

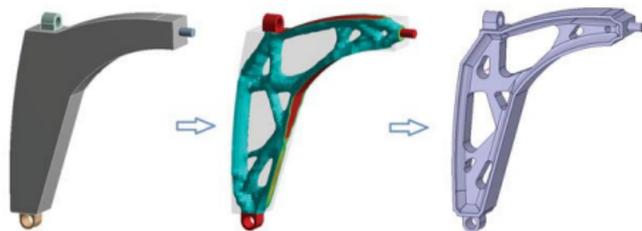
Optimisation de formes

Benjamin BOGOSEL

CNRS, Centre de Mathématiques Appliquées
École Polytechnique

Introduction

- l'**Optimisation de formes** concerne la minimisation d'une **fonction objectif** $J(\Omega)$ qui dépend d'une **forme** Ω dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 sous certaines **contraintes**
- ce type de problème apparaît souvent en sciences et en nature
- aujourd'hui : domaine intéressant pour les ingénieurs
- interface entre mathématiques, physiques, ingénierie mécanique et calcul scientifique
- en plein développement actuellement



Le cours est composé de

- 6h de cours sur les principaux aspects théoriques
- des sessions pratiques concernant l'implémentation des algorithmes basiques d'optimisation topologique en FreeFem++

Materiel pour le cours:

`http://www.cmap.polytechnique.fr/~beniamin.bogosel/enseignement.html#ENSTA`

Contact, questions

`beniamin.bogosel[at]cmap.polytechnique.fr`

- 1 Quelques exemples historiques
 - Problème de Dido et inégalité isopérimétrique
 - Optimisation de forme en nature
 - Optimisation de formes en architecture
 - Vers l'optimisation de forme moderne
- 2 Notions de base
 - C'est quoi un problème d'optimisation de formes?
 - Exemples et modèles
 - Aperçu rapide de la méthode des éléments finis

Quelques exemples historiques

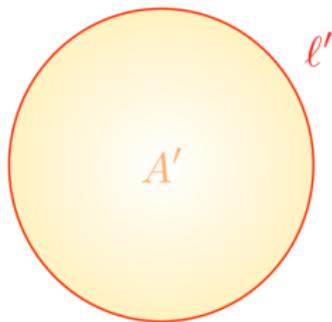
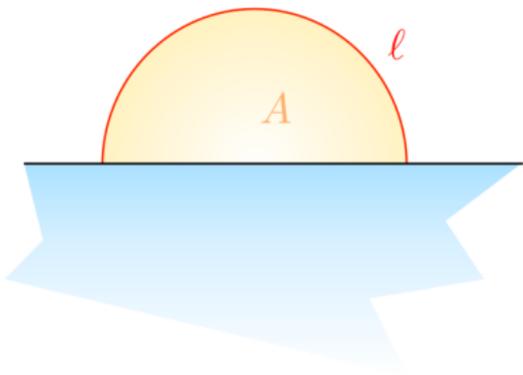
- Problème de Dido et inégalité isopérimétrique
- Optimisation de forme en nature
- Optimisation de formes en architecture
- Vers l'optimisation de forme moderne

- le mythe de la fondation de la ville de Carthage
- la reine de Tyr arrive en Afrique près de Tunis et demande asile après l'assassinat de son mari
- on ne lui concède que ce que pourrait couvrir la peau d'un bœuf
- elle utilise la peau de bœuf pour obtenir une corde de quelques km
- avec ce corde elle encercle un territoire pour fonder la ville de Carthage

Problème de Dido (2)

On arrive donc au problème suivant :

Comment utiliser la corde d'une longueur donnée pour maximiser l'aire de la surface entourée par la corde ?



(gauche) La solution si on peut aussi utiliser le bord de la mer

(droite) La solution en utilisant que la corde pour construire le bord

L'inégalité isopérimétrique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine avec une frontière régulière $\partial\Omega$. Soit A l'aire de Ω et ℓ la longueur de $\partial\Omega$. Alors

$$4\pi A \leq \ell^2,$$

et l'égalité est atteinte si et seulement si Ω est un disque

De manière équivalente on peut dire :

Parmi tous les domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ avec **aire prescrite**, le domaine avec le périmètre minimal est le disque

Autres variantes peuvent être formulées : si une partie du bord est fixée (comme le bord de la mer) alors **la partie libre est une partie d'un cercle**.

L'inégalité isopérimétrique (2)

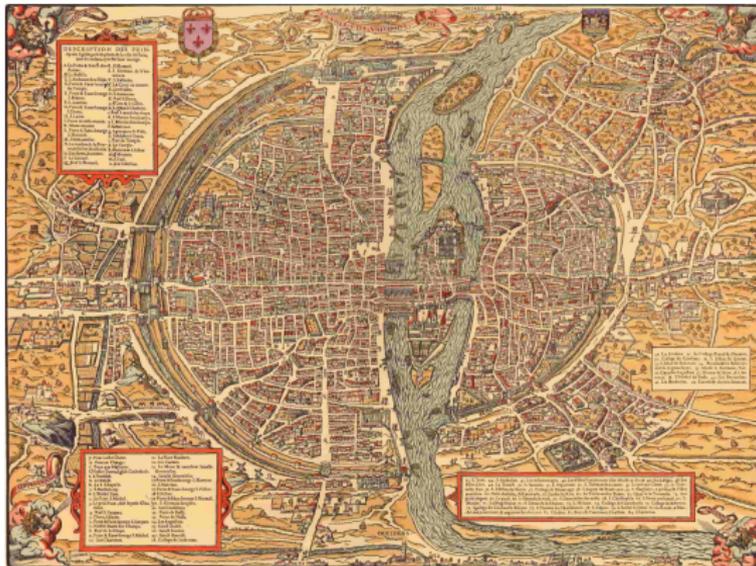
- Une de premières preuves a été donnée en 1838 par Steiner, mais la preuve était incomplète : il a prouvé que la forme optimale est un disque **en supposant qu'elle existe**
- Il existe une multitude de problèmes d'optimisation de formes sans solution, pour des raisons mathématiques ou physiques
 - maximiser le périmètre à volume fixe
 - trouver la pièce avec une résistance maximale sous certains chargements
- la première preuve complète en dimension deux : K. Weierstrass 1860
- dimension trois : H. Schwarz 1884

Parmi tous les domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec **volume prescrit** la boule minimise l'aire de surface.



Une autre application

Optimiser le coût des fortifications : Ancien Paris



Quelques exemples historiques

- Problème de Dido et inégalité isopérimétrique
- **Optimisation de forme en nature**
- Optimisation de formes en architecture
- Vers l'optimisation de forme moderne



- problème isopérimétrique pour une partition
- la partition en hexagones réguliers à la longueur minimale parmi les partitions en cellules de même aire
- preuve mathématique complète : **T. C. Hales (1999)**



Si on fixe les aires des patches noirs et blancs, la structure classique d'un ballon de football **minimise la longueur des régions de couture**

★ pas de preuve mathématique : simulations numériques

Les boules de savon



Les boules de savon essaient de prendre la forme qui **minimise la surface totale** englobant toujours **un volume fixe**

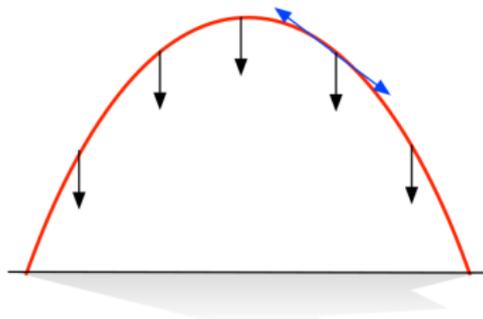
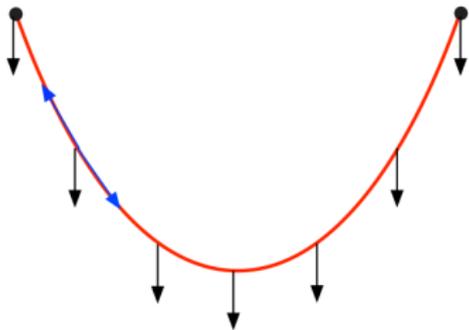
Quelques exemples historiques

- Problème de Dido et inégalité isopérimétrique
- Optimisation de forme en nature
- **Optimisation de formes en architecture**
- Vers l'optimisation de forme moderne

A la recherche des designs optimaux

★ Théorème de Hooke

"As hangs the flexible chain, so but inverted will stand the rigid arch."



A la recherche des designs optimaux (2)

★ A. Gaudi fait le plan de l'église de Colonia Guell *à l'envers* en suspendant des poids sur des membranes.



A la recherche des designs optimaux (3)

★ des techniques modernes d'optimisation de formes sont utilisées pour concevoir des bâtiments



Qatar National Convention Center

A la recherche des designs optimaux (4)

★ design des ponts optimaux



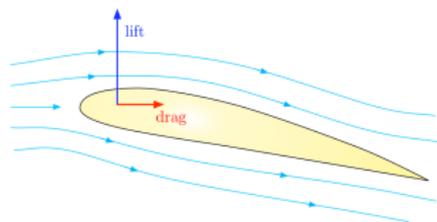
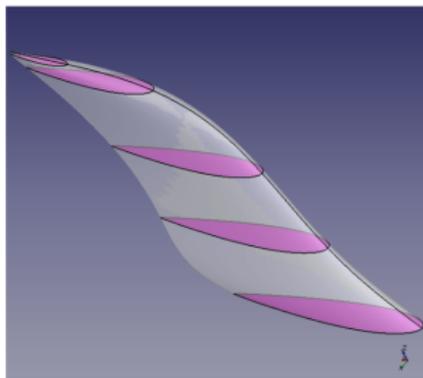
le pont de Bayonne

Quelques exemples historiques

- Problème de Dido et inégalité isopérimétrique
- Optimisation de forme en nature
- Optimisation de formes en architecture
- Vers l'optimisation de forme moderne

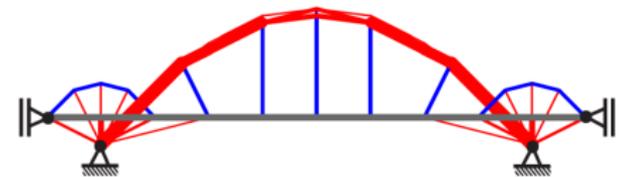
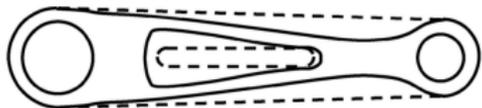
Vers l'optimisation de forme moderne

- ★ des méthodes d'optimisation de formes plus avancées ont émergé après 1960
 - Le développement des outils numériques pour simuler des phénomènes complexes (la méthode **des éléments finis**)
 - L'apparition des ordinateurs plus puissants
- ★ Un domaine important d'intérêt est l'**aéronautique**, où les ingénieurs veulent optimiser le **profil des ailes** pour
 - minimiser la **traînée**
 - maximiser la **portance**



Vers l'optimisation de forme moderne (2)

★ assistance ordinateur : applications ingénierie civile et mécanique



Vers l'optimisation de forme moderne (3)

- ★ L'optimisation de formes et topologique est utilisée en industrie avec des applications très variées
- ★ Plusieurs logiciels industriels sont disponibles : OptiStruct, Ansys, Tosca...
- ★ Des structures complexes ne pouvaient pas être fabriquées dans le passé
- ★ ... aujourd'hui tout est possible (enfin, presque tout) en utilisant la **fabrication additive**



- ★ **Airbus**: optimiser la structure d'une aile : économiser 1000kg par avion



- ★ **Renault**: optimisation structure intérieure hayon, optimisation supports moteur, etc.

Quelques méthodes en optimisation topologique

- "aller-retour" entre ingénieur et responsable simulation : processus très lent
- optimisation génétique : si peu de paramètres rentrent en jeu
- optimisation avec algorithme de gradient : beaucoup plus efficace mais nécessite quelques calculs théoriques
→ [G. Allaire, *Conception optimale de structures*]
- optimisation avec différentiation automatique : il n'est pas nécessaire de calculer le gradient à la main mais nécessite des travaux poussés en informatique
→ [Mohammadi, Pironneau, *Applied Shape Optimization for Fluids*]
- Développements récents : optimisation topologique très rapide sur les GPU, encore des challenges de codage

- comprendre l'impact des questions d'existence des solutions sur l'approche numérique
- voir comment calculer [la dérivée de forme](#) dans certains cas standard
- observer des implémentations basiques en 2D en FreeFem++ : voir comment créer vos propres cas d'optimisation, observer l'impact des paramètres sur le design final
- vers la fin, voir quels sont les difficultés en 3D sur des cas test standard

Disclaimer

Ce cours se veut [une introduction](#) à l'Optimisation Topologique. L'objectif est de [comprendre quelques exemples standard](#) et de vous former une idée de ce que les logiciels font quand ils optimisent des formes.

Pour aller plus loin [consultez la liste de références fournie](#).

Notions de base

- C'est quoi un problème d'optimisation de formes?
- Exemples et modèles
- Aperçu rapide de la méthode des éléments finis

Formulation typique

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} \mathcal{F}(\Omega) \quad t.q. \quad C(\Omega) \leq 0$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est une **forme** ou une **variable de design**
 - \mathcal{F} est une **fonction objectif, coût** qui dépend d' Ω
 - Exemples : volume, périmètre (surface), compliance, etc.
 - $C(\Omega)$ est une **fonction contrainte**
 - \mathcal{A} est l'ensemble des **formes admissibles**
 - informations sur les ensembles Ω
 - contient des éventuelles contraintes
- ★ En mécanique et application physiques, $J(\Omega)$ et $C(\Omega)$ dépendent souvent d' Ω via **une fonction d'état** u_Ω , solution d'une EDP sur Ω .
- équation de la chaleur, élasticité linéarisée, équation de Stokes, etc

Plusieurs ingrédients :

- un **modèle physique**, souvent sous la forme d'une EDP pour décrire le comportement des formes
- une **description mathématique** des formes et leurs variations (un jeu de paramètres, fonction densité, etc...)
- une **description numérique** des formes (maillage, représentation splines, etc)

★ ces choix sont inter-connectées et sont guidées par chaque application particulière

★ trois catégories principales : optimisation **paramétrique**, **géométrique** et **topologique**

★ points de vue différents sur le problème

★ les approches mathématiques et numériques ont des points en commun

Problème

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} \mathcal{F}(\Omega), \quad C(\Omega) \leq 0$$

- existence des solutions
- conditions d'optimalité, régularité des solutions
- trouver explicitement la solution (souvent impossible)
- propriétés qualitatives
- approximation numérique

Quelques idées concernant l'existence des solutions

Cas classique - $f : K \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\min_{x \in K} f(x)$$

Résultat classique

Une fonction continue sur un compact atteint ses valeurs extrémales

Approche classique en optimisation

★ **continuité** + **compacité** \implies **existence des solutions**

Questions délicates en optimisation de formes

- quelle topologie choisir sur l'ensemble de formes ?
- **compacité** - peu d'ensembles ouverts
- **continuité** - beaucoup d'ensembles ouverts

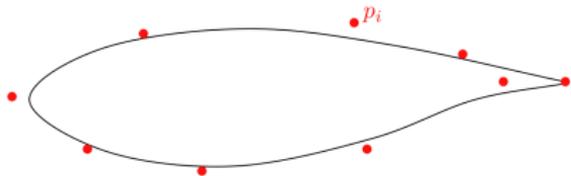
Problème

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} \mathcal{F}(\Omega),$$

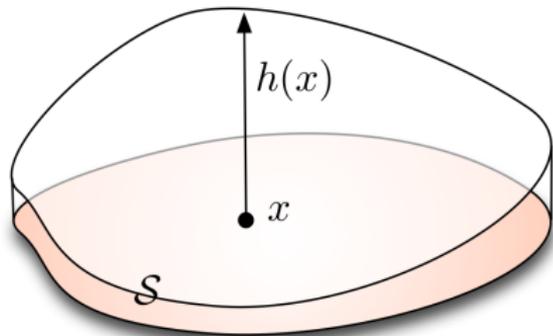
- peut-on **diminuer $\mathcal{F}(\Omega)$** tout en préservant les éventuelles contraintes
- avoir des méthodes numériques et algorithmes efficaces pour automatiser la recherche des domaines meilleurs
- **l'existence et la régularité de la solution** ne posent pas de problèmes pour les applications en pratique, mais **peuvent expliquer un comportement bizarre d'un algorithme numérique**

Optimisation paramétrique

Les formes sont décrites par un jeu de **paramètres** physiques : épaisseur, points de contrôle, etc



description d'une aile par des NURBS; les paramètres p_i sont les points de contrôle



Description d'une plaque par son épaisseur $h : S \rightarrow \mathbb{R}_+$

Optimisation paramétrique (2)

- Les paramètres qui décrivent les formes sont les seules **variables d'optimisation**, et le problème d'optimisation de formes devient

$$\min_{(p_i) \in \mathcal{P}_{ad}} J(p_1, \dots, p_N),$$

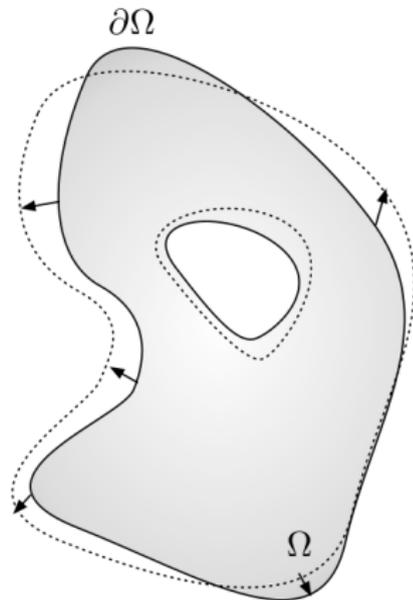
où \mathcal{P}_{ad} est l'ensemble des **paramètres admissibles**

- Dans l'optimisation paramétrique il est facile de voir la variation de la forme par rapport à chaque paramètre p_i

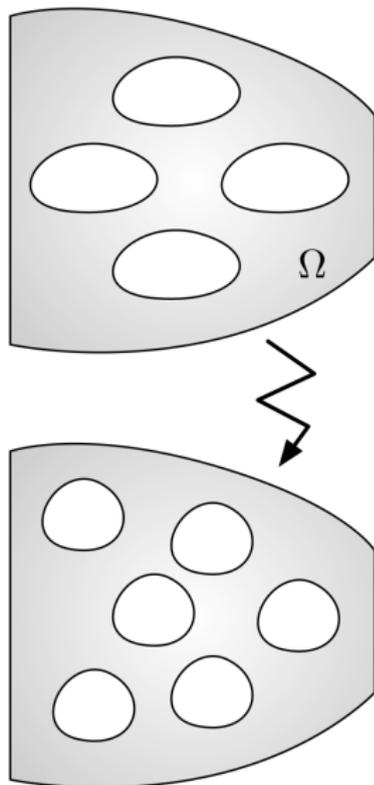
$$(p_i)_{i=1, \dots, N} \rightarrow (p_i + \delta p_i)_{i=1, \dots, N}.$$

- Utiliser une telle méthode impose une restriction importante sur les designs possibles et nécessite une connaissance *a priori* du design optimal souhaité

- La topologie de la forme est fixée (le numéro de trous en 2d)
- La variable d'optimisation est toute la **frontière** $\partial\Omega$ de la forme Ω
- L'optimisation géométrique donne plus de liberté que l'optimisation paramétrique



- Dans beaucoup d'applications la **topologie** des formes n'est pas connue, et est sujet d'optimisation
- Dans ce cadre on préfère souvent de ne pas décrire les frontières des formes et d'utiliser des représentations qui permettent naturellement des **changements de topologie**
- une possibilité est de décrire Ω par des **fonctions densité** $h : D \rightarrow [0, 1]$.



Notions de base

- C'est quoi un problème d'optimisation de formes?
- **Exemples et modèles**
- Aperçu rapide de la méthode des éléments finis

Exemple académique

Une **cavité** $D \subset \mathbb{R}^d$ est remplie par un matériel ayant conductivité thermique $h : D \rightarrow \mathbb{R}_+$.

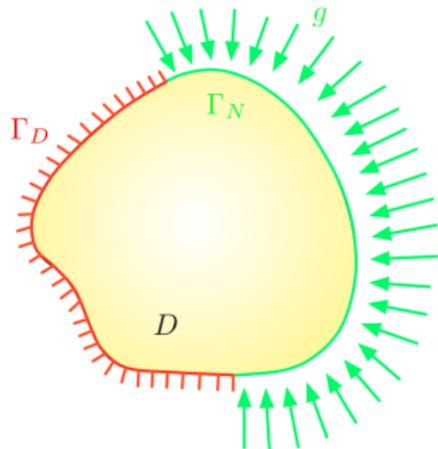
- Une région $\Gamma_D \subset \partial D$ est tenue à température 0
- Un **flux de chaleur** g est appliqué sur $\Gamma_N = \partial D \setminus \Gamma_D$
- Une **source de chaleur** ou **puits** $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ actionne à l'intérieur de D

La **température** $u_h : D \rightarrow \mathbb{R}$ dans la cavité est la solution de l'**équation de la chaleur** :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u_h) & = f & \text{dans } D \\ u_h & = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ h \frac{\partial u_h}{\partial n} & = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

Problème d'optimisation **paramétrique** : la **variable de design** est la conductivité $h \in \mathcal{U}_{ad}$, où

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^\infty(D), \alpha \leq h(x) \leq \beta, x \in D\}$$



Exemple académique : fonctions objectif

- La **compliance** $C(h)$ de la cavité D :

$$C(h) = \int_D h |\nabla u_h|^2 dx = \int_{\Gamma_N} g u_h ds,$$

comme une mesure du travail du flux de chaleur sur D

- Une **erreur type moindres-carrés** entre u_h et la température cible u_0 :

$$D(h) = \left(\int_D k(x) |u_h - u_0|^\alpha dx \right)^{1/\alpha},$$

où α est un paramètre fixe et $k(x)$ une fonction poids

- l'opposée de la **première valeur propre** de la cavité :

$$-\lambda_1(h), \text{ avec } \lambda_1(h) = \min_{u \in H^1(D), u=0 \text{ sur } \Gamma_D} \frac{\int_D h |\nabla u|^2 dx}{\int_D u^2 dx},$$

qui caractérise le taux instantané de la décroissance de la chaleur dans D

Exemple académique : une autre variante

Ce problème admet une variante du type **optimisation géométrique** : supposons que la conductivité dans D est égale à

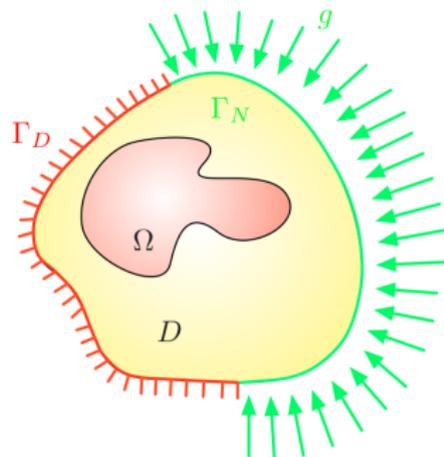
- Une valeur élevée β dans une région $\Omega \subset D$
- Une valeur faible α dans $D \setminus \bar{\Omega}$

Finalement $h_\Omega = \alpha + \chi_\Omega(\beta - \alpha)$ où χ_Ω est la fonction caractéristique de Ω .

La **température** $u_h : D \rightarrow \mathbb{R}$ est la solution de l'**équation de la chaleur** :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u_h) & = f & \text{dans } D \\ u_h & = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ h \frac{\partial u_h}{\partial n} & = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

Problème d'optimisation **géométrique** : la **variable de design** est la forme géométrique Ω ayant la conductivité plus élevée



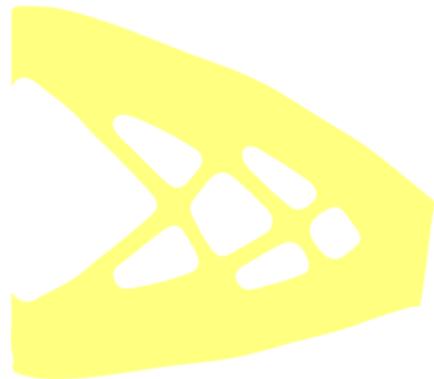
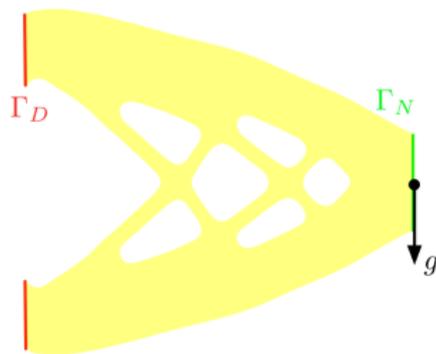
On considère une **structure** $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, définie par un domaine borné qui est

- fixé sur une partie $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ de sa frontière
- soumis à des **chargements surfaciques** g appliqués sur $\Gamma_N \subset \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$

Le champ de déplacement $u_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est calculé en résolvant le **système d'élasticité linéarisée**

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u)) & = 0 & \text{dans } D \\ u & = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ Ae(u)n & = g & \text{sur } \Gamma_N \\ Ae(u)n & = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N) \end{cases}$$

où $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u)$ est le tenseur de déformations et A est la loi de Hooke du matériel



- Le travail des forces extérieures g ou la **compliance** $C(\Omega)$ du domaine Ω :

$$C(\Omega) = \int_{\Omega} A e(u_{\Omega}) : e(u_{\Omega}) dx = \int_{\Gamma_N} g \cdot u_{\Omega} ds,$$

- Une **erreur type moindres-carrés** entre u_{Ω} et un déplacement cible u_0 (utile pour le design de micro-mécanismes) :

$$D(\Omega) = \left(\int_{\Omega} k(x) |u_h - u_0|^{\alpha} dx \right)^{1/\alpha},$$

où α est un paramètre fixe et $k(x)$ une fonction poids

- Contrainte sur le **volume** $\text{Vol}(\Omega)$ ou sur le **périmètre** $\text{Per}(\Omega)$ des formes

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} dx, \quad \text{Per}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} ds.$$

- Contrainte sur le **tenseur de contraintes** :

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} \|\sigma(u_{\Omega})\|^2 dx,$$

où $\sigma(u) = Ae(u)$ est le tenseur des contraintes

- **Contraintes géométriques** :
 - épaisseur minimale et maximale des formes
 - contraintes sur les **rayons de courbure**
 - contraintes type moulage

telles contraintes sont souvent imposées par les **processus de fabrication**

Un fluide incompressible avec viscosité cinématique ν occupe un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

- Le flux u_{in} à travers l'**input** Γ_{in} est connu
- Un profil de pression p_{out} est imposé sur la **sortie** Γ_{out} .
- Des condition "no-slip" sont imposées sur la **frontière libre**
 $\Gamma = \partial\Omega \setminus (\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out})$

Si le nombre de Reynolds $Re = VL/\nu$ est petit alors la vitesse $u_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et la pression $p_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient les **équations de Stokes**

$$\left\{ \begin{array}{lll} -2\nu \operatorname{div}(\sigma(u, p)) & = & f \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u & = & u_{in} \quad \text{sur } \Gamma_{in} \\ u & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \sigma(u, p)n & = & -p_{out} \quad \text{sur } \Gamma_{out} \end{array} \right.$$

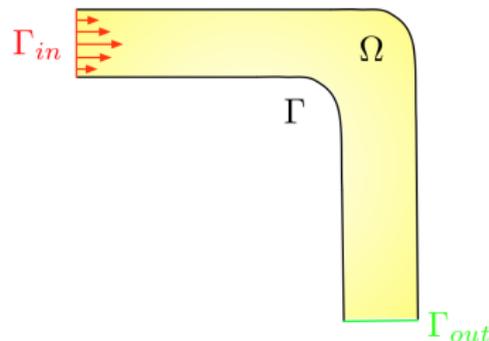
Exemple de problème modèle 1

Optimiser la forme d'un tuyau

- La forme à optimiser est un tuyau qui relie la partie input Γ_{in} au bord Γ_{out}
- Une fonction objectif possible est le **travail total des forces visqueuses** dans la forme

$$J(\Omega) = 2\nu \int_{\Omega} D(u_{\Omega}) : D(\Omega).$$

- Une contrainte sur le volume $\text{Vol}(\Omega)$ est imposée

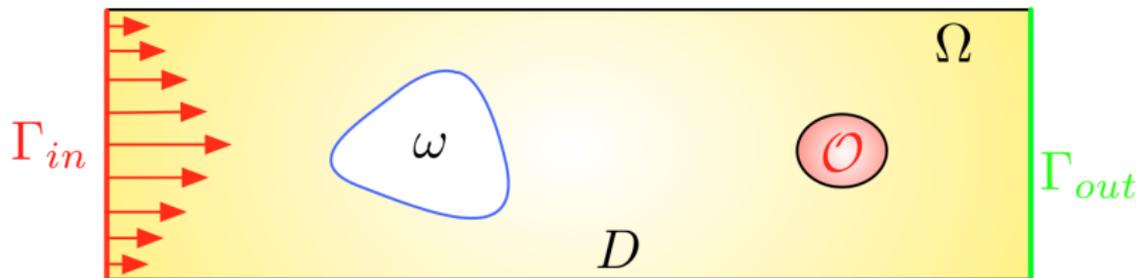


Exemple de problème modèle 2

Reconstruction de la forme d'un obstacle

- Un obstacle avec une forme inconnue ω est immergé dans un domaine fixe D rempli avec un fluide
- On dispose de la mesure u_{meas} de la vitesse u_Ω dans une petite **région d'observation** \mathcal{O} et on voudrait reconstruire la forme ω
- Le domaine optimisé est $\Omega = D \setminus \bar{\omega}$ et seulement la partie $\partial\omega$ de $\partial\Omega$ est optimisée. La fonction objectif à minimiser est le **critère moindres carrés**

$$J(\Omega) = \int_{\mathcal{O}} |u_\Omega - u_{meas}|^2 dx.$$



- Optimiser la section d'une aile pour diminuer la traînée est un challenge dans l'industrie de l'aéronautique depuis longtemps
- Optimiser la microstructure des matériaux composites
- etc ...

- **Modélisation** : décrire le problème physique par un modèle relevant mais accessible du point de vue analytique et numérique
- **Aspect théorique** : pour certains modèles les formes optimales n'existent pas, on s'attend à obtenir au plus des minima locaux
- **Aspect théorique et numérique** : la variable d'optimisation est un domaine. Il faut développer des outils pour **dériver des fonctionnelles qui dépendent des domaines** et bien **paramétrer les formes et leurs variations**
- **Aspect numérique** : comment représenter les formes et leurs évolutions ?
- **Aspect numérique** : certains problèmes d'optimisation peuvent être sensibles par rapport aux erreurs de discrétisation

Notions de base

- C'est quoi un problème d'optimisation de formes?
- Exemples et modèles
- Aperçu rapide de la méthode des éléments finis

- Comme problème modèle considérons l'équation de Laplace

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(D) \text{ tel que } \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } D \\ u = 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

où $f \in L^2(D)$ est une source donnée.

- Il est possible d'associer une **formulation variationnelle** :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V \text{ on a } a(u, v) = \ell(v)$$

où

- L'espace Hilbert V est l'espace Sobolev $H_0^1(D)$
- $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur V donnée par $a(u, v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx$
- $\ell(\cdot)$ est une forme linéaire sur V donnée par $\ell(v) = \int_D f v dx$
- Le théorème de **Lax-Milgram** montre que la formulation variationnelle admet une unique solution dans V .

Méthode des éléments finis

- La **méthode des éléments finis** propose de chercher une approximation u_h dans un **sous-espace de dimension finie** $V_h \subset V$.
- la formulation variationnelle exacte est remplacée par :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que $\forall v_h \in V_h$ on a $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$

qui est à nouveau bien posée comme conséquence de Lax-Milgram

- **Avantage** : V_h étant de dimension finie, il suffit de choisir une base $\mathcal{B} = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ et la formulation variationnelle devient un **système linéaire** $A\bar{u} = b$ avec

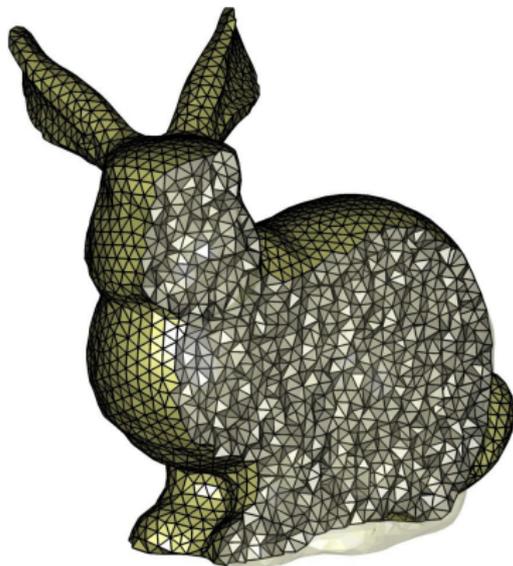
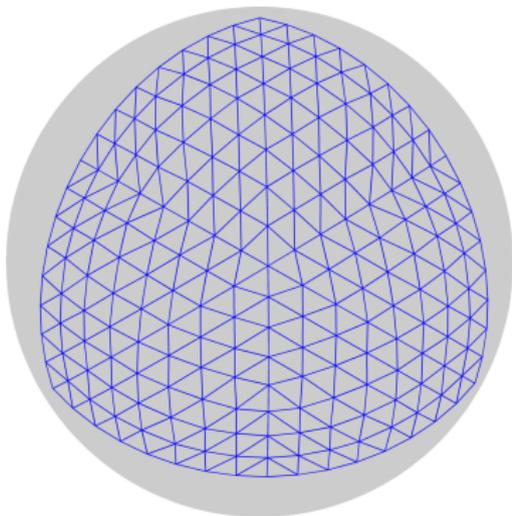
$$A = (a(\varphi_i, \varphi_j)), \quad b = (\ell(\varphi_i))$$

où \bar{u} sont les coefficients de u_h dans la base \mathcal{B} .

- Le choix de la base est important : un des objectifs est d'avoir un système avec une **matrice creuse**

Construction de l'espace d'éléments finis

- Le domaine D est **discrétisé** en utilisant un **maillage** \mathcal{T}_h qui consiste d'une partitions en triangles en 2D et tétraèdres en 3D.
- Le paramètre h qui indique la convergence de la méthode est typiquement la taille maximale d'un élément de maillage.



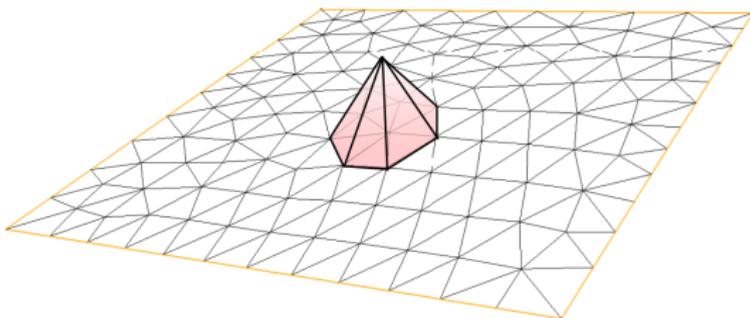
Construction de l'espace d'éléments finis (2)

Une base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}\}$ des **fonctions éléments finis** est introduite sur le maillage \mathcal{T}_h

Exemple

- N_h est le numero de sommets a_1, \dots, a_{N_h} du maillage
- Pour chaque $i = 1, \dots, N_h$, φ_i est affine sur chaque maille $T \in \mathcal{T}_h$ et

$$\varphi_i(a_i) = 1 \text{ et } \varphi_i(a_j) = 0 \text{ pour } i \neq j$$



Formulation du système matriciel

On décompose la solution u_h dans la base d'éléments finis

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_j \varphi_i$$

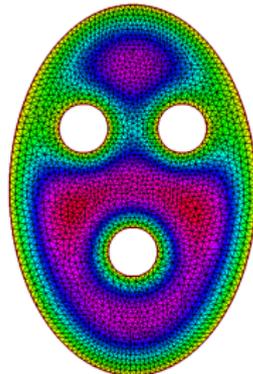
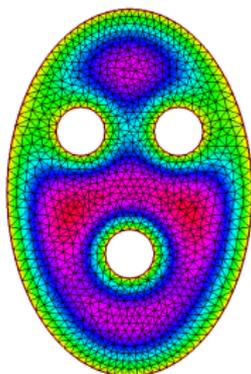
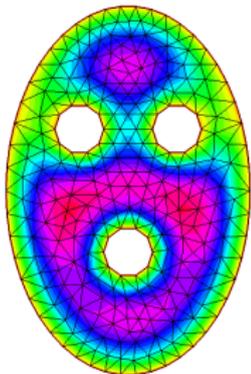
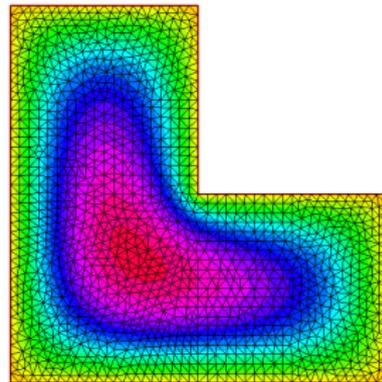
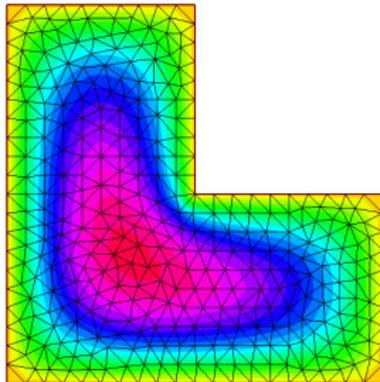
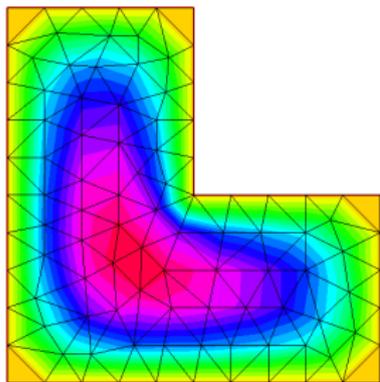
et le problème variationnel devient un **système linéaire** de taille $N_h \times N_h$

$$KU = f$$

où

- $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N_h} \end{pmatrix}$ est le vecteur des coefficients
- K est la matrice de **rigidité** définie par $K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$
- F est le vecteur $F = (\ell(\varphi_i))_{i=1, \dots, N_h}$.

Exemples de résolution sur des différents maillages



- La méthode peut être appliquée (avec un peu de travail !) pour d'autres cas :
 - problèmes variationnels mixtes comme l'équation de Stokes
 - problèmes aux valeurs propres
 - EDP non linéaires comme les équations Navier-Stokes ou le système d'élasticité non-linéaire
- Références :
 - [G. Allaire, *Analyse numérique et Optimisation*]
 - [A. Ern et J.-L. Giermond, *Theory and Practice of Finite Elements*]
- En pratique il est mieux de faire confiance aux solutions existantes (genre FreeFem++) que de coder les éléments finis soi-même