

# Problèmes d'optimisation paramétrique

- Présentation du problème modèle
- Non-existence des designs optimaux
- Calculer la dérivée de la fonction objectif
- Méthode formelle de Cea
- Algorithmes numériques

# Problème modèle - équation de la chaleur

- Optimiser la **conductivité thermique**  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  pour des divers objectifs.
- La **température**  $u_h : D \rightarrow \mathbb{R}$  est la solution de l'**équation de la chaleur** :

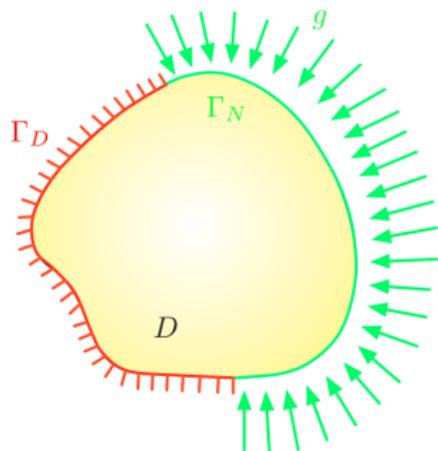
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u_h) & = f & \text{dans } D \\ u_h & = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ h \frac{\partial u_h}{\partial n} & = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

où  $f \in L^2(D)$  et  $g \in L^2(\Gamma_N)$

- L'ensemble  $\mathcal{U}_{ad}$  des **designs admissibles** est

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^\infty(D), \alpha \leq h(x) \leq \beta, x \in D\}$$

avec  $0 < \alpha < \beta$  des constantes.



- On considère un problème de la forme

$$\min_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h) \text{ où } J(h) = \int_D j(u_h) dx$$

avec une fonction assez régulière

- Dans ce cadre simplifié la fonction d'état  $u_h$  est calculée sur le même domaine  $D$  pour des différents valeurs de la variable de design  $h \in \mathcal{U}_{ad}$
- Même dans ce cadre simple, le problème d'optimisation n'admet pas de minimiseur global en général...

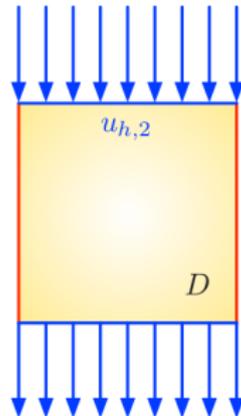
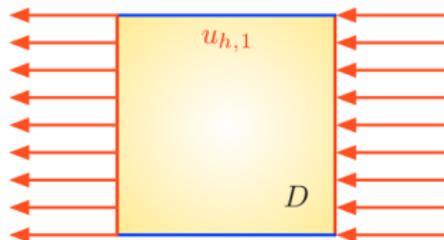
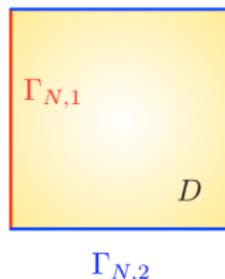
## Problèmes d'optimisation paramétrique

- Présentation du problème modèle
- **Non-existence des designs optimaux**
- Calculer la dérivée de la fonction objectif
- Méthode formelle de Cea
- Algorithmes numériques

# Exemple de non-existence

- détails :  $\rightarrow$  [G. Allaire, *Conception Optimale de Structures*], Section 5.2
- On considère  $D = (0, 1)^2$  le carré unité
- Deux équations d'état :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(h\nabla u_{h,1}) = 0 & \text{dans } D \\ h\partial_n u_{h,1} = e_1 \cdot n & \text{sur } \Gamma_{N,1} \\ h\partial_n u_{h,1} = 0 & \text{sur } \Gamma_{N,2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(h\nabla u_{h,2}) = 0 & \text{dans } D \\ h\partial_n u_{h,2} = 0 & \text{sur } \Gamma_{N,1} \\ h\partial_n u_{h,2} = e_2 \cdot n & \text{sur } \Gamma_{N,2} \end{array} \right.$$



# Non-existence : objective function

Le probleme d'optimisation :

$$\min_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h)$$

où la fonction objectif est

$$J(h) = \int_{\Gamma_{N,1}} e_1 \cdot n u_{h,1} ds - \int_{\Gamma_{N,2}} e_2 \cdot n u_{h,2} ds$$

et l'ensemble des designs admissibles contient aussi une **contrainte de volume**

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^\infty(D) : \alpha \leq h \leq \beta, \int_D h dx = V_T\}$$

- **Minimiser** la différence de température entre la gauche et la droite
- **Maximiser** la différence de température entre le haut et le bas

## Theorem

Le problème d'optimisation  $\min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(h)$  n'admet pas de solution globale.

Idée de preuve :

- Calculer une **borne inférieure** sur les valeurs de  $J(h)$ ,  $h \in \mathcal{U}_{ad}$

$$J(h) \geq m, \quad \forall h \in \mathcal{U}_{ad}$$

- Montrer que la borne inférieure n'est pas atteinte

$$J(h) > m, \quad \forall h \in \mathcal{U}_{ad}$$

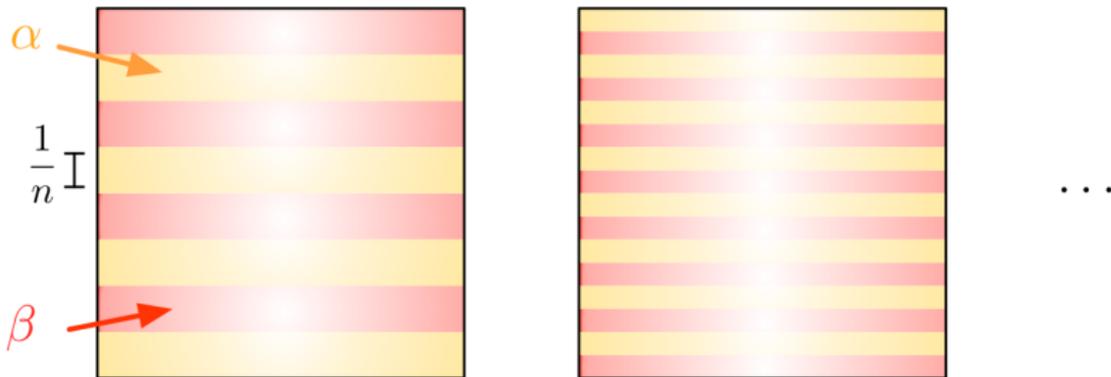
- Construire une **suite minimisante** de designs  $h^n \in \mathcal{U}_{ad}$  telle que

$$J(h^n) \rightarrow m$$

Conclure que  $m$  est l'infimum de  $J(h)$  sur  $\mathcal{U}_{ad}$  mais il n'est pas atteint.

# Non-existence : suite minimisante

La suite minimisante avec une structure laminaire avec des conductivités minimales et maximales alternantes



**Effet d'homogénéisation** : les designs optimaux ont tendance de créer des structures de plus en plus fines au niveau microscopique

- Beaucoup de problèmes d'optimisation de formes n'ont pas de solution pour des raisons diverses
- Il est possible de récupérer l'existence en utilisant des astuces mathématiques
  - **Relaxation** : **élargir** la classe des designs admissibles pour permettre des effets d'homogénéisation
  - **Restriction** : restreindre la classe  $\mathcal{U}_{ad}$  en imposant des propriétés de régularité
- impact pratique : chercher plutôt des minima locaux en améliorant des designs existants
- il est naturel d'observer une dépendance forte du résultat par rapport au design initial
- il est souvent possible de pouvoir prouver l'existence des solutions pour le problème discrétisé : réduction au dimension finie

## Problèmes d'optimisation paramétrique

- Présentation du problème modèle
- Non-existence des designs optimaux
- **Calculer la dérivée de la fonction objectif**
- Méthode formelle de Cea
- Algorithmes numériques

- Le probleme :

$$\min_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h)$$

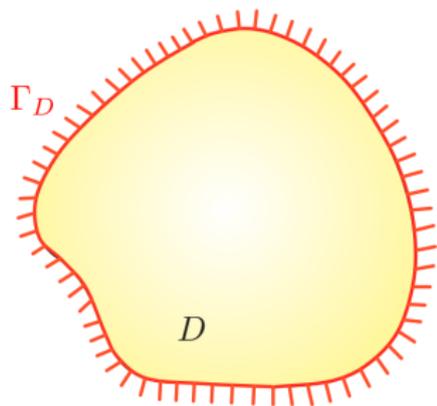
$$\text{avec } J(h) = \int_D j(u_h) dx$$

- L'ensemble  $\mathcal{U}_{ad}$  des **designs admissibles** est

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^\infty(D), \alpha \leq h \leq \beta\}$$

- La **température**  $u_h : D \rightarrow \mathbb{R}$  est la solution de l'**équation de la chaleur** :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h \nabla u_h) & = f & \text{dans } D \\ u_h & = 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$



# Pourquoi calculer une dérivée ?

- Plusieurs manières d'optimiser

- algorithmes sans gradient : génétique, etc... coût de calcul élevé, beaucoup d'évaluations pour la fonction objectif
- algorithmes qui utilisent les dérivées : convergence plus rapide vers un minimum local, nombre raisonnable d'évaluations de la fonction objectif, possibles difficultés pour le calcul théorique et numérique du gradient

## Algorithme basé sur le gradient

**Initialisation** : Choisir un design initial  $h_0$

**Pour**  $n = 0, \dots$ , **convergence** :

1. Calculer la fonction objective et sa **dérivée**  $J'(h^n)$  de l'application  $h \mapsto J(h)$  en  $h = h^n$
2. Sélectionner un pas de temps  $\tau^n > 0$
3. Mettre à jour le design :  $h^{n+1} = h^n - \tau^n J'(h^n)$ .

Le point clé de la pratique de cette méthode est le calcul de la **dérivée** de  $J(h)$ .

## Theorem

La fonction objectif

$$J(h) = \int_D j(u_h) dx$$

est dérivable au sens de Fréchet en chaque  $h \in \mathcal{U}_{ad}$  et sa dérivée est

$$J'(h)(\hat{h}) = \int_D (\nabla u_h \cdot \nabla p_h) \hat{h} dx,$$

où l'état adjoint  $p_h \in H_0^1(D)$  est la solution du système

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h \nabla p_h) & = & -j'(u_h) & \text{dans } D \\ p_h & = & 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

L'application

$$\mathcal{U}_{ad} \ni h \mapsto u_h \in H_0^1(D)$$

est différentiable au sens de **Fréchet**, avec dérivée  $\hat{h} \mapsto u'_h(\hat{h})$ .

★ pour la preuve, utilisons le **théorème des fonctions implicites**

$$F : \mathcal{U}_{ad} \times H_0^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$$

définie par

$$\mathcal{F}(h, u) : v \mapsto \int_D h \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_D f v dx$$

- $\mathcal{F}$  est de classe  $C^1$
- Pour  $h \in \mathcal{U}_{ad}$   $u_h$  est solution unique de  $\mathcal{F}(h, u) = 0$
- La différentielle de l'application  $u \mapsto \mathcal{F}(h, u)$  est

$$H_0^1 \ni \hat{u} \mapsto \left[ v \mapsto \int_D h \nabla \hat{u} \cdot \nabla v dx \right] \in H^{-1}(D)$$

est un isomorphisme (**Lax-Milgram** à nouveau)

Donc le **théorème des fonctions implicites** nous montre que l'application  $h \mapsto u_h$  est de classe  $C^1$

Pour calculer la dérivée on commence par écrire la formulation variationnelle

$$\int_D h \nabla u_h \cdot \nabla v dx = \int_D f v dx$$

et on dérive par rapport à  $h$  dans la direction  $\hat{h} \in H_0^1(D)$ :

$$\int_D \hat{h} \nabla u_h \cdot \nabla v dx + \int_D h \nabla u'_h(\hat{h}) \cdot \nabla v dx = 0$$

En conséquence :

$$\int_D h \nabla u'_h(\hat{h}) \cdot \nabla v dx = - \int_D \hat{h} \nabla u_h \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in H_0^1(D)$$

On dérive maintenant  $J(h)$  en utilisant la différentiabilité de  $h \mapsto u_h$

$$J'(h)(\hat{h}) = \int_D j'(u_h) u'_h(\hat{h}) dx$$

- L'expression est bizarre :  $J'(h)(\hat{h})$  n'est pas explicite et il est difficile de trouver une **direction de descente**, i.e. un élément  $\hat{h} \in H_0^1(D)$  t.q.

$$J'(h)(\hat{h}) < 0.$$

- pour contourner cette difficulté on introduit l'**état adjoint**

# État adjoint

L'**état adjoint** est la solution dans  $H_0^1(D)$  de l'équation variationnelle

$$\int_D h \nabla p_h \nabla v \, dx = - \int_D j'(u_h) v, \quad \forall v \in H_0^1.$$

L'objectif est d'éliminer  $u'_h(\hat{h})$  dans l'expression de  $J'(h)$  :

$$\begin{aligned} J'(h)(\hat{h}) &= \int_D j'(u_h) u'_h(\hat{h}) \, dx \\ &= - \int_D h \nabla p_h \cdot \nabla u'_h(\hat{h}) \, dx \\ &= - \int_D h \nabla u'_h(\hat{h}) \cdot \nabla p_h \, dx \\ &= \int_D \hat{h} \nabla u_h \cdot \nabla p_h \, dx \end{aligned}$$

Avec cette formule il est facile de voir que  $\hat{h} = -\nabla u_h \cdot \nabla p_h$  est bien une **direction de descente**:

$$\hat{h} = -\nabla u_h \cdot \nabla p_h \Rightarrow J'(h)(\hat{h}) < 0$$

- L'état adjoint  $p_h$  satisfait l'équation

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla p_h) & = & -j'(u_h) & \text{dans } D \\ p_h & = & 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

qui est une "température virtuelle" dirigée par une source égale au taux de changement de l'intégrande dans  $J(h)$  à l'état  $u_h$

- Une deuxième interprétation du  $p_h$  est comme un **multiplicateur de Lagrange** associé à une contrainte type EDP si on écrit le problème d'optimisation sous la forme suivante :

$$\min_{(h,u)} \int_D j(u) dx \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u) & = & f & \text{dans } D \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

# Problèmes d'optimisation paramétrique

- Présentation du problème modèle
- Non-existence des designs optimaux
- Calculer la dérivée de la fonction objectif
- **Méthode formelle de Cea**
- Algorithmes numériques

Une **méthode formelle** pour calculer la dérivée de  $J(h)$  en **supposant** que la fonctionnelle  $h \mapsto u_h$  est différentiable.

On considère le **Lagrangien**

$$\mathcal{L} : \mathcal{U}_{ad} \times H_0^1(D) \times H_0^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$$

défini par

$$\mathcal{L}(h, u, p) = \int_D j(u) dx + \int_D h \nabla u \cdot \nabla p dx - \int_D f p dx$$

En particulier, si  $u = u_h$  alors pour tout  $\hat{p} \in H_0^1(D)$  on a

$$J(h) = \mathcal{L}(h, u_h, \hat{p}).$$

On cherche les points selle  $(u, p)$  du Lagrangien  $\mathcal{L}(h, \cdot, \cdot)$ : objectif - **quand on dérive par rapport à h - annuler des termes**

- dérivée partielle de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $p$  - zéro

$$\int_D h \nabla u \cdot \nabla \hat{p} dx - \int_D f \hat{p} dx = 0, \quad \forall \hat{p} \in H_0^1(D)$$

qui est la formulation variationnelle pour  $u = u_h$ .

- dérivée partielle de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $u$  - zéro

$$\int_D h \nabla p \cdot \nabla \hat{u} dx = - \int_D j'(u) \hat{u} dx, \quad \forall \hat{u} \in H_0^1(D)$$

qui est l'équation correspondant à l'état adjoint pour  $p = p_h$

- Pour tout  $\hat{p} \in H_0^1(D)$  on a

$$J(h) = \mathcal{L}(h, u_h, \hat{p}).$$

- on a supposé que  $h \mapsto u_h$  est différentiable, alors

$$J'(h)(\hat{h}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u_h, \hat{p})(\hat{h}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(h, u_h, \hat{p})(u'_h(\hat{h}))$$

- on prend  $\hat{p} = p_h$  pour annuler le dernier terme

$$J'(h)(\hat{h}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u_h, p_h)(\hat{h})$$

- En conséquence

$$J'(h)(\hat{h}) = \int_D \hat{h} \nabla u_h \cdot \nabla p_h dx$$



## Problèmes d'optimisation paramétrique

- Présentation du problème modèle
- Non-existence des designs optimaux
- Calculer la dérivée de la fonction objectif
- Méthode formelle de Cea
- Algorithmes numériques

- ★ si on n'a pas de contraintes, le problème peut être trivial
- ★ pour simplicité, pour instant, on considère une pénalisation fixe

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(h), \quad \text{où } J(h) = \int_D j'(u_h) + \ell \int_D h dx$$

Approche basique : [algorithme gradient projeté](#)

**Initialisation** : Choisir un design initial  $h^0$

**Pour**  $n = 0, \dots$  **convergence**

1. Calcul de l'**état**  $u_{h^n}$  et l'**adjoint**  $p_{h^n}$  pour  $h = h^n$
2. Direction de descente  $\hat{h}^n = -\nabla u_{h^n} \cdot \nabla p_{h^n} - \ell$ .
3. Choisir un pas de descente  $\tau^n > 0$
4. Définir le design suivant  $h^{n+1} = h^n + \tau^n \hat{h}^n$
5. Projeter sur la contrainte  $h^{n+1} = \min(\beta, \max(\alpha, h^{n+1}))$ .

- Le domaine  $D$  est représenté par un maillage fixe  $\mathcal{T}$ .
- La conductivité  $h$  recherchée est discrétisée :
  - éléments finis  $\mathbb{P}_0$  : constantes par triangle
  - éléments finis  $\mathbb{P}_1$  : constantes par nœuds
- Étant donné  $h$  les fonctions  $u_h$  et  $u_h$  sont calculées en utilisant la [méthode d'éléments finis](#) sur le maillage  $\mathcal{T}$ .

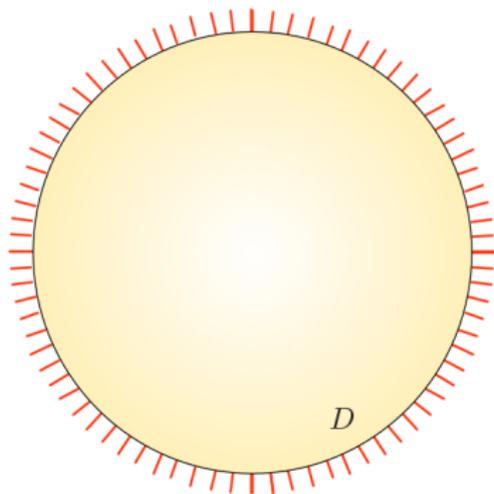
# Un premier exemple numérique

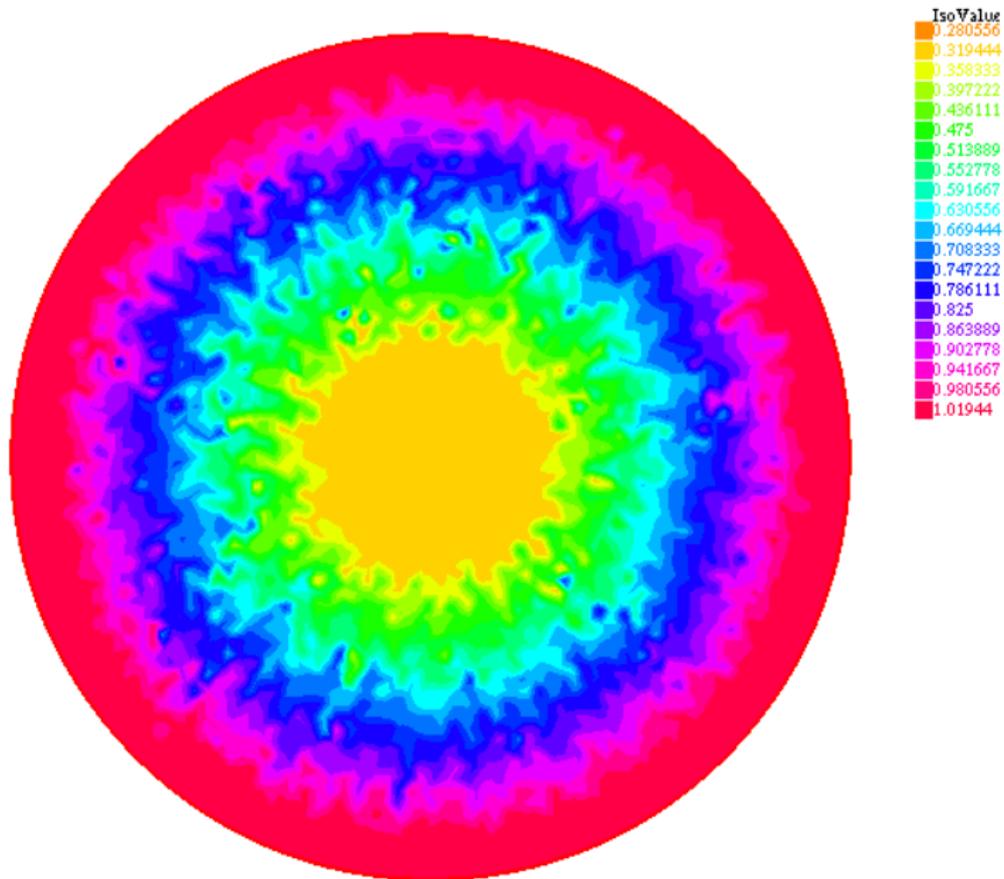
Considérons le problème

$$\min_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h)$$

avec  $J(h) = \int_D u_h dx + \ell \int_D h dx$

- minimiser la **température moyenne** dans  $D$
- on utilise une pénalisation fixe pour ne pas permettre la conductivité maximale dans tout le domaine





# Expliquer le comportement bizarre

- Comportement oscillatoire, non-régulier : la direction de descente est peu régulière :  $\hat{h}^n = -\nabla u_{h^n} \cdot \nabla p_{h^h} - \ell$
- le gradient d'une fonction  $\mathbb{P}_1$  est une fonction  $\mathbb{P}_0$  : constante sur chaque maille
- comment améliorer ce comportement ??
  - considérer des éléments finis  $\mathbb{P}_2$  : plus cher en temps de calcul
  - changer la direction de descente en quelque chose de plus régulier

$$J'(h)(\hat{h}) = \int_D \hat{h} \nabla u_h \cdot \nabla p_h dx$$

Par définition de la dérivée Fréchet :

$$J(h + \tau \hat{h}) = J(h) + \tau J'(h)(\hat{h}) + o(\tau)$$

Si  $\hat{h} = -\nabla u_h \cdot \nabla p_h$  alors

$$J(h + \tau \hat{h}) = J(h) - \tau \langle \nabla u_h \cdot \nabla p_h, \nabla u_h \cdot \nabla p_h \rangle_{L^2} + o(\tau)$$

Considérer d'autres produits scalaires que celui de  $L^2(D)$  : gagner en régularité

# Changer le produit scalaire...

Si  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert sous le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  alors on peut considérer la **formulation variationnelle**

$$\langle V, w \rangle_{\mathcal{H}} = J'(h)(w) = J'(h)(w) = \int_D w \nabla u_h \cdot \nabla p_h dx, \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Si  $V$  résout le problème ci-dessus alors  $-V$  est aussi direction de descente :

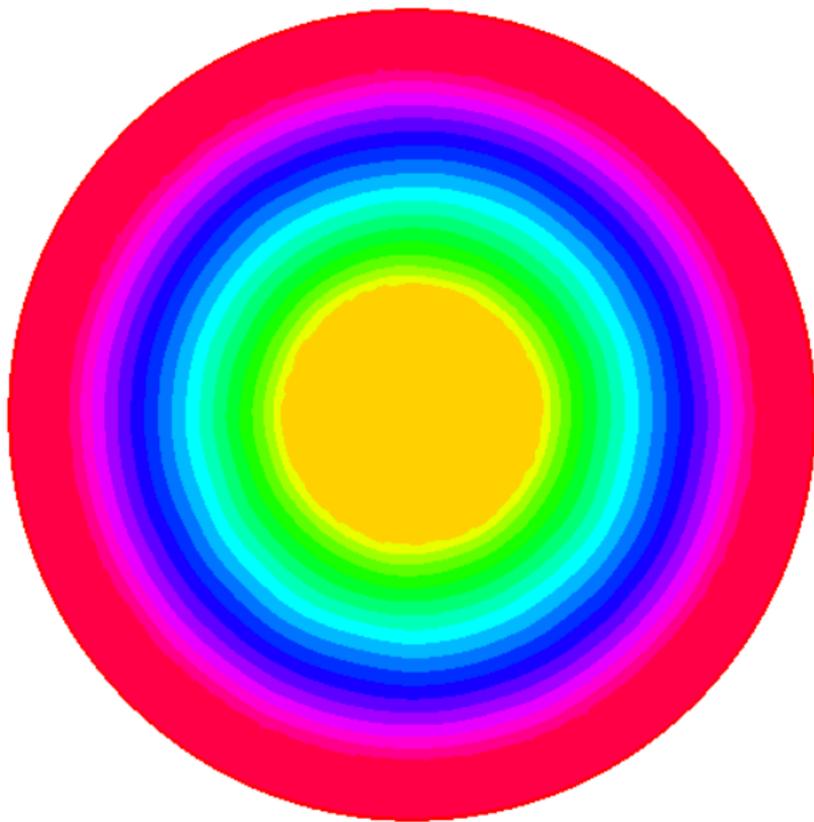
$$\begin{aligned} J(h - \tau V) &= J(h) - \tau J'(h)(V) + o(\tau) \\ &= J(h) - \langle V, V \rangle_{\mathcal{H}} + o(\tau) \\ &< J(h) \end{aligned}$$

Exemple de direction plus régulière

$\mathcal{H} = H^1(D)$  et

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_D (\alpha_{reg}^2 \nabla u \cdot \nabla v + uv) dx$$

pour  $\alpha_{reg}$  assez petit, de l'ordre du maillage



- il est possible d'utiliser des méthodes plus fines pour imposer la contrainte de volume : Lagrangien Augmenté, projeter sur la contrainte d'inégalité et de volume en même temps, etc.
- il est possible d'utiliser des méthodes quasi-Newton : approximation "low memory" de la Hessienne
- la méthode se généralise au cas où on cherche des formes optimaux représentées par des densités : "forcer"  $h$  à devenir une fonction caractéristique

# Optimisation géométrique

- Méthode de Hadamard et dérivées de forme
- Dérivée de forme : fonctionnelles qui dépendent des EDP
- Méthode de Cea : dérivation rapide
- Aspects numériques des méthodes géométriques

★ On est capable d'optimiser des formes si elles sont **paramétrisées** : un nombre fini de paramètres, une fonction  $h$  dans un espace vectoriel

**Avantages** : optimisation "facile"

**Inconvénients** :

- restriction majeure sur la classe de formes admissibles
- ce n'est pas toujours évident comment choisir ces paramètres

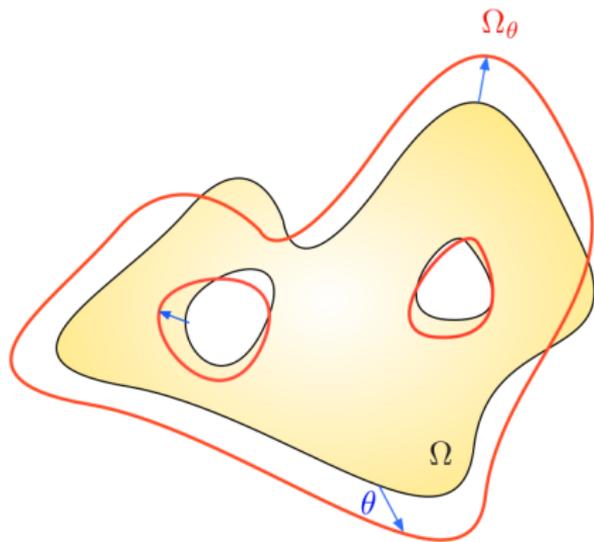
⇒ Il est utile de pouvoir vraiment **changer la géométrie des formes** dans le processus d'optimisation

# Méthode de Hadamard

- ★ pas de structure d'espace vectoriel
- ★ pour dériver on a besoin d'une notion de **perturbation petite**
- ★ on considère  $\Omega$  un domaine Lipschitz
- ★ soit  $\theta$  un champ de vecteurs Lipschitz
- ★ on considère l'application

$$\theta \mapsto \Omega_\theta := (\text{Id} + \theta)(\Omega)$$

pour  $\theta$  petit



## Théorème

Pour  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  avec norme  $\|\omega\|_{W^{1,p}} < 1$  l'application  $\theta \mapsto \text{Id} + \theta$  est un **difféomorphisme Lipschitz**

## Definition

Si  $\Omega$  est un domaine assez régulier, une fonction scalaire  $\Omega \mapsto J(\Omega) \in \mathbb{R}$  est **dérivable** en  $\Omega$  si l'application

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \ni \theta \mapsto J(\Omega_\theta)$$

est dérivable en 0 au sens de Fréchet

$$J(\Omega_\theta) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\|\theta\|).$$

L'application linéaire  $\theta \mapsto J'(\Omega)(\theta)$  est la **dérivée de forme** de  $J$  en  $\Omega$ .

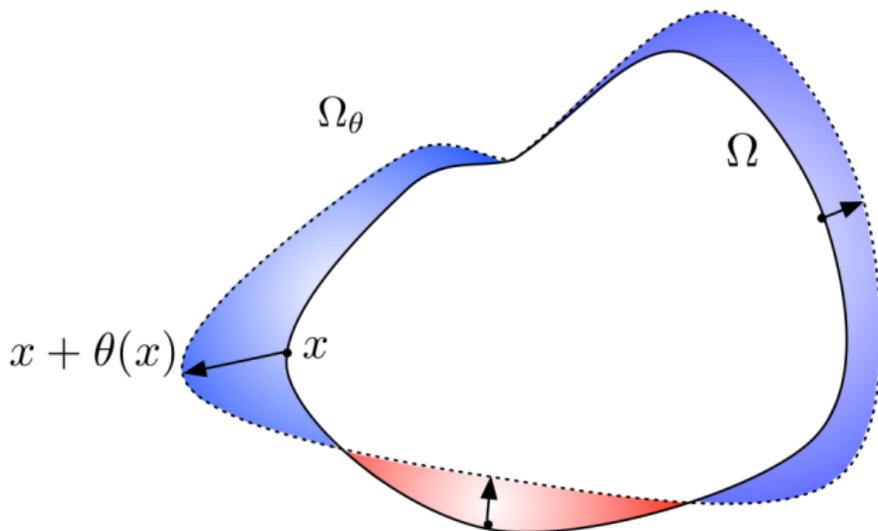
## Theorem

Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  un domaine *Lipschitz* et borné et  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$  une fonction fixée. On considère

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Alors  $J$  est différentiable par rapport à  $\Omega$  et

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} f \theta \cdot n ds$$



★ Calculer la dérivée du volume

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx$$

En appliquant le résultat précédent on obtient

$$\text{Vol}'(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n ds = \int_{\Omega} \text{div } \theta dx$$

★ On observe que si  $\text{div } \theta = 0$  alors la dérivée du volume est zéro.

# Démonstration

★ changer les variables pour se ramener à un domaine fixe

$$J(\Omega_\theta) = \int_{(\text{Id} + \theta)(\Omega)} f(x) dx = \int_{\Omega} |\det(\text{Id} + D\theta)| f \circ (\text{Id} + \theta) dx$$

★ l'application  $\theta \mapsto \det(\text{Id} + \nabla\theta)$  est différentiable Fréchet et

$$\det(\text{Id} + D\theta) = 1 + \text{div } \theta + o(\theta)$$

★ Si  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$  alors  $\theta \mapsto f(\text{Id} + \theta)$  est différentiable Fréchet et

$$f \circ (\text{Id} + \theta) = f + \nabla f \cdot \theta + o(\theta)$$

★ on retrouve le résultat en utilisant la formule de Green

**Idée standard :**

ramener tout à un domaine de référence fixe et différentier par rapport à  $\theta$

# Le deuxième cas standard

## Theorem

Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  un domaine borné de classe  $C^2$  et  $g \in W^{2,1}(\mathbb{R}^d)$  une fonction fixée. On considère

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} g(x) dx.$$

Alors  $J$  est différentiable par rapport à  $\Omega$  et

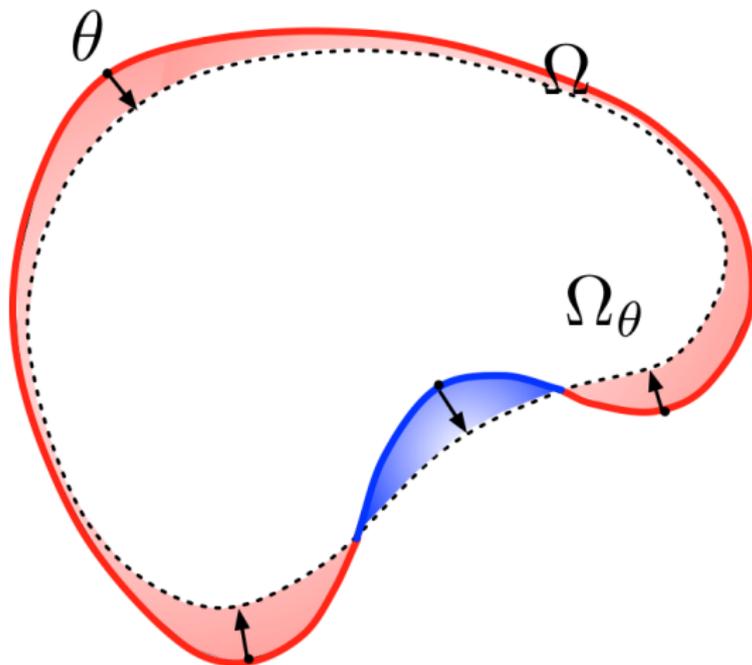
$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial g}{\partial n} + \kappa g \right) (\theta \cdot n) ds \quad \theta \cdot n ds,$$

où  $\kappa$  est la *courbure moyenne* de  $\partial\Omega$ .

## Conséquence immédiate

Le périmètre est défini par  $\text{Per}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 ds$ . La dérivée de forme du périmètre est

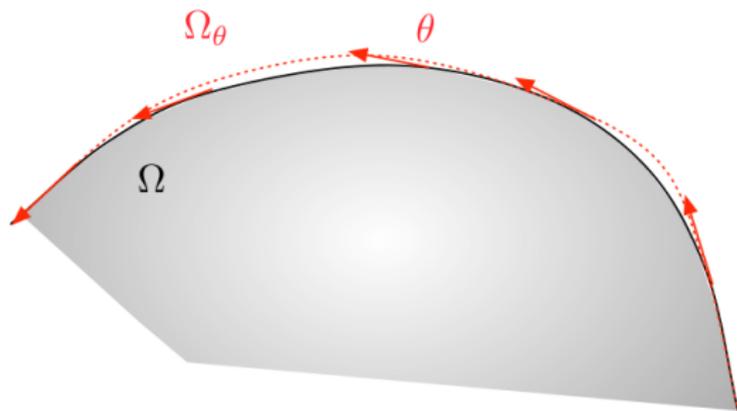
$$\text{Per}'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \kappa(\theta \cdot n) ds$$



★ le périmètre est réduit en remplissant les parties rentrantes et en régularisant les parties convexes

# Structure des dérivées de formes

★ pour les deux précédents exemples la dérivée de forme dépend uniquement de la partie normale  $\theta \cdot n$  du champs de vecteurs  $\theta$ .



★ Un **champs de vecteurs tangentiel**  $\theta$  ne change pas  $\Omega$  de manière essentielle et il est naturel d'avoir  $J'(\Omega)(\theta) = 0$ .

★ si on est dans un cadre suffisamment régulier alors la deux champs de vecteur ayant la même composante normale vont donner la même dérivée

## Structure de dérivées de formes (2)

★ dans la plupart des cas (simples) la fonctionnelle les dérivées de formes peuvent être représentées sous la forme

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v_{\Omega}(\theta \cdot n) ds,$$

où  $v_{\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction scalaire

★ cette structure peut donner facilement une **direction de descente** en choisissant  $\theta = -\tau v_{\Omega}$

$$J(\Omega_{\theta}) = J(\Omega) - t \int_{\partial\Omega} v_{\Omega}^2 ds + o(t) < J(\Omega), \quad t \ll 1$$

# Optimisation géométrique

- Méthode de Hadamard et dérivées de forme
- Dérivée de forme : fonctionnelles qui dépendent des EDP
- Méthode de Cea : dérivation rapide
- Aspects numériques des méthodes géométriques

- On sait dériver des fonctionnelles du type

$$F_1(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx, \quad F_2(\Omega) = \int_{\partial\Omega} g(x) dx$$

- On veut pouvoir considérer des fonctions de la forme

$$J_1(\Omega) = \int_{\Omega} j(u_{\Omega}(x)) dx, \quad J_2(\Omega) = \int_{\partial\Omega} k(u_{\Omega}(x)) ds$$

où  $j, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont assez régulières et  $u_{\Omega} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la solution d'une EDP sur  $\Omega$

# Exemple modèle : l'équation de Laplace

★  $u_\Omega$  est solution du système

$$\begin{cases} -\Delta u & = f & \text{dans } \Omega \\ u & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec  $\int_{\Omega} f dx = 0$  dans le cas Neumann.

★ La formulation variationnelle associée :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (H^1(\Omega)), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx = 0$$

★ calculer la dérivée de forme de

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} j(u_\Omega) dx,$$

avec  $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction assez régulière

# Optimisation géométrique

- Méthode de Hadamard et dérivées de forme
- Dérivée de forme : fonctionnelles qui dépendent des EDP
- **Méthode de Cea : dérivation rapide**
- Aspects numériques des méthodes géométriques

★ comme dans le cas de l'optimisation paramétrique, on considère le Lagrangien

$$\mathcal{L}(\Omega, u, p) = \int_{\Omega} j(u) dx + \int_{\Omega} (-\Delta u - f) p dx$$

avec  $\Omega, u, p$  indépendantes

★ on suppose que  $\Omega \rightarrow u_{\Omega}$  est différentiable

★ l'indépendance des variable permet d'éviter les problèmes de dérivées composées

★ !!!!! les variables doivent êtres vraiment indépendantes : les conditions de Dirichlet doivent apparaître dans le Lagrangien

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le Lagrangien est défini par :

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_{\Omega} j(v) dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla q dx + \int_{\Omega} vq - \int_{\Omega} fq,$$

où  $\Omega$  est une forme admissible et  $v, q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ , toutes ces trois variables étant indépendantes

★ par construction, si  $v = u_\Omega$  alors

$$\mathcal{L}(\Omega, u_\Omega, q) = \int_{\Omega} j(u_\Omega) dx = J(\Omega), \quad \forall q \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

On veut pouvoir dériver  $J(\Omega)$  sans que les autres dérivées partielles de  $\mathcal{L}$  apparaissent. On cherche donc des **points selles**  $(u, p)$  tels que

- $\forall q \in H^1(\mathbb{R}^d)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\Omega, u, p)(q) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla q dx + \int_{\Omega} u q dx - \int_{\Omega} f q dx = 0$$

- $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^d)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u, p)(v) = \int_{\Omega} j'(u) \cdot v dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla p dx + \int_{\Omega} v p dx = 0$$

$$\forall q \in H^1(\mathbb{R}^d)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\Omega, u, p)(q) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla q dx + \int_{\Omega} u q dx - \int_{\Omega} f q dx = 0$$

- en prenant  $q$  une fonction  $\psi$  régulière à support compact on retrouve l'équation

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi + \int_{\Omega} u \psi - \int_{\Omega} f \psi = 0 \implies -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega$$

- en prenant  $q = \psi$  régulière quelconque et en utilisant la formule de Green on trouve

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \psi ds = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

En conséquence :  $u = u_{\Omega}$

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^d) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u, p)(v) = \int_{\Omega} j'(u) \cdot v dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla p dx + \int_{\Omega} v p dx = 0$$

- En prenant  $v = \psi$  une fonction  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Omega} p \psi dx + \int_{\Omega} j'(u) \psi dx = 0 \implies -\Delta p + p = -j'(u_\Omega) \text{ dans } \Omega$$

- Pour  $v = \psi$  une fonction  $C^\infty$ , en utilisant la formule de Green

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} \psi ds = 0 \implies \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

En conclusion  $p = p_\Omega$  est solution de  $\begin{cases} -\Delta p + p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

- On sait que

$$\forall q \in H^1(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}(\Omega, u_\Omega, q) = \int_{\Omega} j(u_\Omega) dx = J(\Omega).$$

- En dérivant par rapport à  $\Omega$  on obtient

$$\forall \theta \in W^{1,\infty}, J'(\Omega) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u_\Omega, q)(\theta) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u_\Omega, q)(u'_\Omega(\theta)),$$

où  $u'_\Omega(\theta)$  est la dérivée de  $\Omega \mapsto u_\Omega$  dans la direction  $\theta$

- on prend  $q = p_\Omega$ , l'état adjoint, pour annuler le dernier terme :

$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u_\Omega, p_\Omega)(\theta)$$

# La dérivée de forme (2)

La dérivée de forme du  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\Omega$  revient à calculer la dérivée d'une fonctionnelle de type

$$\Omega \mapsto \int_{\Omega} f(x) dx$$

avec  $f$  une fonction fixe.

Pour  $\theta \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  on obtient

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} (j(u_{\Omega}) + \nabla u_{\Omega} \cdot \nabla p_{\Omega} + u_{\Omega} p_{\Omega} - f p_{\Omega}) \theta \cdot n ds$$

- On souhaite dériver

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} j(u_{\Omega}) dx \text{ avec } \begin{cases} -\Delta u & = f & \text{dans } \Omega \\ u & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Difficultés supplémentaires dues au fait que la condition Dirichlet doit être incluse dans l'espace des fonctions
- On ne peut pas utiliser le lagrangien

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_{\Omega} j(v) dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla q dx - \int_{\Omega} f v dx$$

car il faudrait le définir pour  $v, q \in H_0^1(\Omega)$ .

- Dans ce cas les variables  $\Omega, v, q$  ne sont pas indépendantes

★ **Solution:** On pénalise la condition au bord en ajoutant un nouveau multiplicateur de Lagrange: Pour  $v, q, \mu \in H^1(\mathbb{R}^d)$  on a

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q, \mu) = \int_{\Omega} j(v) dx + \int_{\Omega} (-\Delta v - f) q dx + \int_{\partial\Omega} \mu v ds$$

En intégrant par parties :

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q, \mu) = \int_{\Omega} j(v) dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla q dx - \int_{\Omega} f q dx + \int_{\partial\Omega} \left( \mu v - \frac{\partial v}{\partial n} q \right) ds$$

Si on évalue  $\mathcal{L}$  avec  $v = u_{\Omega}$  on obtient

$$\forall q, \mu \in H^1(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}(\Omega, u_{\Omega}, q) = \int_{\Omega} j(u_{\Omega}) dx = J(\Omega).$$

# Conditions point selle

Pour  $\Omega$  fixe on cherche les **points selle**  $(u, p, \lambda) \in (H^1(\mathbb{R}^d))^3$  pour la fonctionnelle  $\mathcal{L}(\Omega, \cdot, \cdot, \cdot)$ .

- $\forall q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\Omega, u, p, \lambda)(q) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla q dx - \int_{\Omega} f q dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} q ds = 0$$

- $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u, p, \lambda)(v) = \int_{\Omega} j'(u) \cdot v dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla p dx + \int_{\partial\Omega} \left( \lambda v - \frac{\partial v}{\partial n} p \right) ds = 0.$$

- $\forall \mu \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(\Omega, u, p, \lambda)(\mu) = \int_{\partial\Omega} \mu u ds = 0.$$

$\forall q \in H^1(\mathbb{R}^d),$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\Omega, u, p, \lambda)(q) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla q dx - \int_{\Omega} f q dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} q ds = 0$$

- On prend  $q = \psi$  une fonction  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi dx = \int_{\Omega} f \psi dx \implies -\Delta u = f \text{ dans } \Omega.$$

- On utilise  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(\Omega, u, p, \lambda)(\mu) = 0$  pour  $\mu = \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  et on obtient

$$\int_{\partial\Omega} \psi u dx = 0 \implies u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

En conclusion :  $u = u_\Omega$

$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^d),$

$$\int_{\Omega} j'(u) \cdot v dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla p dx + \int_{\partial\Omega} \left( \lambda v - \frac{\partial v}{\partial n} p \right) ds = 0.$$

- On prend  $v = \psi$  une fonction  $C^\infty$  avec support compact dans  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Omega} j'(u) \cdot \psi dx = 0 \implies -\Delta p = -j'(u) \text{ dans } \Omega$$

- On prend  $v = \psi$  une fonction  $C^\infty$  et on utilise la formule de Green

$$\forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} \psi ds + \int_{\partial\Omega} \left( \lambda \psi - \frac{\partial \psi}{\partial n} p \right) ds = 0.$$

- Dans la suite on considère deux cas : faire varier  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  quand  $\psi = 0$  sur  $\partial\Omega$  et l'inverse.

- en faisant varier  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  avec  $\psi = 0$  sur  $\partial\Omega$  on obtient  $p = 0$  sur  $\partial\Omega$ .  
En conclusion :

$$p = p_\Omega \text{ est solution de } \begin{cases} -\Delta p & = & -j'(u) & \text{dans } \Omega \\ p & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- en faisant varier  $\psi$  sur  $\partial\Omega$  avec  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  on obtient

$$\lambda_\Omega = -\frac{\partial p_\Omega}{\partial n} \text{ sur } \partial\Omega$$

- $\forall q, \mu \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathcal{L}(\Omega, u_\Omega, q, \mu) = \int_{\Omega} j(u_\Omega) = J(\Omega)$ .
- On dérive par rapport à  $\Omega$  et on évalue en  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ :

$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u_\Omega, q, \mu)(\theta) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u_\Omega, q, \mu)(u'_\Omega(\theta))$$

avec  $u'_\Omega(\theta)$  la dérivée de  $\Omega \mapsto u_\Omega$ .

- on prend  $q = p_\Omega, \mu = \lambda_\Omega$  pour avoir  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u_\Omega, p_\Omega, \lambda_\Omega) = 0$  et on obtient

$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u_\Omega, p_\Omega, \lambda_\Omega)(\theta)$$

★ on est a nouveau dans le cas où on dérive une fonction de forme du type

$$\Omega \mapsto \int_{\Omega} f(x) dx$$

On obtient que pour  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \left( j(u_{\Omega}) - \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial n} \frac{\partial p_{\Omega}}{\partial n} \right) \theta \cdot n ds$$

# Optimisation géométrique

- Méthode de Hadamard et dérivées de forme
- Dérivée de forme : fonctionnelles qui dépendent des EDP
- Méthode de Cea : dérivation rapide
- Aspects numériques des méthodes géométriques

**Initialisation** : Choisir une forme initiale  $\Omega^0$

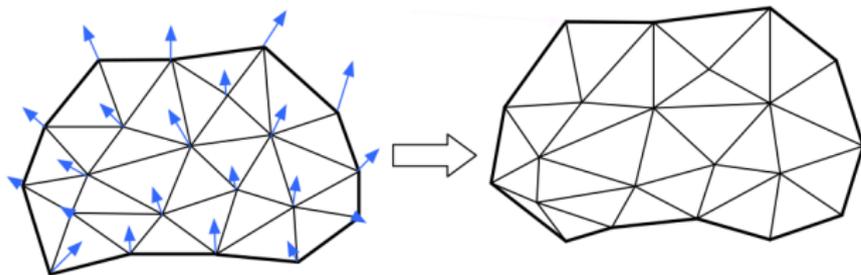
**Pour**  $n = 0, \dots$ , **convergence**

1. Calculer l'état  $u_{\Omega^n}$  et l'état adjoint  $p_{\Omega^n}$  sur  $\Omega^n$
2. Calculer la dérivée de forme  $J'(\Omega^n)$  et trouver une direction de descente  $\theta^n$  pour  $J(\Omega)$
3. **Modifier**  $\Omega^n$  suivant le champ de déplacement  $\theta^n$  pour un pas de descente  $\tau^n$  pour obtenir

$$\Omega^{n+1} = (Id + \tau^n \theta^n)(\Omega^n).$$

# Une implémentation possible

- Représenter chaque forme  $\Omega^n$  par un maillage  $\mathcal{T}^n$
- Utiliser la méthode des éléments finis sur  $\mathcal{T}^n$  pour calculer  $u_{\Omega^n}$  et  $p_{\Omega^n}$
- La direction de descente est calculée en utilisant la dérivée de forme  $J'(\Omega)$
- L'advection de la forme  $\Omega^{n+1} \mapsto (Id + \tau^n \theta^n)(\Omega^n)$  est effectuée en déplaçant les nœuds de  $\mathcal{T}^n$  dans la direction  $\tau^n \theta^n$  pour obtenir un nouveau maillage  $\mathcal{T}^{n+1}$ .

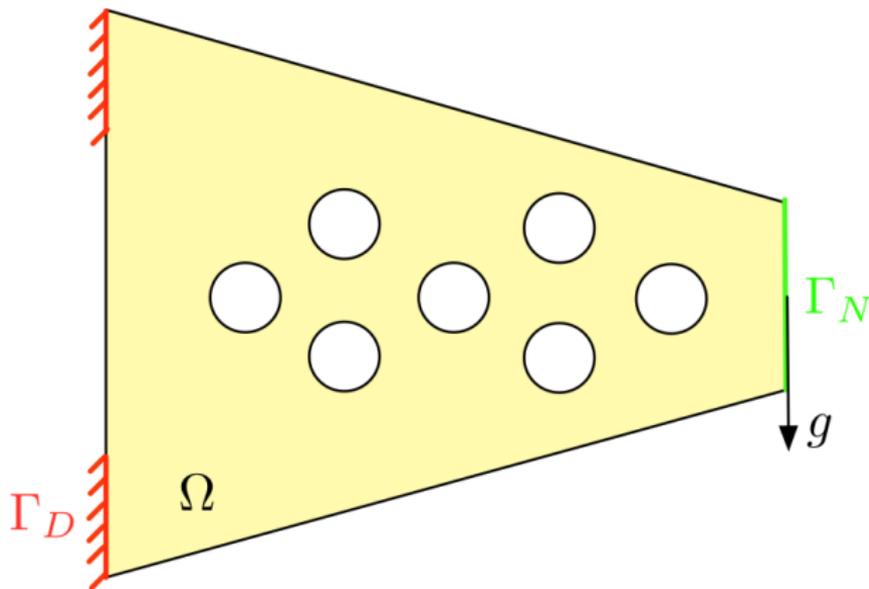


# Exemple numérique

★ l'élasticité linéarisée - minimiser la compliance

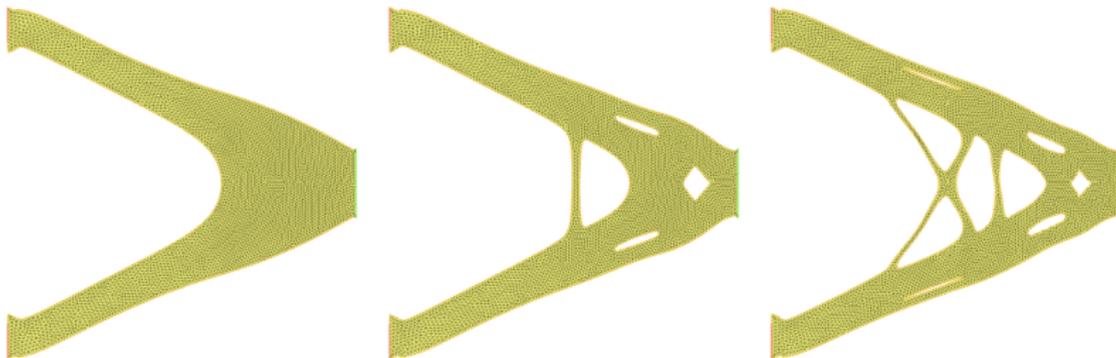
$$C(\Omega) = \int_{\Omega} Ae(u_{\Omega}) : e(u_{\Omega}) dx.$$

★ contrainte sur le **Volume** à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange



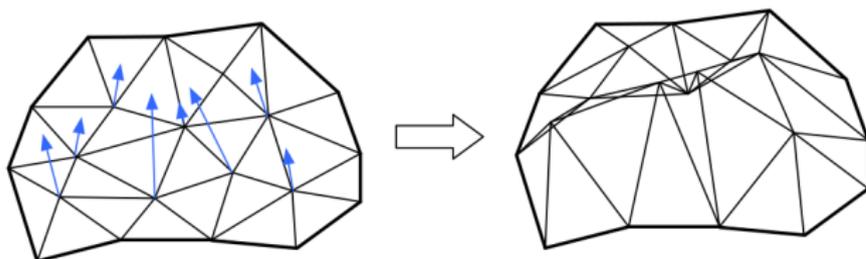
## 1. Existence des minimiseurs locaux

- sensibilité par rapport aux initialisations, taille du maillage, etc
- l'algorithme aurait envie de fermer certains trous mais il ne peut pas...



## 2. Problèmes de déformation de maillage

- La procédure de changement de maillage semble être explicite et facilement implémentable
- Certaines déformations peuvent introduire des inversions d'éléments et produire des maillages invalides'



- pour ce raison, on préfère de faire uniquement des **déplacements faibles** (similarités avec les conditions CFL)

## 3. Extension de la vitesse :

- une direction de descente  $\theta = -v_\Omega n$  - conséquence formule dérivée de forme

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v_\Omega(\theta \cdot n) ds$$

- la nouvelle forme  $(\text{Id} + \theta)(\Omega)$  dépend uniquement des valeurs de  $\theta$  sur  $\partial\Omega$ .
- Pour des raisons diverses, en pratique numérique, on préfère à avoir un champ  $\theta$  défini sur  $\Omega$  tout entier  
(une extension régulière et adaptée peut améliorer le processus de déformation de maillage...)
- L'extension naturelle  $\theta = -v_\Omega n$  qui est uniquement valable sur  $\partial\Omega$  peut ne pas être le meilleur choix

## 4. Régularisation de la vitesse :

- comme dans l'exemple d'optimisation paramétrique, si on prend  $\theta = -v_\Omega n$  sur  $\partial\Omega$  on peut produire des formes optimales moins régulières
- **Idée** : (régularisation avec Laplacien) changer le produit sur  $L^2(\partial\Omega)$  pour quelque chose de plus régulier
- Exemple: trouver  $V \in H^1(\Omega)$  t.q.  $\forall w \in H^1(\Omega)$

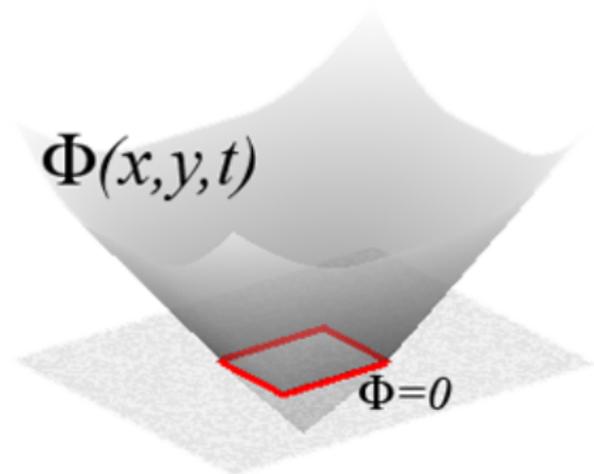
$$\alpha \int_{\Omega} \nabla V \cdot \nabla w dx + \int_{\Omega} V w dx = \int_{\partial\Omega} v_\Omega w ds.$$

- Le **paramètre de régularisation  $\alpha$**  permet de contrôler l'équilibre entre l'effet de diffusion et la distance entre  $V$  et  $v_\Omega$  ; en pratique, il dépend de la taille du maillage

# La méthode des lignes de niveaux

★ Un domaine  $\Omega$  peut être représenté par la région où une certaine fonction est négative

$$\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \begin{cases} \varphi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega \\ \varphi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \\ \varphi(x) > 0 & \text{si } x \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$

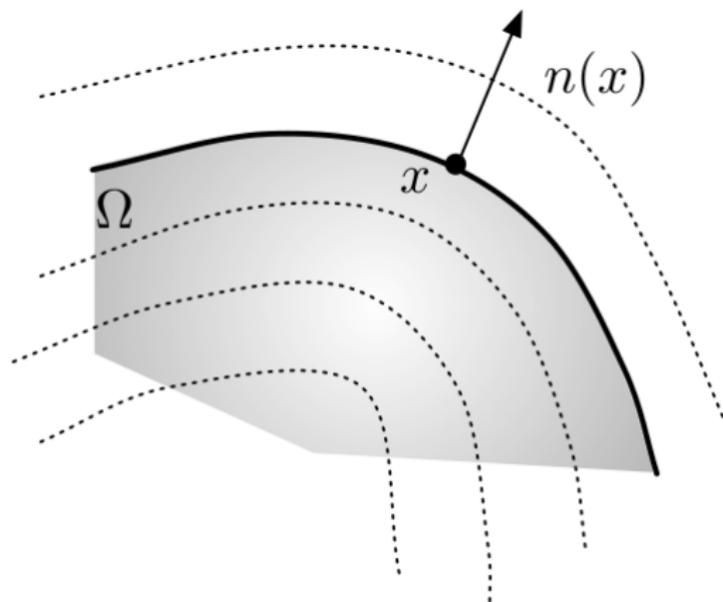


# Fonction level-set : aspects géométriques

Si  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de niveau de classe  $C^2$  pour  $\Omega$  et  $\nabla\phi(x) \neq 0$  sur  $\partial\Omega$  alors :

★ Le vecteur normal extérieur  $n$  à  $\partial\omega$  est

$$n(x) = \frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|}.$$



# Fonction level-set : aspects géométriques (2)

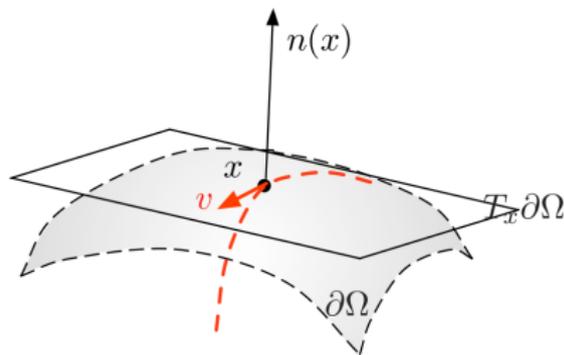
Si  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de niveau de classe  $C^2$  pour  $\Omega$  et  $\nabla\phi(x) \neq 0$  sur  $\partial\Omega$  alors :

★ La **seconde forme fondamentale** de  $\partial\omega$  est

$$II(x) = \nabla \left( \frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|} \right).$$

★ La **courbure moyenne** de  $\partial\omega$  est

$$\kappa(x) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|} \right).$$



$II(x)(v, v)$  est la courbure d'une courbe sur  $\partial\Omega$  qui passe par  $x$  et a vecteur tangent  $v$

- Soit  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$  un domaine qui se déplace suivant un champ  $v(t, x) \in \mathbb{R}^d$
- Soit  $\phi(t, x)$  la fonction level-set de  $\Omega(t)$
- L'advection suivant un champ normal  $V(t, x)$  est donnée par une équation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + V(t, x)|\nabla \phi(t, x)| = 0$$

- implémentations disponibles

- un domaine de calcul  $D$  est considéré avec un maillage fixe
- chaque forme  $\Omega^n$  est représentée par une fonction **level-set**  $\phi^n$  définie sur les nœuds du maillage
- si une direction de descente  $\theta^n$  est calculée sur  $\Omega^n$  alors la nouvelle forme

$$\Omega^{n+1} = (\text{Id} + \tau^n \theta^n)(\Omega^n)$$

est obtenue en résolvant une équation d'**advection** ou de type **Hamilton-Jacobi**

**Difficulté** : il n'y a pas de maillage sur  $\Omega^n$  pour résoudre les équations d'état et adjoint

**Solution** : trouver une manière d'approcher les solutions de ces équations en résolvant un problème sur le domaine  $D$  : **méthode du domaine fictif**

# Exemple : l'élasticité

En élasticité linéarisée, si la frontière libre est **sans traction** alors **la méthode du matériau ersatz** permet d'approcher le déplacement  $u_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  par  $u_{\Omega,\varepsilon} : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  où la partie vide est remplacée par un matériau **mou**

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(Ae(u_\Omega)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u_\Omega = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ Ae(u_\Omega)n = g \quad \text{sur } \Gamma_N \\ Ae(u_\Omega)n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \approx \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(A_\varepsilon e(u_{\Omega,\varepsilon})) = 0 \quad \text{dans } D \\ u_{\Omega,\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ A_\varepsilon e(u_{\Omega,\varepsilon})n = g \quad \text{sur } \Gamma_N \\ A_\varepsilon e(u_{\Omega,\varepsilon})n = 0 \quad \text{sur } \partial D \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N) \end{array} \right.$$

★  $A_\varepsilon$  est le **tenseur de Hooke approximé**

$$A_\varepsilon = \chi_\Omega A + (1 - \chi_\Omega)\varepsilon A, \quad \varepsilon \ll 1$$

★ numériquement la condition  $A_\varepsilon > 0$  est nécessaire pour pouvoir résoudre le système discret

$$\sigma = Ae(u) = 2\mu e(u) + \lambda \operatorname{div} u \operatorname{Id}, \quad e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \sigma & = f \quad \text{dans } \Omega \\ u & = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n & = g \quad \text{sur } \Gamma_N \\ \sigma n & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N) \end{array} \right.$$

## Formulation variationnelle

$$-\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \operatorname{div} u \delta_{ij} \right) = f_i \quad \text{dans } \Omega$$

$$-\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \operatorname{div} u \delta_{ij} \right) v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i \quad \text{dans } \Omega, \quad \forall v_i \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} (2\mu e(u) : e(v) + \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v ds, \quad \forall v_i \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$$

Si on considère la compliance :

$$C(\Omega) = \int_{\Omega} Ae(u_{\Omega}) : e(u_{\Omega}) dx = \int_{\Omega} f \cdot u_{\Omega} dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot u_{\Omega} dx$$

alors le problème est **auto-adjoint**.

[Allaire, Jouve, Toader, 04]

The objective function is denoted by  $J(\Omega)$ . In this paper, we shall mostly focus on two possible choices of  $J$  (these are merely examples, and much more freedom is allowed). A first classical choice is the compliance (the work done by the load)

$$J_1(\Omega) = \int_{\Omega} f \cdot u dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot u ds = \int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(u) dx, \quad (3)$$

which is very common in rigidity maximization. A second choice is a least square error compared to a target displacement

$$J_2(\Omega) = \left( \int_{\Omega} k(x) |u - u_0|^{\alpha} dx \right)^{1/\alpha}, \quad (4)$$

which is a useful criterion for the design of compliant mechanisms [3,30]. We assume  $\alpha \geq 2$ ,  $u_0 \in L^{\alpha}(D)$  and

**Theorem 7.** Let  $\Omega$  be a smooth bounded open set and  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ . Assume that the data  $f$  and  $g$  as well as the solution  $u$  of (2) are smooth, say  $f \in H^1(\Omega)^d$ ,  $g \in H^2(\Omega)^d$ ,  $u \in H^2(\Omega)^d$ . The shape derivative of (3) is

$$J'_1(\Omega)(\theta) = \int_{\Gamma_N} \left( 2 \left[ \frac{\partial(g \cdot u)}{\partial n} + Hg \cdot u + f \cdot u \right] - Ae(u) \cdot e(u) \right) \theta \cdot n \, ds + \int_{\Gamma_D} Ae(u) \cdot e(u) \theta \cdot n \, ds. \quad (8)$$

The shape derivative of (4) is

$$\begin{aligned} J'_2(\Omega)(\theta) &= \int_{\Gamma_N} \left( \frac{C_0}{\alpha} k |u - u_0|^\alpha + Ae(p) \cdot e(u) - f \cdot p - \frac{\partial(g \cdot p)}{\partial n} - Hg \cdot p \right) \theta \cdot n \, ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_D} \left( \frac{C_0}{\alpha} k |u - u_0|^\alpha - Ae(u) \cdot e(p) \right) \theta \cdot n \, ds, \end{aligned} \quad (9)$$

where  $p$  is the adjoint state, assumed to be smooth, i.e.  $p \in H^2(\Omega)^d$ , defined as the solution of

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(p)) = -C_0 k(x) |u - u_0|^{\alpha-2} (u - u_0) & \text{in } \Omega, \\ p = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ (Ae(p))n = 0 & \text{on } \Gamma_N, \end{cases} \quad (10)$$

where  $C_0$  is a constant given by

$$C_0 = \left( \int_{\Omega} k(x) |u(x) - u_0(x)|^\alpha \, dx \right)^{1/\alpha-1}.$$