM fermé : Soit $F = (F_1, \ldots, F_n)$ une famille de fermés qui constitue un KKM-recouvrement de S. Alors, $(\bigcap_{i=1}^n F_i) \cap S \neq \emptyset$.*
- *($\imath\imath$) Si f est une application continue de S dans S telle que pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $f(S_I) \subset S_I$, alors f est surjective.*
- *($\imath\imath\imath$) Principe KKM ouvert : Soit $G = (G_1, \ldots, G_n)$ une famille d'ouverts qui constitue un KKM-recouvrement de S. Alors, $(\bigcap_{i=1}^n G_i) \cap S \neq \emptyset$.*

Preuve :

Première étape : ($\imath$) $\Rightarrow$ ($\imath\imath$).
Soit f vérifiant les hypothèses de ($\imath\imath$), et soit $y \in S$. Nous allons montrer que y possède un antécédent. On pose $F_i = \{x \in S \mid f_i(x) \geq y_i\}$, par définition les F_i sont fermés et l'intersection des F_i est l'ensemble des antécédents de y. Il suffit de montrer que les F_i constituent un KKM-recouvrement.

En effet, soit $I \subset \{1, \ldots, n\}$, et $x \in S_I$. Puisque $f(x) \in S_I$, on a $1 = \sum_{i \in I} f_i(x) \geq \sum_{i \in I} y_i$, donc il existe $i \in I$ tel que $f_i(x) \geq y_i$, c'est-à-dire $x \in F_i$. Donc $S_I \subset \bigcup_{i \in I} F_i$. □

Seconde étape : ($\imath\imath$) $\Rightarrow$ ($\imath\imath\imath$).
Soit G un KKM-recouvrement ouvert. Considérons $G'_i = G_i \cap (S_{-i})^c = \{x \in G_i \mid x_i > 0\}$. Nous allons montrer que Les G'_i constituent un recouvrement ouvert de S (c'est même en fait un KKM-recouvrement). Soit $x \in S$, par définition de $J(x)$, pour tout $j \in J(x)$, $x \in (S_{-j})^c$. De plus, puisque $x \in S_{J(x)}$, par propriété du KKM-recouvrement (G_i), il existe $k \in J(x)$ tel que $x \in G_k$, donc x appartient également à G'_k. Puisque les G'_i constituent un recouvrement ouvert de S, on peut définir la fonction continue f de S dans S par pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$f_i(x) = \frac{d(x, (G'_i)^c)}{\sum_{j=1}^n d(x, (G'_j)^c)}$$

Cette fonction vérifie les hypothèses de ($\imath\imath$), car pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$, et tout x de S_I, on a pour tout $i \notin I$, $x_i = 0$ donc $x \notin G'_i$ donc $f_i(x) = 0$. C'est-à-dire $f(x) \in S_I$.

En utilisant ($\imath\imath$), on en déduit que f est surjective donc en particulier, il existe $\overline{x} \in S$ tel que $f(x) = (1/n, \ldots, 1/n)$. Par construction, ce point appartient à l'intersection de la famille G'_i, donc à fortiori, les G_i possèdent une intersection non nulle (qui rencontre S). Ceci termine la démonstration de cette seconde étape. □

Troisième étape : ($\imath\imath\imath$) $\Rightarrow$ ($\imath$).
Soit F un KKM-recouvrement fermé. Définissons la suite de KKM-recouvrement ouvert G^k par $G^k_i = B(F_i, 1/k)$. Donc, en utilisant ($\imath\imath\imath$), il existe $\overline{x}^k \in (\bigcap_{i=1}^n G^k_i) \cap S$. On peut supposer , sans perte

de généralité, que cette suite converge vers $\overline{x}$. Mais puisque $d(\overline{x}_k, F_i) \leq 1/k$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, en passant à la limite on en déduit que $\overline{x} \in (\bigcap_{i=1}^n F_i) \cap S$ par un argument de fermeture. Ceci termine la démonstration de cette troisième étape. □

<u>PROPOSITION</u> 7.2.1 *Le théorème de Brouwer implique le lemme K.K.M.*

<u>PREUVE</u> Supposons que la conclusion du lemme KKM soit fausse, c'est-à-dire que $\cap_{i=1}^p F_i = \emptyset$. Pour $i = 1, \ldots, p$, on définit l'application φ_i de S dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = d(x, F_i)$. Les applications φ_i sont positives et continues et $g(x) := \sum_{i=1}^p \varphi_i(x) > 0$ car $\cap_{i=1}^p F_i = \emptyset$. Soit f, l'application du simplexe S dans lui-même définie par :

$$f(x) = \left(\frac{1}{g(x)}\right)(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

D'après le théorème de Brouwer, f a un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $\overline{x} \in K$, tel que $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Donc, pour tout i, $g(\overline{x})\overline{x}_i = \varphi_i(\overline{x})$. Nous allons montrer que ceci est impossible. Par définition de $J(\overline{x})$, $\overline{x} \in S_{J(\overline{x})}$, donc puisque les F_i constituent un KKM-recouvrement, il existe $j \in J(\overline{x})$ tel que $\overline{x} \in F_j$. Ceci implique que $\varphi_j(\overline{x}) = 0$ et par conséquent $\overline{x}_j = 0$. Ce qui est contradictoire avec le fait que $j \in J(\overline{x})$.

Pour montrer directement la réciproque, on peut remarquer que si f est continue de S dans S, les ensembles $F_i := \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid f_i(x) \leq x_i\}$ constituent un KKM-recouvrement fermé et qu'un point dans l'intersection de ces ensembles est un point-fixe de f. □

7.2.2 Le cas de n points quelconques

Soient $a_1, \ldots, a_n$, n points quelconques de E espace vectoriel normé (éventuellement de dimension infinie). On peut généraliser les notions introduites au paragraphe précédent :

<u>THÉORÈME</u> 7.2.2 *Les deux énoncés de KKM du théorème précédent restent équivalents dans le cadre de n points quelconques de E.*

<u>PREUVE</u> : Montrons que les énoncés de KKM reste vrai pour n points quelconques $a_1, \ldots, a_n$ de E. Soit $\{e_i\}_i$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Définissons $\phi: \mathbb{R}^n \to E$ par $\phi(x) = \phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$. L'application ϕ est linéaire, l'espace de départ est de dimension finie donc ϕ continue. En posant $F'_i = \phi^{-1}(F_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) \in F_i\}$, les relations suivantes sont trivialement satisfaites :

(1) F_i fermé (respectivement ouvert) implique F'_i fermé (respectivement ouvert) (par continuité de ϕ) ;

(2) (F_i) KKM-recouvrement de co$\{a_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ implique (F'_i) KKM-recouvrement de co$\{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. En effet, si $x \in co\{e_i \mid i \in I\}$, alors $\phi(x) \in$ co$\{a_i \mid i \in I\} \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$. Il existe donc $k \in I$ tel que $\phi(x) \in F_k$, c'est-à-dire, tel que $x \in F'_k$.

Nous pouvons donc déduire du théorème KKM sur le simplexe unité qu'il existe $\overline{x} \in (\bigcap_{i=1}^n F'_i) \cap S$. Dès lors, $\phi(\overline{x}) \in (\bigcap_{i=1}^n F_i) \cap co(a_1, \ldots, a_n)$ et le théorème KKM "sur les a_i" est démontré. □

7.2.3 Le cas d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^p$

On peut généraliser le théorème de KKM en dimension infinie.

<u>THÉORÈME</u> 7.2.3 *(Ky Fan) Soit X un sous-ensemble non-vide d'un espace vectoriel normé E. On associe un fermé $F(x)$ de E à tout x de X. S'il existe un $x \in X$ tel que $F(x)$ est compact et si,*

pour tout n et pour tout ensemble de n points $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de X, nous avons

$$\text{co}\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i),$$

alors $\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$.

Remarque 7.2.1 *Il est à noter que ce théorème n'est plus vérifié si l'on ne travaille pas avec des fermés. Un contre-exemple est le suivant :*
$X = [0,1]$; $G(0) = [0,1]$, $G(1) = \mathbb{R}$ et $G(x) =]0, x]$ pour $x \in]0,1[$.

Proposition 7.2.2 *Le lemme K.K.M. implique le théorème de Ky Fan.*

Preuve Supposons que $\cap_{x \in X} F(x) = \emptyset$. En remarquant que $\cap_{x \in X} F(x) = \cap_{x \in X}(F(x) \cap F(x_0))$ et en utilisant l'hypothèse que $F(x_0)$ est compact, on en déduit qu'il existe une famille finie $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de X telle que $\emptyset = \cap_{i \in I}(F(x_i) \cap F(x_0)) = F(x_0) \cap (\cap_{i \in I} F(x_i))$. Vu que l'hypothèse du théorème de Ky Fan implique que l'hypothèse du lemme K.K.M. est satisfaite pour $(x_0, (x_i)_{i \in I})$ et $(F(x_0), (F(x_i)_{i \in I})$, ceci contredit le lemme K.K.M. □

Théorème 7.2.4 *(Inégalité de Fan) Soit E, un espace vectoriel normé et soit X, un sous-ensemble convexe compact non vide de E. Soit f, une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

a) Pour tout $x \in X$, l'application $y \to f(x, y)$ est semi-continue inférieurement sur X ;

b) Pour tout $y \in X$, l'application $x \to f(x, y)$ est quasi-concave sur X.

Alors, $\min_{y \in X}\{\sup\{f(x, y) \mid x \in X\}\} \leq \sup\{f(x, x) \mid x \in X\}$.

Dans le résultat précédent, on peut mettre un minimum dans l'inégalité car la fonction $y \to \sup\{f(x, y) \mid x \in X\}$ est s.c.i. (comme supremum de fonctions s.c.i.) et X est compact donc, l'infimum est atteint.

Proposition 7.2.3 *Le théorème de Ky Fan implique l'inégalité de Fan.*

Preuve Soit $\alpha = \sup\{f(x, x) \mid x \in X\}$. Si $\alpha = +\infty$, l'inégalité est évidemment satisfaite. Si α est fini, nous considérons pour tout $x \in X$, l'ensemble $F(x)$ suivant :

$$F(x) = \{y \in X \mid f(x, y) \leq \alpha\}$$

$F(x)$ est fermé car l'application $y \to f(x, y)$ est s.c.i. et donc compact car X est compact. Soit $(x_i)_{i \in I}$, une famille finie d'éléments de X. Montrons que $\text{co}\{x_i \mid i \in I\} \subset \cup_{i \in I} F(x_i)$.

Soit $y = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$. Puisque

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i, y) \leq \sum_{i \in I} f(\lambda_i x_i, y) = f(y, y) \leq \alpha,$$

il existe $i \in I$ tel que $f(x_i, y) \leq \alpha$, donc $y \in F(x_i)$.

Donc, X et la famille $(F(x))_{x \in X}$ vérifient les hypothèses du théorème de Ky Fan. Par conséquent, il existe $\overline{y} \in \cap_{x \in X} F(x)$. Ceci est équivalent à $f(x, \overline{y}) \leq \alpha$ pour tout $x \in X$. Donc, $\sup\{f(x, \overline{y}) \mid x \in X\} \leq \alpha$ ce qui implique l'inégalité de Fan. □

Proposition 7.2.4 *L'inégalité de Fan implique le théorème de Brouwer.*

<u>PREUVE</u> Soit φ, une application continue de la boule unité fermée dans elle-même. Soit f de $\overline{B}(0,1) \times \overline{B}(0,1)$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x, y) = (y - \varphi(y)) \cdot (y - x)$$

f est continue et donc s.c.i. par rapport à y et affine en x donc quasi-concave par rapport à x. D'après l'inégalité de Fan, il existe $\overline{y} \in \overline{B}(0,1)$ tel que

$$\sup\{(\overline{y} - \varphi(\overline{y})) \cdot (\overline{y} - x) \mid x \in \overline{B}(0,1)\} \leq \sup\{(x - \varphi(x)) \cdot (x - x) \mid x \in \overline{B}(0,1)\} = 0$$

Donc, $(\overline{y} - \varphi(\overline{y})) \cdot (\overline{y} - x) \leq 0$ pour tout $x \in \overline{B}(0,1)$. En prenant, $x = \varphi(\overline{y})$, on en déduit que $\|\overline{y} - \varphi(\overline{y})\|^2 \leq 0$. Donc $\varphi(\overline{y}) = \overline{y}$ et φ a un point fixe. $\square$

On remarque aisément que dans la démonstration ci-dessus, on a utilisé que la continuité du produit scalaire et la compacité de B (boule unité fermée). Donc, on déduit de l'inégalité de Fan (donc du théorème de Brouwer), le résultat suivant en utilisant la même preuve que ci-dessus.

<u>THÉORÈME</u> 7.2.5 *Soit E, un espace de Hilbert, soit C, un sous-ensemble convexe compact non-vide de E, et soit f, une application continue de C dans lui-même. Alors f a un point fixe.*

<u>COROLLAIRE</u> 7.2.1 *Soit E, un espace de Hilbert, soit C, un sous-ensemble convexe compact non-vide de E, et soit f, une application continue de C dans E vérifiant la propriété suivante (voir figure 7.2) :*

$$\forall x \in C, \exists c_x \in C, \exists \lambda_x \geq 0, \quad \textit{tels que} \quad f(x) - x = \lambda_x(c_x - x);$$

Alors f a un point fixe.

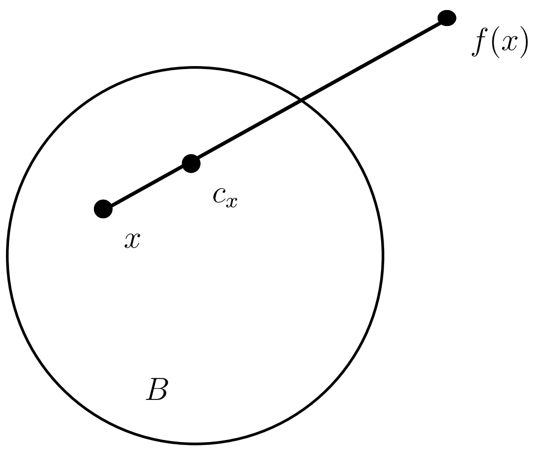

FIG. 7.2 – le cas du corollaire 7.2.1

<u>PREUVE</u> On considère l'application $proj_C \circ f$ qui est continue de C dans lui-même. D'après le résultat précédent, cette application a un point fixe $x_0 \in C$. Donc, $x_0 = proj_C(f(x_0))$. D'après la proposition (6.1.1), on en déduit que pour tout $c \in C$, $\langle f(x_0) - x_0, c - x_0 \rangle \leq 0$.

Par hypothèse, il existe $c_{x_0} \in C$ et $\lambda_{x_0} \geq 0$ tel que $f(x_0) - x_0 = \lambda_{x_0}(c_{x_0} - x_0)$. Si $f(x_0) \neq x_0$, $c_{x_0} \neq x_0$ et $\lambda_{x_0} > 0$. Donc, $\langle f(x_0) - x_0, c_{x_0} - x_0 \rangle = \lambda_{x_0} \langle c_{x_0} - x_0, c - x_0 \rangle > 0$ ce qui contredit l'inégalité inverse. Conclusion, $f(x_0) = x_0$ et f a un point fixe. $\square$

On remarque que si f est valeurs dans C, l'hypothèse du corollaire est vérifiée avec $\lambda = 1$ et $c = f(x)$. Le corollaire 7.2.1 est donc une extension du théorème 7.2.5.

7.3 Démonstration du lemme de KKM

Nous avons montré que le lemme de KKM impliquait le Théorème de Brouwer. Nous allons démontrer le lemme KKM en nous inspirant d'un lemme classique (lemme de Sperner). Nous aurons alors une démonstration de l'ensemble des théorèmes de points fixes mentionnés.

On rappelle que si les $(n+1)$ points $a^0, a^1, \ldots, a^n$ sont affinement indépendants (c'est à dire que les vecteurs $a^1 - a^0, \ldots a^n - a^0$ sont indépendants), alors tout point v de $co\{a^0, a^1, \ldots a^n\}$ possède une unique décomposition (décomposition barycentrique) $v = \lambda^0 a^0 + \cdots + \lambda^n a^n$ où $\lambda^0, \ldots, \lambda^n$ sont des réels positifs tels que $\lambda^0 + \cdots + \lambda^n = 1$.

<u>Définition</u> 7.3.1 Soit E un espace de dimension ℓ. On appelle simplexe de dimension n, (n-simplexe ou également simplexe n-dimensionnel) l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants. De plus, si $\{j_0, \ldots, j_k\}$ est un sous-ensemble de $\{0, \ldots, n\}$ de cardinal k, alors $co\{a^{j_0}, \ldots a^{j_k}\}$ est appelé face k-dimensionnelle du simplexe $co(a^0, a^1, \ldots a^n)$.

En particulier, une face de dimension 0 est appelé sommet du simplexe, une face de dimension 1 est une arête. Pour simplifier la terminologie, on utilisera le terme de face d'un n-simplexe pour une face $(n-1)$-dimensionnelle. Notons qu'un n-simplexe est entièrement déterminé par la donnée d'un sommet et de l'unique face ne contenant pas ce sommet. Notons qu'il n'existe pas de n-simplexe si la dimension de E est inférieure strictement à n.

subdivision barycentrique

Nous allons présenter par récurrence sur la dimension du simplexe, la notion de subdivision barycentrique d'un k-simplexe en $(k+1)!$ simplexes k-dimensionnels.

- On commence par définir la notion de subdivision barycentrique d'un 1-simplexe. On subdivise $co\{b^0, b^1\}$, en $co\{b^0, G\}$ et $co\{b^1, G\}$ où G^1 est l'isobarycentre de $\{b^0, b^1\}$.
- Supposons décrit la procédure de subdivision pour tout les p-simplexes pour $p < k$, avec $k \geq 2$, on veut subdiviser un k-simplexe $co\{b^0, \ldots, b^k\}$ dont l'isobarycentre sera noté G^k. On considère les $(k+1)$ faces du simplexe indicées par $i \in \{0, \ldots, k\}$ (b^i étant le seul sommet n'appartenant pas à cette face). D'après "l'hypothèse de récurrence", chaque face se subdivise en $k!$ simplexes $(k-1)$-dimensionnels $\left(T_{i,j}^{(k-1)}\right)_j$. On pose alors $T_{i,j}^{(k)} = co\left\{T_{i,j}^{(k-1)}, G^k\right\}$. On obtient ainsi une subdivision en $(k+1)!$ simplexes k-dimensionnels.

On pourrait alternativement décrire la subdivision barycentrique qui est composée de $(k+1)!$ éléments de la forme

$$co\left\{b^{\gamma(0)}, \frac{b^{\gamma(0)} + b^{\gamma(1)})}{2}, \ldots, \frac{b^{\gamma(0)} + \cdots + b^{\gamma(k)})}{k+1}\right\}$$

où γ est une permutation de $\{0, \ldots, k\}$.

Si l'on part d'un n-simplexe, on peut réitérer la subdivision barycentrique sur chacun des n-simplexes (voir figure 7.3). Les n-simplexes ainsi obtenus à l'étape ν seront notés génériquement $T_\nu^{(n)}$, et on notera $J_\nu^{(n)}$ l'ensemble de ces n-simplexes. On notera V la réunion de ces $J_\nu^{(n)}$ quand ν décrit $\mathbb{N}$. On démontrera à l'aide du lemme ci-dessous que le diamètre de ces n-simplexes tend vers 0 lorsque le nombre d'étapes tend vers l'infini.

<u>Lemme</u> 7.3.1 *Soit S un n-simplexe et T un des n-simplexes obtenus par subdivision barycentrique, alors*

$$diam(T) \leq \frac{n}{n+1} diam(S)$$

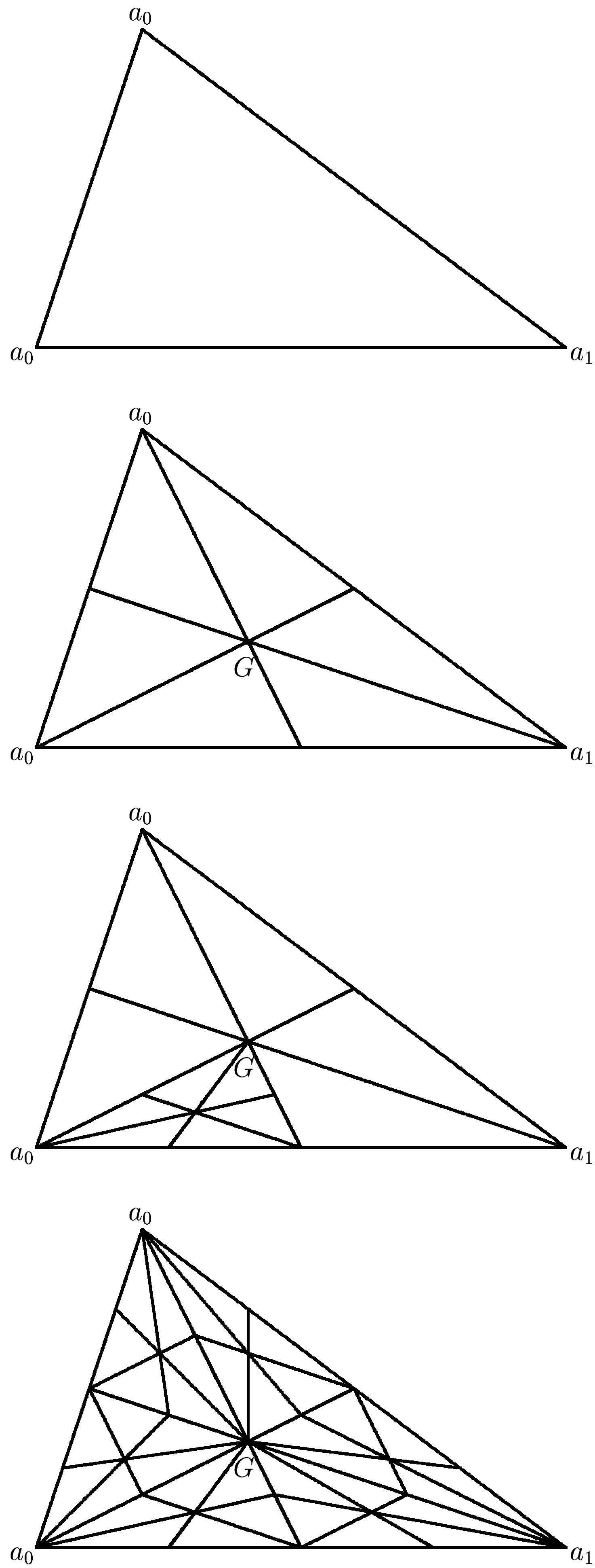

FIG. 7.3 – subdivision barycentrique

PREUVE Si $S = co\{a^0, \dots, a^n\}$, sans perte de généralités, on peut supposer que T est de la forme

$$co\left\{a^{(0)}, \frac{a^{(0)} + a^{(1)})}{2}, \dots, \frac{a^{(0)} + \dots + a^{(n)})}{n+1}\right\} = co\{B^0, B^1, \dots, B^n\}.$$

Si $0 \leq i < j \leq n$,

$$\begin{aligned} B^i - B^j &= \frac{a^{(0)} + \dots + a^{(i)}}{i+1} - \frac{a^{(0)} + \dots + a^{(j)}}{j+1} \\ &= \left(\frac{j-i}{(i+1)(j+1)}\right)(a^{(0)} + \dots + a^{(i)}) - \frac{a^{(i+1)} + \dots + a^{(j)}}{j+1} \\ &= \left(\frac{j-i}{j+1}\right)\left(\frac{a^{(0)} + \dots + a^{(i)}}{(i+1)} - \frac{a^{(i+1)} + \dots + a^{(j)})}{j-i}\right). \end{aligned}$$

En passant aux normes,

$$\|B^i - B^j\| \leq \left(\frac{j-i}{j+1}\right) diam(S) \leq \frac{n}{(n+1)} diam(S).$$

Puisque le diamètre d'un simplexe est atteint entre deux sommets, on déduit le résultat. □

REMARQUE 7.3.1 *Soit une face d'un $T_\nu^{(n)}$, on a l'alternative suivante :*
- *il existe un unique $T_\nu^{(n)}$ ayant cette face et cette face est contenue dans une face du simplexe initial ;*
- *cette face appartient à exactement deux simplexes du type $T_\nu^{(n)}$.*

label d'un recouvrement

DÉFINITION 7.3.2 Si $(F_0, \dots, F_n)$ est un recouvrement d'un n-simplexe, on appelle label une application σ de l'ensemble V des sommets des simplexes obtenus par subdivision barycentrique, dans l'ensemble $\{0, \dots, n\}$, tel que pour tout $v \in V$, $\lambda^{\sigma(v)} > 0$ et $v \in F_{\sigma(v)}$.

Par définition, F est un KKM-recouvrement d'un n-simplexe, un tel label existe.

DÉFINITION 7.3.3 Si σ est un label du n-simplexe S associé au recouvrement $(F_0, \dots, F_n)$, et T un n-simplexe obtenu par subdivision barycentrique, on dit que T est entièrement labellé si l'image par σ des sommets de T est égal à $\{0, \dots, n\}$.

LEMME 7.3.2 (SPERNER) *Soit σ un label du n-simplexe S associé au recouvrement $(F_0, \dots, F_n)$, alors pour tout $\nu \geq 0$, il existe dans $J_\nu^{(n)}$ un n-simplexe entièrement labellé.*

PREUVE : Nous allons montrer par récurrence sur n que le cardinal de l'ensemble des simplexes entièrement labellés de $J_\nu^{(n)}$ est impair et donc non nul.

- Pour $n = 0$ ou $n = 1$, cela est trivialement vrai.

- Supposons la propriété vérifiée pour $(n-1)$ et montrons qu'elle est héréditaire. Nous dirons ici qu'une face (de dimension $n-1$) d'un $T_\nu^{(n)}$ est pré-labellée si l'image de ses sommets par σ est $\{0, \dots, n-1\}$. Notons p la somme des nombres de faces pré-labellées de $T_\nu^{(n)}$ lorsque $T_\nu^{(n)}$ décrit $J_\nu^{(n)}$ et q le nombre de n-simplexes entièrement labellées dans $J_\nu^{(n)}$.

– Étape 1 : p est impair.
D'après la remarque 7.3.1, deux cas peuvent se présenter pour une face F pré-labellée.
- Soit F est contenue dans une face du simplexe initial. Mais dans ce cas, il résulte de la définition d'un label que cette face est $co\{a^0, \ldots, a^{n-1}\}$. La face F (en tant que $(n-1)$-simplexe) est donc entièrement labellée. Par hypothèse de récurrence, ce cas se produit un nombre impair de fois.
- Soit F est une face appartenant à exactement deux simplexes de $J_\nu^{(n)}$, elle est donc comptée deux fois dans p.

– Étape 2 :
Essayons de dénombrer d'une autre façon p. D'une part, un simplexe de $J_\nu^{(n)}$ entièrement labellé possède exactement une face pré-labellée. D'autre part, un simplexe de $J_\nu^{(n)}$ non entièrement labellé tel que l'image par σ de ses sommets soit égale à $\{0, \ldots, n-1\}$ a exactement deux faces pré-labellée (il suffit d'intervertir les deux sommets dont l'image par σ est la même). Pour finir, un simplexe de $J_\nu^{(n)}$ non entièrement labellé tel que l'image par σ de ses sommets soit différent de $\{0, \ldots, n-1\}$ ne possède pas de face pré-labellée.

Il résulte des étapes 1 et 2 que p est impair et de la forme $p = q + 2r + 0s$. □

<u>Théorème</u> 7.3.1 *Le lemme de Sperner implique le principe KKM fermé.*

<u>Preuve</u> : Sous les hypothèses du principe KKM fermé, il existe au moins un label. En utilisant le lemme de Sperner, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, il existe un n-simplexe noté $co\{B_\nu^0, \ldots, B_\nu^n\}$ entièrement labellé, et on peut supposer sans perte de généralité que que $\sigma(B_\nu^i) = i$, ce qui implique en particulier que $B_\nu^i \in F_i$. Par compacité de $co\{a^0, \ldots, a^n\}$, on peut extraire de $(B_\nu^0)_\nu$ une sous-suite convergeant vers un point B. Le lemme 7.3.1 nous indique que pour chaque $i \in \{0, \ldots, n\}$ la même sous-suite de $(B_\nu^i)_\nu$ converge vers B. Puisque les ensembles F_i sont fermés, ce point appartient à chacun des F_i ; ce qui prouve le résultat du théorème. □

7.4 Points fixes pour les correspondances

7.4.1 Notions sur les correspondances

<u>Définition</u> 7.4.1 Soient X et Y deux ensembles. On appelle correspondance de X dans Y toute application ϕ de X dans l'ensemble des parties de Y noté 2^Y. On dit que la correspondance est à valeurs non vides si, pour tout $x \in X$, l'ensemble $\phi(x)$ est non vide. Le domaine de ϕ est l'ensemble des éléments de X dont l'image par ϕ est non vide. On note $G(\phi)$, le graphe de ϕ, c'est-à-dire, $G(\phi) := \{(x, y) \mid y \in \phi(x)\}$.

<u>Exemple</u> : Une application de X dans Y peut être vue comme une correspondance qui à $x \in X$, associe le singleton $\{f(x)\}$.

Soit f, une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, soit A, une matrice $m \times n$ et b, un vecteur de $\mathbb{R}^m$. L'application qui à (A, b) associe l'ensemble des solutions du problème

$$\begin{cases} \text{maximiser } f(x) \\ Ax \leq b \end{cases}$$

est une correspondance. Un cas important est celui de la fonction f constante.

Nous supposerons, dans la suite de ce chapitre, le cadre de la dimension finie, c'est-à-dire, X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $Y = \mathbb{R}^p$.

<u>Définition</u> 7.4.2 Soit F une correspondance de X dans Y à valeurs non vides et $x_0 \in X$.

- F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) en x_0 si pour tout ouvert U de Y contenant $F(x_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout $x \in V$, $F(x) \subset U$;
- F est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en x_0 si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout $x \in V$, $F(x) \cap U \neq \emptyset$;
- Une correspondance s.c.s. (resp. s.c.i.,) en tout $x_0 \in X$ est dite s.c.s. (resp. s.c.i.).

<u>Remarques</u> :

- Pour une application f, la continuité de f est équivalente au fait que la correspondance $x \to \{f(x)\}$ est s.c.s. (elle est également s.c.i.).
- On remarque que si T est s.c.s. alors le domaine de T est fermé dans X.
- On remarque que si T est s.c.i. alors le domaine de T est ouvert dans X.

<u>Proposition</u> 7.4.1 *Soit X un espace métrique, soit Y, un espace vectoriel normé, soit T_1 et T_2, deux correspondances s.c.s. à valeurs compactes de X dans Y et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, la correspondance $T_1 + T_2$ définie par $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$ est s.c.s. ainsi que la correspondance λT_1.*

<u>Preuve</u> La somme de deux compacts étant compact, pour tout $x \in X$, $(T_1 + T_2)(x)$ est compact. Soit U, un ouvert de Y et soit $x \in X$ tel que $(T_1 + T_2)(x) \subset U$. Nous allons montrer que cette inclusion est vraie dans un voisinage de x. Si $T_1(x)$ ou $T_2(x)$ est vide, alors, d'après la définition de la s.c.s., ceci est vrai dans un voisinage de x. Donc, $(T_1+T_2)(\xi)$ est vide dans un voisinage de x donc inclus dans U.

Nous supposons maintenant que $T_1(x)$ et $T_2(x)$ sont non vides. Comme $(T_1+T_2)(x)$ est compact, la distance δ de $(T_1+T_2)(x)$ au complémentaire de U est strictement positive. Soit $U_1 = T_1(x)+B(0, \frac{\delta}{2})$ et $U_2 = T_2(x) + B(0, \frac{\delta}{2})$. Vu la définition de δ, pour tout $(y_1, y_2) \in U_1 \times U_2$, $y_1 + y_2 \in U$. De plus comme T_1 et T_2 sont s.c.s., les ensembles $V_1 = \{\xi \in X \mid T_1(\xi) \subset U_1\}$ et $V_2 = \{\xi \in X \mid T_2(\xi) \subset U_2\}$ sont des ouverts de X contenant x. Pour tout $\xi \in V_1 \cap V_2$, $(T_1 + T_2)(\xi) \subset U_1 + U_2 \subset U$. Donc, $V_1 \cap V_2 \subset \{\xi \in X \mid (T_1+T_2)(\xi) \subset U\}$. Donc l'ensemble $\{\xi \in X \mid (T_1+T_2)(\xi) \subset U\}$ est un ouvert car il est voisinage de tous ses points. Ceci montre que $T_1 + T_2$ est s.c.s.

La démonstration pour λT_1 est laissée au lecteur. □

Nous donnons dans la proposition suivante, un critère commode pour vérifier qu'une correspondance est s.c.s.

<u>Proposition</u> 7.4.2 *Soit X et Y, deux espaces métriques et soit T, une correspondance de X dans Y. Si T est s.c.s. à valeurs compactes alors son graphe est fermé. Si il existe un compact K de Y tel que pour tout $x \in X$, $T(x) \subset K$ et si le graphe de T est fermé, alors T est s.c.s.*

<u>Preuve</u> Supposons que T est s.c.s. à valeurs compactes. Soit (x^n, y^n) une suite du graphe de T convergeant vers $(\overline{x}, \overline{y})$. Nous voulons montrer que $\overline{y} \in T(\overline{x})$.
Pour tout $r > 0$, comme T est s.c.s., il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in B(\overline{x}, \rho)$, $T(x) \subset T(\overline{x}) + B(0, r)$. Donc, pour n assez grand, la distance de y^n à $T(\overline{x})$ est inférieur à r. On en déduit que la distance de $\overline{y}$ à $T(\overline{x})$ est inférieur à r et comme ceci est vrai pour tout $r > 0$, $\overline{y}$ appartient à $T(\overline{x})$ car $T(\overline{x})$ est fermé.

Supposons maintenant qu'il existe un compact K de Y tel que pour tout $x \in X$, $T(x) \subset K$ et que le graphe de T est fermé.
Si la correspondance T n'est pas s.c.s., il existe un ouvert U de Y et un élément $x \in E$ tels que $T(x) \subset U$ et x n'est pas dans l'intérieur de l'ensemble $V = \{\xi \in X \mid T(\xi) \subset U\}$. Il existe donc une suite (x^n) d'éléments de X n'appartenant pas à V qui converge vers x. Vu la définition de V, $T(x^n)$ est non vide pour tout n. Soit (y^n), une suite de Y telle que $y^n \in T(x^n)$ et y^n n'appartient

pas à U pour tout n. Vu nos hypothèses, la suite (y^n) reste dans le compact K et donc elle admet une sous-suite convergente dont nous noterons la limite y. Comme T est de graphe fermé, (x, y) appartient au graphe de T, c'est-à-dire $y \in T(x)$. Vu la définition de la suite (y^n) et le fait que U est ouvert, y n'appartient pas à U ce qui contredit $T(x) \subset U$. Donc, T est s.c.s. □

<u>PROPOSITION</u> 7.4.3 *Soit X, un espace métrique compact, soit Y, un espace métrique, et soit T, une correspondance s.c.s. à valeurs compactes de X dans Y. Alors, $T(X) = \bigcup_{x \in X} T(x)$ est compact.*

<u>PREUVE</u> Soit $(U_i)_{i \in I}$, un recouvrement ouvert de $T(X)$. Pour tout $x \in X$, $T(x) \subset \cup_{i \in I} U_i$. Comme $T(x)$ est compact, il existe un sous-ensemble fini $I(x)$ de I tel que $T(x) \subset \cup_{i \in I(x)} U_i$. Comme T est s.c.s., il existe un ouvert V_x de X tel que pour tout $\xi \in V_x$, $T(\xi) \subset \cup_{i \in I} U_i$. Comme X est compact et que $(V_x)_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X, il existe un sous-ensemble fini $\tilde{X}$ de X tel que $X \subset \cup_{x \in \tilde{X}} V_x$. Vu la construction ci-dessus, $T(X) \subset \cup_{x \in \tilde{X}} \cup_{i \in I(x)} U_i$. Donc, d'un recouvrement ouvert de $T(X)$, on a pu extraire un sous-recouvrement fini, donc $T(X)$ est compact. □

7.4.2 Le théorème de Browder-Fan

<u>THÉORÈME</u> 7.4.1 (BROWDER-FAN) *Soit X un sous-ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. On se donne une correspondance ϕ de X dans X, à valeurs convexes non vides et qui vérifie la condition suivante :*

$$(SIO) \quad \forall y \in X,\ \phi^{-1}(y) = \{x \in X \mid y \in \phi(x)\} \text{ est ouvert.} \quad (\textit{Sections Inférieures Ouvertes})$$

Alors ϕ admet un point fixe : il existe $\overline{x} \in X$ tel que $\overline{x} \in \phi(\overline{x})$.

<u>REMARQUE</u> : On remarque que si une correspondance vérifie la condition (SIO) ci-dessus, alors elle est aussi s.c.i.

<u>PREUVE</u> : Supposons par l'absurde que, pour tout $x \in X$, $x \notin \phi(x)$. Définissons, pour tout $y \in X$, le sous-ensemble compact $F(y) = \phi^{-1}(y)^c$ de X. Pour tout n et pour tout ensemble de n points $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de X,

$$co\{y_1, \ldots, y_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(y_i).$$

En effet, dans le cas contraire, il existerait $z \in co\{y_1, \ldots, y_n\}$ tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $z \in \phi^{-1}(y_i)$. Nous aurions dès lors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $y_i \in \phi(z)$. Cet ensemble $\phi(z)$ étant convexe, $z \in \phi(z)$, ce qui est absurde. Les hypothèses du théorème de Ky Fan sont donc vérifiées. Il existe par conséquent un point $x \in X$ appartenant à chaque $F(y)$. Il suffit alors de remarquer que, pour tout $y \in X$, $y \notin \phi(x) \subset X$, ce qui termine la démonstration. □

7.4.3 Sélection d'une correspondance

<u>DÉFINITION</u> 7.4.3 Soit ϕ une correspondance de X dans Y. On appelle sélection de ϕ, toute application f de X dans Y telle que $f(x) \in \phi(x)$ pour tout $x \in X$. Une sélection continue de ϕ est une sélection de ϕ qui est continue.

Les sélections continues jouent un rôle important dans la recherche d'un point fixe $\overline{x}$ de $\phi : B \to B$, c'est-à-dire, tel que $\overline{x} \in \phi(\overline{x})$. En effet, s'il existe une sélection continue f de ϕ, le théorème de Brouwer nous permet de conclure qu'il existe un point fixe $\overline{x}$ de f c'est-à-dire tel que $\overline{x} = f(\overline{x}) \in \phi(\overline{x})$ et $\overline{x}$ est donc également un point fixe de ϕ. On énoncera sans démonstration le théorème de sélection de Michael qui généralise le résultat suivant.

<u>Théorème</u> 7.4.2 *Soit Φ une correspondance de X dans Y à valeurs convexes non vides, vérifiant la condition (SIO). Alors il existe une sélection continue de Φ.*

<u>Preuve</u> : En effet, remarquons que $\{\Phi^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ est un recouvrement de X, puisque Φ est à valeurs non vides, il est constitué d'ouverts car Φ vérifie la condition (SIO). Comme X est compact, il existe un nombre fini d'éléments de Y, $y_1, \ldots, y_n$ tel que : $X \subset \Phi^{-1}(y_1) \cup, \ldots, \cup \Phi^{-1}(y_n)$. Soit $(\alpha_i)_{i=1,\ldots,n}$ une partition de l'unité faiblement subordonnée à ce recouvrement fini d'ouverts lemme 2.5.1. On définit l'application continue $f : X \to Y$ par :

$$\forall x \in X, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) y_i.$$

On remarque que d'après la définition de f que pour tout $x \in X$, $f(x)$ est une combinaison convexe des y_i telle que $\alpha_i(x)$ est strictement positif. Par ailleurs, si $\alpha_i(x) > 0$, alors $x \in \Phi^{-1} \mid (y_i)$ et donc $y_i \in \Phi(x)$. Comme $\Phi(x)$ est convexe on a que $f(x) \in \Phi(x)$. □

<u>Théorème</u> 7.4.3 (Michael) *Soit F une correspondance de X compact $\subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, s.c.i., à valeurs convexes non vides. Alors, il existe une sélection continue de F.*

<u>Corollaire</u> 7.4.1 *(Point fixe des correspondances s.c.i.) Soit X un sous-ensemble compact convexe non-vide de $\mathbb{R}^n$ et ϕ une correspondance de X dans X, s.c.i. à valeurs convexes non-vides. Alors ϕ admet un point fixe, c'est-à-dire, il existe $\overline{x} \in X$ tel que $\overline{x} \in \phi(\overline{x})$.*

<u>Preuve</u> : Par le théorème de Michael, il existe une sélection continue de ϕ. Cette sélection continue f est définie sur X et à valeurs dans X. Dès lors, d'après le théorème de Brouwer, f admet un point fixe $\overline{x}$ qui est manifestement un point fixe de ϕ. □

7.4.4 Le théorème de Kakutani

<u>Théorème</u> 7.4.4 (Kakutani (1941)) *Soient C un sous-ensemble convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et une correspondance F s.c.s. de C dans C à valeurs convexes compactes non vides. Alors, il existe $\overline{x} \in C$ tel que $\overline{x} \in F(\overline{x})$.*

<u>Preuve</u> : Nous allons construire une "sélection approchée" continue de la correspondance F grâce à la notion de partition de l'unité. Par (pré-)compacité de C, il existe, pour tout entier n, une famille finie de points $\{x_1^n, \ldots, x_{p(n)}^n\}$ de C telle que :

$$C = \bigcup_{i=1}^{p(n)} B(x_i^n, 1/n) \cap C.$$

Il existe une partition de l'unité α_i^n faiblement subordonnée à ces boules ouvertes (voir lemme 2.5.1. Nous choisissons des éléments arbitraires y_i^n dans $F(x_i^n)$ et posons, pour $x \in C$,

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{p(n)} \alpha_i^n(x) y_i^n$$

Puisque C est convexe, nous avons ainsi défini une application f_n de C à valeurs dans C. De plus, f_n est continue comme somme d'applications continues. Le théorème de Brouwer nous assure l'existence d'un point fixe x_n de f_n. L'ensemble C étant compact, nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que la suite (x_n) converge vers $\overline{x}$.

Pour conclure la démonstration, il faut montrer que $\overline{x}$ est un point fixe de F. Ceci résulte du fait que la suite $(f_n)_n$ approche la correspondance F dans le sens suivant. Si $(t_n)_n$ et $(z_n)_n$ sont deux suites convergentes vers $\overline{t}$ et $\overline{z}$ telles que $z_n = f(t_n)$, alors $\overline{z} \in F(\overline{t})$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $U_\eta = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, F(\overline{t})) < \varepsilon\}$. Cet ensemble est manifestement un ouvert convexe contenant $F(\overline{x})$. La semi-continuité supérieure de F implique qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in B(\overline{t}, \eta) \cap C$, on ait $F(x) \subset U$. Soit n suffisamment grand afin que $d(t_n, \overline{t}) < \eta/2$ et $1/n < \eta/2$. En notant $J(n) = \{i \in \{1, \ldots, p(n)\} \mid \alpha_i^n(t_n) > 0\}$, si $i \in J(n)$, on a $t_n \in B(x_i^n, 1/n)$, ce qui entraîne d'après l'inégalité triangulaire

$$d(x_i^n, \overline{t}) \leq d(x_i^n, t_n) + d(t_n, \overline{t}) < 1/n + \eta/2 < \eta$$

que $y_i^n \in U_\varepsilon$. En utilisant la définition d'une partition de l'unité, et la convexité de U_ε, il vient $d(z_n, F(\overline{t})) < \varepsilon$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ puis lorsque $\varepsilon \to 0$, nous obtenons donc que $\overline{z} \in adh\, F(\overline{t}) = F(\overline{t})$. $\square$

<u>Corollaire</u> 7.4.2 (von Neumann (1937)) *Soient X et Y deux sous-ensembles convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Soient M et N deux sous-ensembles fermés de $X \times Y$. On note*

$$M_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in M\};$$

$$N_y = \{x \in X \mid (x, y) \in N\}.$$

On suppose que M_x et N_y sont des convexes non vides, respectivement, pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$. Alors, $M \cap N \neq \emptyset$. (voir figure 7.4)

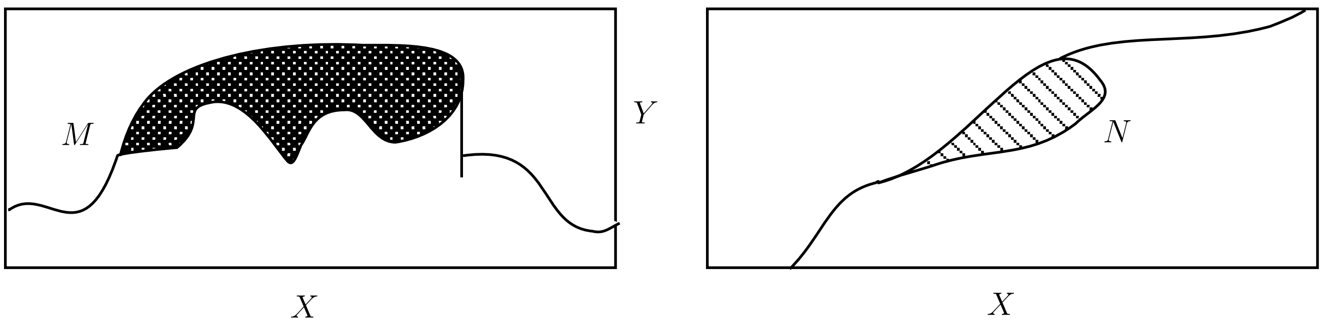

Fig. 7.4 – le théorème de von Neumann

<u>Preuve</u> : Définissons la correspondance F de $X \times Y$ dans $X \times Y$ par $F(x, y) = N_y \times M_x$. Le graphe de F est manifestement fermé puisque

$$G(F) = \bigcup_{x \in X, y \in Y} \left(\{(x, y)\} \times N_y \times M_x\right).$$

Dès lors, d'après la proposition 7.4.2, la correspondance F est s.c.s. De plus, la correspondance F est à valeurs convexes compactes non vides. D'après le théorème de Kakutani, la correspondance F admet donc un point fixe $(\overline{x}, \overline{y})$ qui appartient à $M \cap N$. $\square$

<u>Remarque</u> : Il est à noter que le théorème de Kakutani est une conséquence immédiate de ce corollaire. En effet, considérons une correspondance F de X sous-ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ dans X, qui soit s.c.s. et à valeurs compactes convexes non vides. Posons $M = G(F)$ et $N = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Les ensembles M et N sont fermés grâce à la proposition 7.4.2 et à la compacité de X. De plus, pour tout $x \in X$, $M_x = F(x)$ est convexe non-vide. En outre, pour tout

$y \in X$, $N_y = \{y\}$ est convexe non vide. Finalement, comme $N \cap M \neq \emptyset$, il existe $\overline{x}$ tel que $\overline{x} \in F(\overline{x})$. □

<u>Remarque</u> : Le résultat de Von Neumann nous permet d'obtenir un résultat de point fixe pour une correspondance même si elle n'est pas à valeurs convexes.

<u>Corollaire</u> 7.4.3 *Soit X et Y deux sous-ensembles convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement. Soit F une correspondance de X dans Y s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides et G une correspondance de Y dans X s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides, alors $G \circ F$ admet un point fixe.*

<u>Preuve</u> : Définissons les ensembles M et N par

$$M := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\};$$
$$N := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in G(y)\}.$$

La semi-continuité supérieure de F et G implique que ces ensembles M et N sont des sous-ensembles fermés de $X \times Y$. De plus, pour tout $x \in X$, $M_x = F(x)$ est convexe et non vide. Enfin, pour tout $y \in Y$, $N_y = G(y)$ est convexe et non vide. Dès lors, d'après le corollaire de von Neumann, $M \cap N \neq \emptyset$, c'est-à-dire, il existe un couple $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ tel que $\overline{y} \in F(\overline{x})$ et $\overline{x} \in G(\overline{y})$. Le point $\overline{x}$ est donc un point fixe de $G \circ F$. □

<u>Théorème</u> 7.4.5 *Soit C, un sous-ensemble convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé E et soit T, une correspondance de C dans C, s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides. Alors, il existe $\overline{c} \in C$ tel que $\overline{c} \in T(\overline{c})$.*

<u>Preuve</u> : Montrons d'abord à l'aide du théorème de Kakutani que T possède des points-fixes "approchés". Formellement, pour tout $r > 0$, l'ensemble $F_r = \{c \in C \mid c \in T(c) + \overline{B}(0, r)\}$ est non vide.

Comme C est (pré-)compact, il existe une famille finie $C(r)$ de C telle que $C \subset \bigcup_{c \in C(r)} B(c, r)$. Soit $K(r)$, le polytope engendré par $C(r)$, qui est donc un sous-ensemble convexe compact non vide d'un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Nous définissons la correspondance T^r de $K(r)$ dans $K(r)$ de la façon suivante :

$$T^r(x) = K(r) \cap (T(x) + \overline{B}(0, r))$$

Nous allons montrer que T^r est s.c.s. à valeurs convexes compactes et non vides. Pour la convexité et la compacité des valeurs, c'est immédiat. Montrons que pour tout x de $K(r)$, $T^r(c)$ est non vide. Soit y dans $T(x)$, donc dans K, il existe $c \in C(r)$ tel que $y \in B(c, r)$. Ce qui permet de décomposer x en $y + u$ pour un certain $u \in \overline{B}(0, r)$. Dès lors, on a $c \in K(r) \cap (T(x) + \overline{B}(0, r))$. Donc $T^r(x)$ est non vide.

Montrons finalement que T^r est s.c.s. Comme les valeurs de T^r sont incluses dans un compact fixe $K(r)$, il suffit de montrer que le graphe de T^r est fermé. Soit (x_n, c_n) une suite du graphe de T^r convergeant vers (x, c). Par définition de T^r, pour tout n, il existe z^n et u^n tels que $c_n = z^n + u^n$, $z^n \in T(x_n)$ et $u^n \in \overline{B}(0, r)$. Comme la suite (z^n) est à valeurs dans C qui est compact, une sous-suite converge vers z qui sera dans $T(c)$ car T est s.c.s. Donc la sous-suite correspondante de (u^n) converge vers $c - z$ et comme $\overline{B}(0, r)$ est fermé, $y - z$ appartient à $\overline{B}(0, r)$. Finalement, c appartient à $K(r)$ car $K(r)$ est compact. Donc, $c \in K(r) \cap (T(c) + \overline{B}(0, r)) = T^r(c)$ ce qui montre que le graphe de T^r est fermé.

Nous pouvons maintenant appliqué le théorème de Kakutani à $K(r)$ et T^r car K est inclus dans un espace de dimension finie. Donc, il existe un point fixe de T^r. Il est évident que ce point fixe est un élément de F^r et donc F^r est non vide.

En considérant une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $F^{1/n}$, par compacité de C, il existe une sous suite convergente vers un point $\overline{x}$. Puisque $x_n = z_n + u_n$ avec $z_n \in T(x_n)$ et $u_n \in \overline{B}(0, 1/n)$, la même sous-suite z_n tend vers c. Par fermeture du graphe de T, on a donc $c \in T(c)$. Donc, T a un point fixe. □

Nous finissons ce chapitre, par un résultat très utilisé dans la théorie économique pour montrer l'existence d'un prix d'équilibre sur les marchés. Nous en donnons une preuve à partir de l'inégalité de Fan.

<u>Théorème</u> 7.4.6 (Lemme de Debreu-Gale-Nikaido) *Soit T, une correspondance semi-continue supérieurement à valeurs convexes, compactes, non vides de S, le simplexe unité de $\mathbb{R}^n$, dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $x \in S$,*

$$\inf\{x \cdot \zeta \mid \zeta \in T(x)\} \leq 0.$$

Alors, il existe $x^* \in S$ tel que $T(x^*) \cap -\mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$.

<u>Preuve</u> : On considère la fonction f de $S \times S$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{Pour tout } (x, y) \in S \times S,\ f(x, y) = \inf\{x \cdot \zeta \mid \zeta \in T(y)\}.$$

Montrons que pour tout $x \in S$, l'application de S dans $\mathbb{R}$ définie par $y \to f(x, y)$ est semi-continue inférieurement. Il faut montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $S_\alpha = \{y \in S \mid f(x, y) > \alpha\}$ est ouvert. Or $y \in S_\alpha$ est équivalent à $T(y)$ est inclus dans le demi-espace ouvert défini par $\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot \xi > \alpha\}$. Donc, vu que T est semi continue supérieurement, l'ensemble S_α est un ouvert de S.

Pour tout $y \in S$, l'application de S dans $\mathbb{R}$ définie par $x \to f(x, y)$ est concave car c'est un infimum de fonctions linéaires. Donc l'application f vérifie les hypothèses de l'inégalité de Fan. On en déduit que :

$$\min_{y \in S} \sup_{x \in S} f(x, y) \leq \sup_{x \in S} f(x, x)$$

Or, d'après l'hypothèse faite sur T, il ressort que $\sup_{x \in S} f(x, x) \leq 0$. Donc il existe $y^* \in S$ tel que $\sup_{x \in S} f(x, y^*) \leq 0$.

Montrons maintenant que $T(y^*) \cap -\mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que $T(y^*) \cap -\mathbb{R}^n_+ = \emptyset$. D'après le théorème de séparation stricte entre le convexe fermé $-\mathbb{R}^n_+$ et le convexe compact $T(y^*)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$\sup\{x \cdot \xi \mid \xi \in -\mathbb{R}^n_+\} < \inf\{x \cdot \zeta \mid \zeta \in T(y^*)\}$$

On déduit de cette inégalité que $\sup\{x \cdot \xi \mid \xi \in -\mathbb{R}^n_+\}$ est fini et donc, vu que $\mathbb{R}^n_+$ est un cône convexe, $\sup\{x \cdot \xi \mid \xi \in -\mathbb{R}^n_+\} = 0$ et $x \in \mathbb{R}^n_+$. Soit $x' = (1/\sum_{i=1}^n x_i)x$. x' appartient à S et d'après ce qui précède $\inf\{x' \cdot \zeta \mid \zeta \in T(y^*)\} > 0$ ce qui contredit $f(x', y^*) \leq \sup_{x \in S} f(x, y^*) \leq 0$. Donc le théorème est démontré. □

7.5 Exercices

<u>Exercice</u> 7.1 Soit X, un sous-ensemble compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit f, une application continue de X dans $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $\overline{x} \in X$ tel que $f(\overline{x}) - \overline{x}$ appartient au cône normal à X en x.

<u>Exercice</u> 7.2 Soit X, un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit f, une application continue de X dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$ tel que $K \subset X$ et pour tout $x \in X$, $f(x) \in K$. Montrer que f admet un point fixe.

<u>Exercice</u> 7.3 Soit X et Y, deux ensembles non vides et f une fonction de $X \times Y$ dans $\mathbb{R}$.

1 - Montrer que $\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y}\{f(x,y)\} \leq \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X}\{f(x,y)\}$.

2 - On suppose que X et Y sont convexes et compacts, et que la fonction f possède les propriétés suivantes :

($\imath$) pour tout $x \in X$, la fonction $y \to f(x,y)$ est convexe et semi continue inférieurement.

($\imath\imath$) pour tout $y \in Y$, la fonction $x \to f(x,y)$ est concave et semi continue supérieurement.

Montrer qu'il existe un élément $(\overline{x}, \overline{y})$ de $X \times Y$ tel que :

pour tout $(x,y) \in X \times Y$, $f(x,\overline{y}) \leq f(\overline{x},\overline{y}) \leq f(\overline{x},y)$.

Indication : on pose $A = X \times Y$ et considérer la fonction Φ de $A \times A$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi((x,y),(x',y')) = f(x,y') - f(x',y).$$

Appliquer l'inégalité de Ky Fan.

3 - Montrer que sous les hypothèses de la question 2, on a :

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y}\{f(x,y)\} = \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X}\{f(x,y)\}.$$

<u>Exercice</u> 7.4 Soient E un espace métrique, H un espace de Hilbert et T une correspondance de E dans H. On suppose que pour tout $x \in E$, $T(x)$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de H et qu'il existe un sous-ensemble compact K de H tel que pour tout $x \in E$, $T(x) \subset K$. Pour tout $u \in H$, on définit l'application σ_u de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\sigma_u(x) = \sup\left\{\langle u, y\rangle, y \in T(x)\right\}.$$

Montrer que le graphe de T est fermé si et seulement si la fonction σ_u est semi continue supérieurement pour tout u.

<u>Exercice</u> 7.5 Soit H, un espace de Hilbert et soit T, une correspondance de H dans H semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes et non vides. On suppose que :

($\imath$) pour tout $\rho > 0$, $\cup_{x\in\overline{B}(0,\rho)} T(x)$ est relativement compact.

($\imath\imath$) l'ensemble $E = \{x \in H \mid \exists\lambda \in [0,1],\ x \in \lambda T(x)\}$ est borné.

1 - Soit $\rho > 0$. Montrer qu'il existe $\rho_0 > 0$ tel que $\cup_{x\in\overline{B}(0,\rho)} T(x) \subset B(0,\rho_0)$.

2 - Soit $\rho > 0$ tel que $E \subset B(0,\rho)$. Soit $\rho_1 > \rho$. Définissons ρ_2 tel que $\cup_{x\in\overline{B}(0,\rho_1)} T(x) \subset B(0,\rho_2)$. Soit f la projection sur $\overline{B}(0,\rho_1)$. Montrer à l'aide de la généralisation du théorème de Kakutani dans un hilbert que la correspondance S de $\overline{B}(0,\rho_2)$ dans $\overline{B}(0,\rho_2)$ définie par : $S(x) = T(f(x))$, admet un point fixe.

3 - Montrer que tout point fixe de S est un point fixe de T et en déduire que T admet un point fixe.

<u>Exercice</u> 7.6 Soit B, la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Soit T, une correspondance de B dans $\mathbb{R}^n$ semi continue supérieurement à valeurs convexes compactes non vides. Nous supposons que pour tout x tel que $\|x\| = 1$, $\sigma_x(x) = \sup\{x \cdot y \mid y \in T(x)\} \geq 0$. Le but de l'exercice est de montrer que T admet un point critique, c'est-à-dire, qu'il existe $\overline{x} \in B$ tel que $0 \in T(\overline{x})$.

1 - Montrer, à l'aide de la proposition 7.4.3 et de l'exercice (7.4), qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in B$, $T(x) \subset K$ et que la fonction $x \to \sigma_u(x)$ est semi continue supérieurement pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

2 - Supposons que T n'admette pas de point critique. Pour tout $x \in B$, nous définissons l'ensemble $P(x) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid 0 > \sigma_p(x)\}$. Montrer que $P(x)$ est non vide, convexe et stable par multiplication par un réel strictement positif. Montrer que si p appartient à $P(x)$, alors, il existe un voisinage V de x tel que pour tout $x' \in V$, $p \in P(x')$. En déduire, à l'aide du théorème de sélection de Michael, qu'il existe une fonction continue f de B dans B telle que pour tout $x \in B$, $f(x) \in P(x)$ et $\|f(x)\| = 1$.

3 - Montrer que la fonction f admet un point fixe et en déduire une contradiction avec l'hypothèse faite sur T.

<u>Exercice</u> 7.7 Soit T, une correspondance de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, semi continue supérieurement à valeurs convexes compactes non vides, telle que :

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\sigma_x(x)}{\|x\|} > 0$$

où $\sigma_x(x) = \sup\{x \cdot y \mid y \in T(x)\}$. Montrer que T admet un point critique.

<u>Exercice</u> 7.8 Soit B, la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et T, une correspondance de B dans $\mathbb{R}^n$ semi continue supérieurement à valeurs convexes compactes non vides. On suppose que pour tout $x \in B$ tel que $\|x\| = 1$, et pour tout $u \in T(x)$,

$$\|u\|^2 \geq \|u - x\|^2 - \|x\|^2.$$

Montrer que T admet un point critique.

Chapitre 8

Applications économiques

8.1 Équilibres de Nash

8.1.1 Définitions

Un jeu non-coopératif à n personnes est une situation dans laquelle n joueurs doivent faire un choix d'une action (stratégie) en vue d'un "résultat", ce qui constitue le déroulement d'une "partie". On note $N = \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des joueurs, et X_i l'ensemble des stratégies du joueur i. On note aussi $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ l'ensemble des vecteurs de stratégies, c'est-à-dire des listes de stratégies jouables par chaque personne. Chaque vecteur de stratégies $x \in X$ conduit à un "résultat" pour chaque joueur. Naturellement, les joueurs ont des préférences, en général conflictuelles, sur les résultats, donc sur les vecteurs de stratégies : le joueur i peut préférer le vecteur $y \in X$ à $x \in X$ car il lui procure un meilleur résultat. Cependant, dans un jeu non-coopératif le joueur i n'a pas de contrôle sur le choix des autres joueurs : étant donné $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, il peut seulement remplacer sa stratégie $x_i \in X_i$ par $y_i \in X$ si le vecteur résultant noté $(x_{-i}|y_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est meilleur pour lui. Ainsi, les préférences du joueur i sont décrites par une correspondance $P_i : X \to X_i$ telle que :

$$P_i(x) = \{y_i \in X_i \mid (x_{-i}|y_i) \text{ strictement préféré à } x\}.$$

Pour résumer, un *jeu non-coopératif à n joueurs* est décrit par un n-uple $(X_i, P_i)_{i \in N}$ où pour tout $i \in N = \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{cases} X_i \text{ est l'ensemble de } \textit{stratégies} \text{ de } i, \\ P_i : X = \prod_{i=1}^{n} X_i \to X_i \text{ est la relation de préférence stricte de } i. \end{cases}$$

Que doit-on attendre d'un jeu joué par des joueurs "rationnels" ? Certainement une situation d'équilibre, c'est-à-dire une situation telle qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement, c'est-à-dire à changer de stratégie si les autres ne changent pas.

<u>Définition</u> 8.1.1 On appelle équilibre de Cournot-Nash du jeu $(X_i, N_i)_{i \in N}$ un vecteur $\overline{x} \in X$ tel que $P_i(\overline{x}) = \emptyset$ pour tout $i \in N$.

Le concept a été introduit par Cournot dès 1838 pour l'étude de la concurrence des entreprises dans le cas d'un oligopole, néanmoins il ne s'agit pas de l'étude systématique d'un jeu mais seulement d'un jeu économique très particulier. L'essor de la théorie des jeux date de la publication par von Neumann et Morgenstern d'un traité "theory of games and economic behavior" (1944) mais le concept d'équilibre n'apparaît toujours pas de façon claire. L'ouvrage étudie longuement le cas des jeux à 2 personnes à somme nulle. Il a fallu attendre 1950 pour que Nash formalise le concept d'équilibre en donnant un résultat d'existence qui étend celui de von Neumann. Parmi les jeux, un cas particulièrement important est lorsque le résultat du jeu est un vecteur de paiement u, cela correspond soit à un paiement au sens usuel du terme mais éventuellement au niveau d'utilité correspondant au résultat obtenu. Dans ce cas, la définition de l'équilibre devient :

DÉFINITION 8.1.2 On appelle équilibre de Cournot-Nash du jeu $((X_i)_{i\in N}, u)$ un vecteur $\overline{x} \in X$ tel que pour tout $i \in N$, pour tout $x_i \in X_i$,

$$u_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, x_i, \overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_n) \leq u_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i, \overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_n).$$

La question se pose de savoir quels types de jeux admettent un tel équilibre.

8.1.2 Jeux à deux joueurs à somme nulle

Tous les jeux ne possèdent pas d'équilibre, par exemple étudions le cas particulièrement simple d'un jeu à deux joueurs, où $X_i = \{0,1\}$. Si le vecteur de stratégie est (x_1, x_2) le gain du joueur 1 est $(-1)^{x_1+x_2}$, celui du joueur 2 est $(-1)^{x_1+x_2+1}$. La somme des gains distribués est égale à 0, on parle alors de jeux à somme nulle. Supposons qu'il existe un équilibre $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ de Cournot-Nash pour ce jeu. Celui des deux joueurs i_0 qui touche -1 à l'équilibre aura intérêt à utiliser l'autre stratégie $1-\overline{x}_{i_0}$ pour obtenir un gain positif, ce qui contredit le concept d'équilibre. Soient Xavier et Yvon deux joueurs. On note X et Y les ensembles de stratégies supposés compacts de ces joueurs, $f_X : X \times Y \to \mathbb{R}$ la fonction d'utilité supposée continue de Xavier (mesure le gain de X correspondant au couple de stratégies (x, y)), de même $f_Y : X \times Y \to \mathbb{R}$ pour Yvon. Jeu *à somme nulle* signifie que $f_Y = -f_X$ (le gain de Y est égal à la perte de X, et vice-versa). On note alors $f = f_X$. Jeu *non-coopératif* signifie que les joueurs ne connaissent ni n'influencent le jeu de l'autre. Voyons alors la stratégie de Xavier.

Xavier sait que, s'il joue $x \in X$ et que Yvon l'apprend alors Yvon va chercher à maximiser son gain, en jouant $y \in Y$ qui maximise $y \mapsto f_Y(x, y)$ (avec x fixé), ceci revient à minimiser sa perte, c'est-à-dire à jouer $y \in Y$ qui minimise $y \mapsto f(x, y)$ (avec x fixé). Xavier anticipe la réponse de Yvon qu'il suppose être la meilleure, Xavier donc doit jouer $x \in X$ qui maximise $x \mapsto \min\{f(x, y) \mid y \in Y\}$. Ainsi, $\max_X \min_Y f$ mesure le *niveau de sécurité maximale* de Xavier. Xavier sait qu'il existe une stratégie lui permettant (indépendamment de l'action d'Yvon) d'obtenir ce montant (qui est éventuellement négatif). De même, $\min_Y \max_X f$ mesure le *niveau de sécurité maximale* d'Yvon.

Lorsque $\max_X \min_Y f = \min_Y \max_X f$, cette quantité s'appelle la *valeur du jeu*. Un couple (x_0, y_0) qui réalise la valeur du jeu constitue un couple de stratégies optimales. En effet, pour tout $x \in X$,

$$f(x, y_0) \leq \min_{y\in Y} f(x, y)$$

Cette relation étant vraie pour tout x, on peut passer au max en x, et obtenir

$$\max_{x\in X} f(x, y_0) \leq \max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Donc, (x_0, y_0) vérifie :

$$\begin{cases} f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) & \text{pour tout } x \in X \quad \text{i.e. } x_0 \text{ est "optimale" pour Xavier,} \\ f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) & \text{pour tout } y \in Y \quad \text{i.e. } y_0 \text{ est "optimale" pour Yvon.} \end{cases}$$

Le couple (x_0, y_0) est donc un point d'équilibre du jeu (ni Xavier, ni Yvon n'ont intérêt à changer leur stratégie si l'autre ne change pas). Le couple (x_0, y_0) est appelé point selle de la fonction f. On remarque que réciproquement, s'il existe un point selle, alors le jeu possède une valeur. Notons que dans le cas du jeu du début de ce paragraphe, le jeu ne possède pas de valeur puisque $\max_X \min_Y f =$

-1 tandis que $\min_Y \max_X f = 1$. Le résultat d'existence historique est celui de von Neumann. C'est un corollaire évident de l'exercice 7.3, mais qui peut être interprété comme un résultat d'existence d'équilibre. Il se démontre trivialement de façon directe à l'aide du corollaire 7.4.2.

<u>THÉORÈME</u> 8.1.1 (VON NEUMANN (1937)) *Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ et $Y \subset \mathbb{R}^m$ deux ensembles convexes compacts non vides. Soit $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue. Il existe $(x_0, y_0) \in X \times Y$ tel que*

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y) = f(x_0, y_0) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y).$$

<u>PREUVE</u> On pose $M = \{(x,y) \in X \times Y \mid \forall y' \in Y,\ f(x,y) \le f(x,y')\}$ et $N = \{(x,y) \in X \times Y \mid \forall x' \in X,\ f(x,y) \ge f(x',y)\}$. Il est immédiat de vérifier que les hypothèses du corollaire 7.4.2 sont vérifiées, et un point dans l'intersection de M et de N est un point selle donc un équilibre. □

8.1.3 Le résultat de Nash et les stratégies mixtes

<u>THÉORÈME</u> 8.1.2 (NASH (1950)) *Si pour tout $i = 1, \ldots, n$, X_i est un ensemble convexe compact non vide d'un espace euclidien et $u_i : X = \prod_{i=1}^n X_i \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui est linéaire dans sa ième variable, alors il existe un équilibre du jeu.*

<u>PREUVE</u> Il suffit d'appliquer le théorème de Kakutani à la correspondance F qui est le produit cartésien des correspondances $F_i\ X \to X_i$ définies par

$$F_i(x) = \{x_i' \in X_i \mid u_i(x_{-i}|x_i') = \max_{z_i \in X_i} u_i(x_{-i}|z_i)\}.$$

Un point fixe de cette correspondance est un équilibre de Cournot-Nash du jeu. □

<u>REMARQUE</u> 8.1.1 *On peut affaiblir les hypothèses du théorème en supposant seulement que les fonctions $u_i : X = \prod_{i=1}^n X_i \to \mathbb{R}$ vérifient :*

(a) pour tout $x \in X$, $y_i \mapsto u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est quasi-concave,

(b) $x \mapsto u_i(x)$ est continue.

Comme on l'a dit précédemment, les jeux même très simples ne possèdent pas en général d'équilibres de Cournot-Nash. En effet, bien souvent l'ensemble des stratégies possibles d'un joueur est un ensemble discret et l'hypothèse de convexité de l'ensemble des stratégies d'un joueur fait défaut. On va considérer ici le cas le plus simple de stratégies mixtes : le cas où le jeu initial est fini.

On suppose chaque joueur, dans le jeu initial $((X_i), u)$, possède un ensemble de stratégies finies de cardinal ℓ_i, on note $X_i = \{a_1^i, \ldots, a_{\ell_i}^i\}$. On va modéliser le comportement du joueur i en l'autorisant à jouer au hasard, le joueur i va jouer la stratégie a_k^i avec la probabilité λ_k^i. Le vecteur λ^i ainsi défini est dans un simplexe unité $\tilde{X}^i$. On dit que le joueur joue en stratégie mixte, par opposition à la notion de stratégie pure si le joueur joue de façon certaine. Si les joueurs jouent la stratégie $(\lambda^1, \ldots, \lambda^n)$ le paiement du joueur i sera la moyenne (l'espérance) de son gain. On définit une nouvelle fonction U^i par

$$U^i(\lambda^1, \ldots, \lambda^n) = \sum_{k_1=1}^{\ell_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{\ell_n} \lambda_{k_1}^1 \cdots \lambda_{k_n}^n u^i(a_{k_1}^1, \ldots, a_{k_n}^n).$$

Le jeu $((\tilde{X}^i), U)$ est appelé extension mixte du jeu initial. S'il existe un équilibre de Cournot-Nash de $(\tilde{X}^i), U)$, on dit que le jeu initial possède un équilibre en stratégies mixtes.

<u>THÉORÈME</u> 8.1.3 *Si pour tout $i = 1, \ldots, n$, X_i est un ensemble fini non vide et $u_i : X = \prod_{i=1}^n X_i \to \mathbb{R}$ est une fonction de paiement , alors il existe un équilibre en stratégies mixtes du jeu.*

<u>PREUVE</u> Il suffit de remarquer que l'extension mixte du jeu vérifie de façon évidente les hypothèses du théorème de Nash.

Chapitre 9

Distributions

9.1 Espace des distributions

9.1.1 Préliminaires

Dans ce qui suit, Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ (tout ce qu'on va écrire peut être généralisé à $\mathbb{R}^n$). Pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, le support $\mathrm{Supp}(f)$ de f est défini par $\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}$. On notera $C_b^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment dérivables de Ω dans $\mathbb{R}$ et à support compact. On notera $C^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment dérivables de Ω dans $\mathbb{R}$

9.1.2 Quelques résultats de densité

<u>Proposition</u> 9.1.1 *Soit $0 < p < +\infty$. L'ensemble $C_b^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ borélienne, $\int_\Omega \mid f \mid^p < +\infty\}$, au sens de la norme $\|.\|_{L^p}$ définie par $\|f\|_{L^p} = (\int_\Omega \mid f \mid^p)^{\frac{1}{p}}$.*

Une méthode très utile d'approximation explicite d'une fonction f est de la convoler par une approximation de l'unité : nous en rappelons ici le principe.

<u>Proposition</u> 9.1.2 *Il existe une fonction ρ dans $C_b^\infty(\mathbb{R})$ avec supp $\rho \subset [-1, 1]$ et $\int_\mathbb{R} \rho(x) = 1$. Si on pose $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ (approximation de l'unité), si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et si $f_n(x) = \int_\mathbb{R} f(t)\phi_n(t - x)dt$ (produit de convolution de f et ϕ), alors f_n est infiniment dérivable et converge au sens de la norme L^p vers f.*

9.1.3 Définition

Pour tout entier ℓ et tout compact K de Ω, on peut définir $\nu_{\ell,K} : C_b^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$\forall \phi \in C_b^\infty(\Omega), \nu_{\ell,K}(\phi) = \sup_{0 \leq k \leq \ell,\ x \in K} \mid \phi^{(k)}(x) \mid .$$

C'est une semi-norme, mais non une norme : on peut avoir $\nu_{\ell,K}(\phi) = 0$ alors que $\phi \neq 0$.

<u>Définition</u> 9.1.1 Une distribution T sur Ω est une application linéaire de $C_b^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout compact K de Ω il existe un entier ℓ et un réel $C_K \geq 0$ tel que pour tout $\phi \in C_b^\infty(\Omega)$ à support dans K, $\mid T(\phi) \mid \leq C_K.\nu_{\ell,K}(\phi)$. L'ordre de la distribution T (qui peut être infini) est le minimum des entiers ℓ vérifiant la condition suivante : pour tout compact K il existe un réel $C_K \geq 0$ tel que pour tout $\phi \in C_b^\infty(\Omega)$ à support dans K, $\mid T(\phi) \mid \leq C_K.\nu_{\ell,K}(\phi)$.

On notera aussi $T(\phi) =< T, \phi >$. Une dernière notation courante (attention : c'est un abus d'écriture!) qui peut s'expliquer par l'exemple 1 qui suit, est la suivante : $T(\phi) = \int_\Omega T(x)\phi(x)dx$. Attention, parce que $T(x)$ n'a pas de sens, sauf quand T s'identifie avec une fonction intégrable (voir exemple 1).

Remarque Voici une autre façon équivalente de définir l'espace des distributions : on commence par définir la notion de convergence suivante :

<u>Définition</u> 9.1.2 Soit (f_n) une suite de fonctions de $C_b^\infty(\Omega)$ et $f \in C_b^\infty(\Omega)$. On dira que (f_n) converge vers f au sens des distributions s'il existe un compact K tels que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $\text{Supp}(f_n - f) \subset K$.

(2) Pour tout entier k, la suite de fonction $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur K vers $f^{(k)}$

On peut alors montrer qu'il existe une topologie sur $C_b^\infty(\Omega)$ telle que pour toute application linéaire T de $C_b^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, T est continue si et seulement si $T(\phi_k)$ converge vers $T(\phi)$ pour toute suite (ϕ_k) de $C_b^\infty(\Omega)$ convergeant vers ϕ. On note alors $D(\Omega)$ l'espace $C_b^\infty(\Omega)$ muni de la topologie précédente (c'est l'espace des fonctions tests). L'espace des distributions $D'(\Omega)$ est alors le dual topologique de l'espace des fonctions tests $D(\Omega)$, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues de $D(\Omega)$. (Voir [?] p.151 pour une construction de la topologie précédente.)

Exemple 1 Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, ce qui signifie que f est localement intégrable sur Ω. Alors on peut définir la distribution T_f ainsi :

$$< T_f, \phi >= \int_\Omega f(t)\phi(t)dt$$

On montre que c'est bien une distribution d'ordre 0, et que par ailleurs l'application qui associe T_f à f est une injection (Exercice 8.1). Souvent, la distribution T_f sera simplement notée f (abus d'écriture pratique). Les distributions de la forme T_f sont aussi appelées distributions régulières.

Exemple 2 Soit μ une mesure positive sur Ω, telle que pour tout compact K de Ω, $\mu(K)$ soit fini. Alors on peut définir la distribution T_μ ainsi :

$$< T_\mu, \phi >= \int_\Omega \phi d\mu$$

On montre que c'est bien une distribution.

Exemple 3 Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et T_a définie par $< T_a, \phi >= \phi(a)$. Alors T_a est une distribution, notée plus souvent δ_a (c'est un cas particulier de l'exemple 2). Cette distribution n'est pas de la forme T_f pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (Exercice 8.3).

<u>Définition</u> 9.1.3 On note $D'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

9.1.4 Convergence d'une suite de distribution

<u>Définition</u> 9.1.4 On dira qu'une suite de distribution (T_n) converge vers une distribution $T \in D'(\Omega)$ si pour tout $\phi \in C_b^\infty(\Omega)$, la suite $< T_n, \phi >$ converge vers $< T, \phi >$. Si f_n est une suite de fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$ telle que la distribution T_{f_n} converge vers la distribution T, on dira simplement que f_n converge au sens des distributions vers f.

Exemple 4 La suite de fonction ρ_n converge au sens des distributions vers la distribution de dirac δ_0.

9.1.5 Dérivée d'une distribution

<u>Définition</u> 9.1.5 Soit $T \in D'(\Omega)$ une distribution. On définit la distribution dérivée T' par

$$\forall \phi \in C_b^\infty(\Omega), < T', \phi >= - < T, \phi' > .$$

On laisse le lecteur montrer que T' ainsi définie est bien une distribution (voir Exercice 8.4). On peut définir ainsi pour tout entier k la dérivée k-ième $T^{(k)}$ de T.

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a vu qu'on pouvait lui associer une distribution T_f. Dans le cas où il existe une fonction $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $T'_f = T_g$, on dit que g est la dérivée faible (ou dérivée au sens des distributions) de f. Sinon, on pourra dire que T'_f est la dérivée au sens des distributions de f (par abus de langage, alors que c'est plus rigoureusement la dérivée de T_f).

9.1.6 Multiplication d'une distribution par une fonction

<u>Définition</u> 9.1.6 Soit $T \in D'(\Omega)$ une distribution et $f \in C^\infty(\Omega)$. On définit une nouvelle distribution fT par

$$\forall \phi \in C_b^\infty(\Omega), < fT, \phi >=< T, f\phi > .$$

On peut montrer que l'on définit bien ainsi une distribution (Exercice 8.5).

<u>Proposition</u> 9.1.3 *Soit (T_n) une suite de $D'(\Omega)$ convergeant vers $T \in D'(\Omega)$. Alors on a :*

a) Pour tout entier k, la dérivée $k-$ième de T_n converge vers la dérivée $k-$ième de T.

b) Pour tout $f \in C^\infty(\Omega)$, fT_n converge vers fT.

La preuve est laissée en exercice (Exercice 8.6).

9.2 Exercices

<u>EXERCICE</u> 9.1 Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, ce qui signifie que f est localement intégrable sur Ω. Soit l'application T_f de $C_b^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie :

$$\forall \phi \in C_b^\infty(\Omega), < T_f, \phi >= \int_\Omega f(t)\phi(t)dt$$

1. Montrer que T_f est bien définie.

2. Montrer que T_f est une distribution d'ordre 0.

3. On veut montrer que l'application qui à tout $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ associe T_f est une injection. On suppose donc $T_f = 0$.

a) Montrer qu'il suffit de montrer que pour tout compact K de Ω, on a $f_{|K} = 0$.

b) Soit donc K compact de Ω. En utilisant une approximation de l'unité adéquate, montrer que $f_{|K} = 0$

<u>EXERCICE</u> 9.2 Soit μ une mesure positive sur Ω, telle que pour tout compact K de Ω, $\mu(K)$ soit fini. Alors on peut définir la distribution T_μ ainsi :

$$< T_\mu, \phi >= \int_\Omega \phi d\mu$$

Montre que c'est bien une distribution, d'ordre 0.

<u>EXERCICE</u> 9.3 a) Dans cette question $\Omega = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et T_a définie de $C_b^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ par $< T_a, \phi >= \phi(a)$. Montrer que T_a est une distribution, notée plus souvent δ_a.

b) Montrer que la distribution δ_0 ne s'écrit jamais sous la forme T_f pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

<u>EXERCICE</u> 9.4 Montrer que la dérivée T' d'une distribution T est bien une distribution.

<u>EXERCICE</u> 9.5 Soit $T \in D'(\Omega)$ une distribution et $f \in C^\infty(\Omega)$. Montrer que l'on définit bien une distribution fT par

$$\forall \phi \in C_b^\infty(\Omega), < fT, \phi >=< T, f\phi > .$$

<u>EXERCICE</u> 9.6 Soit (T_n) une suite de $D'(\Omega)$ convergeant vers $T \in D'(\Omega)$. Montrer que l'on a :

a) Pour tout entier k, la dérivée $k-$ième de T_n converge vers la dérivée $k-$ième de T.

b) Pour tout $f \in C^\infty(\Omega)$, fT_n converge vers fT.

<u>EXERCICE</u> 9.7 Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et soit $T = T_f$ la distribution associée à f. Soit $g \in C^\infty(\Omega)$.

a) Montrer que $g.T_f = T_{gf}$.

b) Montrer que si f est de classe C^k alors $(T_f)^{(k)} = T_{f^{(k)}}$.

<u>EXERCICE</u> 9.8 a) Montrer que pour tout entier k, la dérivée k-ième de la distribution δ_a est définie par

$$\forall \phi \in C_b^\infty(\Omega), \delta_a^{(k)}(\phi) = (-1)^k \phi^{(k)}(a).$$

b) Supposons $\Omega = \mathbb{R}$. Soit H la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $H(x) = 0$ si $x < 0$ et $H(x) = 1$ si $x \geq 0$. Montrer que la dérivée au sens des distributions de H est δ_0.

c) Supposons $\Omega = \mathbb{R}$. Soit g une fonction dans $C^\infty(\Omega)$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $g\delta_a = g(a)\delta_a$, où δ_a est la distribution de dirac en a.

<u>EXERCICE</u> 9.9 Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue à gauche et à variation bornée. Soit μ la mesure associée à f, c'est à dire $\mu[a, b[= f(a) - f(b)$. Montrer que la dérivée au sens des distributions de f existe, et est T_μ.

<u>EXERCICE</u> 9.10 Soit une fonction ρ intégrable sur $\mathbb{R}$, avec $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) = 1$ Montrer que la suite de fonction $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ converge au sens des distributions vers la distribution de dirac δ_0.

<u>EXERCICE</u> 9.11 Pour toute distribution T et pour tout $h \in \mathbf{R}$, on définit la distribution translatée $\tau_h T$ par :

$$\forall \phi \in C_b^\infty(\Omega), \tau_h T(\phi) = T(\tau_h \circ \phi)$$

où $\tau_{-h} \circ \phi$ est définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \tau_{-h} \circ \phi(x) = \phi(x) - h$.

Montrer que T' est la limite (au sens des distributions) de la distribution $\frac{\tau_h T(\phi) - \tau_h T(\phi)}{h}$ quand h tend vers 0.