

Partitions optimales et périmètre anisotrope

Benjamin Bogosel

LAMA, Chambéry

05/07/2013

Partitions Optimales

- Honeycomb conjecture - la théorème de Hales (1999)



$$P(E, \Omega) = \int_{\partial E \cap \Omega} \|\nu_E\| d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Formulation variationnelle

$$P(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} g dx : g \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \|g\| \leq 1 \right\}$$

Le périmètre anisotrope

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Pour φ une norme

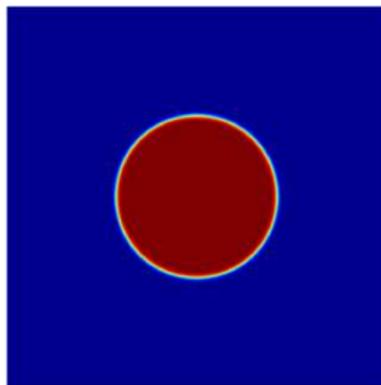
$$P_\varphi(E, \Omega) = \int_{\partial E \cap \Omega} \varphi(\nu_E) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Formulation variationnelle

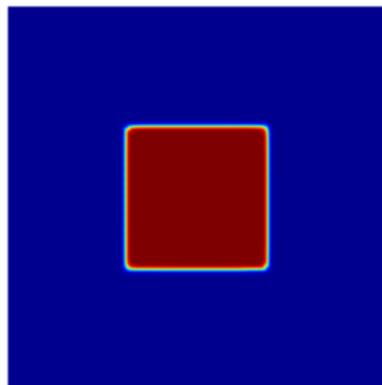
$$P(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} g dx : g \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \varphi(g) \leq 1 \right\}$$

- certains directions favorisées

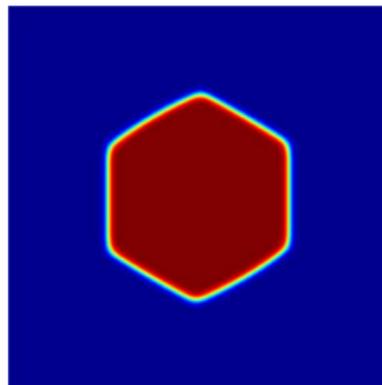
Optimisation isopérimétrique



Perimetre classique



$\varphi(x) = |x_1| + |x_2|$



3 direction favorisées

Formulation du Problème

$$\min_{(E) \in \mathcal{K}} \sum_{i=1}^n \text{Per}_\varphi(E_i, \Omega)$$

$$\mathcal{K} = \left\{ (E_i)_{i=1}^n : \bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ (for } i \neq j), \right. \\ \left. |E_i| = c_i, \text{Per}_\Omega(E_i) < \infty \right\}$$

ou $\sum_i c_i = |\Omega|$.

Γ -convergence

Soit $F_\varepsilon, F : X \rightarrow [0, \infty]$, ou $\varepsilon > 0$ et X est un espace métrique.

On dit que F_ε Γ -converges vers F si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(LI) Pour chaque $u \in X$ et chaque suite (u_ε) tel que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u)$$

(LS) Pour chaque $u \in X$ il existe une suite (u_ε) tel que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X et

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F(u)$$

Les propriétés du Γ -convergence :

- (i) La Γ -limite F est toujours semi continue-inférieurement sur X ;
- (ii) La Γ -convergence est stable pour des perturbations continues ;
- (iii) Si F_ε Γ -converges vers F et v_ε est un minimiseur pour F_ε sur X alors chaque point limite de (v_ε) est un minimiseur de F sur X .

Conséquences :

- La fonctionnelle, étant une Γ -limite, est semi continue inférieurement pour la topologie L^1 , alors l'existence est immédiate ;
- La troisième propriété peut suggérer une approche numérique.

Théorème de Modica-Mortola

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ borné, ouvert, $\partial\Omega$ Lipschitz. $W : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ continue, $W(0) = W(1) = 0$, $c_0 = 2 \int_0^1 \sqrt{W(s)} ds$,
 $W(x) > 0$ pour chaque $x \neq 0, 1$.

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_\Omega \left[\varepsilon |Du|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right] dx & u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u = c \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(u) = \begin{cases} c_0 \text{Per}(E, \Omega) & u \in BV(\Omega; \{0, 1\}), E = u^{-1}(1), \int_\Omega u = c \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème Modica-Mortola

F_ε Γ -converge vers F dans la topologie $L^1(\Omega)$.

Variante anisotrope

(A. Braides, *Approximation of Free Discontinuity Problems*)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ borné, ouvert, $\partial\Omega$ Lipschitz, $p > 1$. $W : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$

continue, $W(0) = W(1) = 0$, $c_p = 2 \int_0^1 (W(s))^{1/p'} ds$,

$W(x) > 0$ pour chaque $x \neq 0, 1$ et φ une norme sur \mathbb{R}^N .

$$P_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_\Omega \left[\frac{\varepsilon^{p-1}}{p} \varphi^p(Du) + \frac{1}{\varepsilon p'} W(u) \right] dx & u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u = c \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_\varphi(u) = \begin{cases} c_p \text{Per}_\varphi(E, \Omega) & u \in BV(\Omega; \{0, 1\}), E = u^{-1}(1), \int_\Omega u = c \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

P_ε Γ -converge vers P dans la topologie $L^1(\Omega)$.

Généralisation - Partitions - Périmètre classique

É. Oudet (2011)

$$X = \{(u_i) \in L^1(\Omega)^n : \int_{\Omega} u_i = c_i, \sum u_i = 1\}$$

alors

$$P_{\varepsilon}^n(u) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{\varepsilon}(u_i) & (u_i) \in X \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Γ -converge vers

$$P^n(u) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n F(u_i) & (u_i) \in X \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Difficultés

- La Γ -convergence n'est pas stable pour la somme
- (u_i) doit vérifier $\sum_i u_i = 1$.

Partitions - Périmètre anisotrope

$W : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $W(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \{0, 1\}$, $W(0.5 - t) = W(0.5 + t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. φ une norme sur \mathbb{R}^N .

$$G_\varepsilon(u) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n P_\varepsilon(u_i) & u_i \in (W^{1,p}(\Omega))^n \cap X \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$G(u) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n P_\varphi(u_i) & u_i \in SBV(\Omega, \{0, 1\}) \cap X \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème

$$G_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} G$$

Preuve Γ -liminf

C'est une simple conséquence de théorème précédente.

$$\liminf \sum P_\varepsilon(u_\varepsilon^i) \geq \sum \liminf P_\varepsilon(u_\varepsilon^i) \geq \sum P_\varepsilon(u_i)$$

- la preuve de A. Braides utilise le "slicing" et le cas uni-dimensionnel

Alternative

$$\begin{aligned}c_p \int_{S(u)} \varphi(\nu_u) d\mathcal{H}^{n-1} &= c_p \int_{\Omega} \varphi \left(\frac{dDu}{d|Du|} \right) d\mathcal{H}^{n-1} \llcorner S(u) = \\&= \phi(1) \int_{\Omega} \varphi \left(\frac{dDu}{d|Du|} \right) d|Du| = \int_{\Omega} \varphi \left(\frac{dD(\phi \circ u)}{d|D(\phi \circ u)|} \right) d|D(\phi \circ u)| = \\&= \int_{\Omega} \varphi(D(\phi \circ u)).\end{aligned}$$

- $(u_\varepsilon) \rightarrow u$ dans L^1 et $\sup_\varepsilon P_\varepsilon(u_\varepsilon) < \infty$ implique

$$D(\phi \circ u_\varepsilon) \xrightarrow{*} D(\phi \circ u)$$

Théorème de Reshetnyak

Soit $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ une fonction convexe et positive homogène de degré 1. Si $(\mu_j) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ est une suite de mesures qui converge faiblement vers μ alors

$$\int_{\Omega} \varphi(\mu) \leq \liminf \int_{\Omega} \varphi(\mu_j)$$

et si $|\mu_j|(\Omega) \rightarrow |\mu|(\Omega)$ alors

$$\int_{\Omega} \varphi(\mu) = \liminf \int_{\Omega} \varphi(\mu_j).$$

$$\left(\int_{\Omega} \varphi(\mu) = \int_{\Omega} \varphi(d\mu/d|\mu|)d|\mu| \right)$$

$$\begin{aligned} \liminf P_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \liminf \int_{\Omega} \varphi(\nabla u_\varepsilon)(W(u))^{1/p'} \\ &= \liminf \int_{\Omega} \varphi(D(\phi \circ u_\varepsilon)) \stackrel{\text{Reshetnyak}}{\geq} \int_{\Omega} \varphi(D(\phi \circ u)). \end{aligned}$$

$$\phi(t) = \int_0^t (W(s))^{1/p'} ds.$$

Preuve Γ -limsup

1. Choisir un sous ensemble $\mathcal{D} \subset L^1(\Omega)^n$, dense dans $\{G < \infty\}$ tel que si $G(u) < \infty$ on peut trouver $(u_j) \subset \mathcal{D}$ avec $u_j \rightarrow u$ (dans L^1) et $G(u) = \lim_{j \rightarrow \infty} G(u_j)$
2. Prouver l'inégalité (LS) pour chaque $u \in \mathcal{D}$.
 - On peut réduire l'étude à la classe de partitions polyédrales.
 - S. Baldo a prouvé ce résultat pour le cas du périmètre classique. On peut le déduire aussi pour le périmètre anisotrope.

Resultat de Baldo

Pour une partition quelconque de Ω en ensembles de périmètre fini (S_i) , $i = 1..n$ avec volumes prescrits $|S_i| = c_i$ on peut trouver un suite (S_i^h) tel que

- Chaque S_i^h a une frontière polyédrale transversale a $\partial\Omega$;
- $\chi_{S_i^h} \rightarrow \chi_{S_i}$ dans $L^1(\Omega)$, $\text{Per}(S_i^h) \rightarrow \text{Per}(S_i)$;
- $|S_i^h| = |S_i| = c_i$.

Par conséquence pour chaque $i = 1..n$, on a

$$D\chi_{S_i^h} \xrightarrow{*} D\chi_{S_i}$$

et en appliquant le théorème de Reshetnyak on obtient que

$$P_\varphi(S_i^h) \rightarrow P_\varphi(S_i)$$

Profils optimaux

Soit v un minimiseur pour :

$$c_p = \min \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{p'} W(v) + \frac{1}{p} |v'|^p \right) dt : v(-\infty) = 0, v(\infty) = 1 \right\}.$$

- $c_p = \int_0^1 (W(s))^{1/p'} ds$;
- on peut choisir $\begin{cases} v' & = (W(v))^{1/p} \\ v(0) & = 1/2 \end{cases}$
- la symétrie de W implique $v(t) + v(-t) = 1$.
- on peut supposer que $v(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$ et alors v est Lipschitz.

Pour passer de 0 a 1 en temps fini on peut définir pour chaque $\eta > 0$

$$v^\eta = \max\{0, \min\{(1 + 2\eta)v - \eta, 1\}\}$$

Si

$$c_p^\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{p'} W(v^\eta) + \frac{1}{p} |(v^\eta)'|^p \right) dt$$

alors pour $\eta \rightarrow 0$ on a

$$c_p^\eta \rightarrow c_p$$

On fixe une partition polyédrale admissible $(E_i) \in \mathcal{K}$ et les définitions suivantes :

- Distance signé pour E_i

$$d^i(x) = \text{dist}(x, \Omega \setminus E_i) - \text{dist}(x, E_i)$$

- $M = \max\{\varphi(\vec{n}) : |\vec{n}| \leq 1\}$
- $T > 0$ tel que $\text{spt}(\nu^\eta)' \subset [-T, T]$
- $\nu(x)$ est la normale du segment le plus proche de x .

Pour ε assez petit on va considérer trois types des régions :

- $x \in \Omega$ avec $|d_i(x)| > TM\varepsilon$ pour $i = 1..n$.
- voisinages rectangulaires disjoints, contenus dans Ω , de hauteur $2TM\varepsilon$ autour du chaque segment
- l'ensemble N_ε qui reste satisfait $|N_\varepsilon| < C\varepsilon^2$.

Construction de (u_ε)

$$u_\varepsilon^i(x) = \begin{cases} v^\eta \left(\frac{d^i(x)}{\varepsilon \varphi(v(x))} \right) & \text{si } x \notin N_\varepsilon \text{ et } |d^i(x)| \leq TM\varepsilon \\ 0 & \text{sinon dans } \Omega \setminus (E_i \cup N_\varepsilon) \\ 1 & \text{sinon dans } E_i \setminus N_\varepsilon \\ 1/2 \text{ pour } x \in \partial E_i \end{cases}$$

- u_ε^i est Lipschitz sur $\Omega \setminus N_\varepsilon$ avec une constante C/ε ;
- par le théorème de Kirszbraun on peut étendre chaque u_ε^i à tout Ω avec la même constante Lipschitz.
- par troncature entre $1/2$ et 1 on preserve la constante Lipschitz, et alors on peut supposer que $u_\varepsilon^i(x) \geq 1/2$ pour $x \in E_i$.

Traitement de la contrainte de somme

Pour $x \in \Omega$ on a trois situations selon les régions considérées :

- $\exists i$ t.q. $d^i(x) > T\varepsilon$. On a $x \in E_i$ et $u_\varepsilon^i(x) = \delta_{ij}$ et on déduit $\sum_{j=1}^n u_\varepsilon^j(x) = 1$.
- $\exists i, j$ t.q. $|d^\ell(x)| < T\varepsilon, \ell = i, j$. Alors $d^i(x) + d^j(x) = 0$ et $d^k(x) = 0$ pour $k \neq i, j$. On déduit que $\sum_{j=1}^n u_\varepsilon^j(x) = 1$. (ici on utilise la symétrie de W)
- $x \in N_\varepsilon$. On voudrait faire la substitution

$$u_\varepsilon^i \mapsto u_\varepsilon^i / \left(\sum_{j=1}^n u_\varepsilon^j \right)$$

sur N_ε .

La situation sur N_ε

- $\sum_{j=1}^n u_\varepsilon^j(x) \geq 1/2 \Rightarrow$ pas de problèmes avec la division ;
- par continuité, sur le frontière de N_ε on a $\sum_{j=1}^n u_\varepsilon^j(x) = 1 \Rightarrow$ la continuité de u_ε^i est préservée ;
- $\nabla \left(\frac{u_\varepsilon^i}{\sum_{j=1}^n u_\varepsilon^j} \right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n u_\varepsilon^i} \nabla u_\varepsilon^i - \frac{u_\varepsilon^i}{\left(\sum_{j=1}^n u_\varepsilon^j \right)^2} \sum_{j=1}^n \nabla u_\varepsilon^j$ et

alors parce que $\sum_{j=1}^n u_\varepsilon^j \geq 1/2$ on peut conserver une borne de type K/ε pour ∇u_ε^i . (ou K est une constante assez grande)

Correction du volume

- on a des petites erreurs de volume sur $N_\varepsilon \leq C\varepsilon^2$;
- pour corriger u_ε^i avec $\int_\Omega u_\varepsilon^i > c_i$ on peut considérer une boule $B_\varepsilon^i(r_\varepsilon)$ de volume $C(i)\varepsilon^{1+\delta}$ contenue dans $(u_\varepsilon^i)^{-1}(1)$ et on considère un ensemble E_j qui a un déficit, i.e.
 $\int_\Omega u_\varepsilon^j < c_j$.
- sur ce boule B_ε^i on remplace u_i par une fonction radiale (linéaire sur chaque rayon) qui préserve la continuité de u_i tel que la hauteur au centre de la boule est $1 - \varepsilon^{1-\delta}$.
- on remplace u_j sur $B_\varepsilon^i(r_\varepsilon)$ par $1 - u_i$ pour préserver la somme ;
- a chaque étape on a diminué le numéro de fonctions qui ne satisfait pas la contrainte ;

Estimation sur N_ε

$$\begin{aligned} & \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{N_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon p'} W(u_\varepsilon^i) + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p} \varphi^p(\nabla u_\varepsilon^i) \right) dx \\ & \leq |N_\varepsilon| \left[\frac{1}{\varepsilon p'} \max_{[0,1]} W + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p} \sup_{|\vec{n}|=1} \varphi(\vec{n}) \frac{K^p}{\varepsilon^p} \right] \\ & \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} C' \varepsilon = 0 \end{aligned}$$

- on a utilisé le fait que $|N_\varepsilon| \leq C\varepsilon^2$;
- par conséquent on peut travailler juste sur $\Omega \setminus N_\varepsilon$;

Estimation sur $\Omega \setminus N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega \setminus N_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon^{p'}} W(u_\varepsilon^i) + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p} \varphi^p(\nabla u_\varepsilon^i) \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega \setminus N_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon^{p'}} W(v^\eta \left(\frac{d^i(x)}{\varepsilon \varphi(x)} \right)) + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p} \varphi^p \left(\frac{|\nabla u_\varepsilon^i|}{|\nabla u_\varepsilon^i|} |\nabla u_\varepsilon^i|^p \right) \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{-TM\varepsilon}^{TM\varepsilon} \int_{d^i(x)=t} \left(\frac{1}{\varepsilon^{p'}} W(v^\eta \left(\frac{t}{\varepsilon \varphi(x)} \right)) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p} \varphi^p(v(x)) \frac{1}{\varepsilon^p \varphi^p(v(x))} \left| (v^\eta)' \left(\frac{t}{\varepsilon \varphi(v(x))} \right) \right|^p \right) d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt \end{aligned}$$

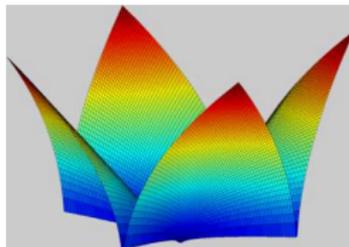
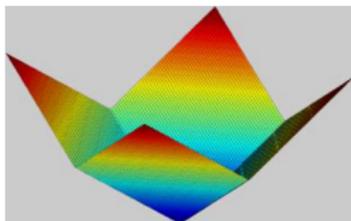
Estimation sur $\Omega \setminus N_\varepsilon$ (cont)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \int_{S(u_i) \setminus N_\varepsilon} \varphi(\nu(x)) \int_{-\frac{TM}{\varphi(\nu(x))}}^{\frac{TM}{\varphi(\nu(x))}} \left(\frac{1}{p'} W(v^\eta) + \frac{1}{p} |(v^\eta)'|^p \right) dt d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{S(u_i) \setminus N_\varepsilon} c_p^\eta \varphi(\nu(x)) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \end{aligned}$$

- On fait $\eta \rightarrow 0$ et on obtient l'estimation nécessaire pour montrer la Γ -limsup.

Remarques

- la preuve marche pour $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \vec{n})$;
- les calculs numériques marchent aussi pour certains φ qui sont pas convexes ;



- on peut aussi prouver une variante périodique pour la théorie de Γ -convergence ; il faut faire attention aux portions de périmètre contenu dans $\partial\Omega$;

Résultats Numériques

- $\Omega = [0, 1]^2$. On utilise une grille de discrétisation $N \times N$.
- $W(s) = s^2(1 - s)^2$;
- choix de φ
 - $\varphi(x) = \sqrt{ax_1^2 + bx_2^2}$ avec $a \ll b$
 - $\varphi(x) = \|Ax\|$, ou A est une matrice de rotation avec une direction principale favorisée ;
 - Combinaisons pour plusieurs directions :
 $\|Ax\| + \|Bx\|$, $\sqrt{\|Ax\|\|Bx\|}$, $\sqrt[3]{\|Ax\|\|Bx\|\|Cx\|}$
- Algorithme : approximation par différences finies ;
- Optimisation : méthode de gradient (LBFGS toolbox) ;
- Choix de la projection sur les contraintes : l'article d'Édouard Oudet.

Difficultés

- Choix de ε :
 - trop grand \rightarrow pas de séparation entre 0 et 1
 - trop petit \rightarrow séparation très rapide, mais pas optimale pour le périmètre. Une choix initiale bonne est $\varepsilon = 1/N$;
- Pour $n \geq 5$ l'algorithme s'arrête dans des minima locaux ou certains fonctions u_i sont constantes. Pour éviter ça on ajoute des multiplicateurs de Lagrange $(\lambda_i)_{i=1}^n$ qui pénalisent la variation standard de chaque u_i :

$$\min \sum_{i=1}^n P_\varepsilon(u_i) + \lambda_i(\text{std}(u_i) - \text{std}_i)$$

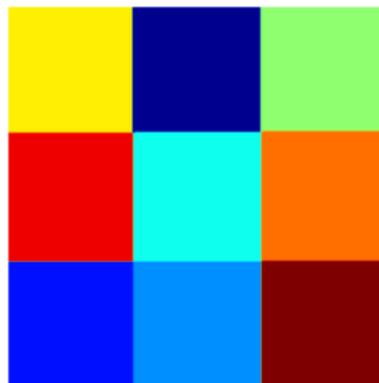
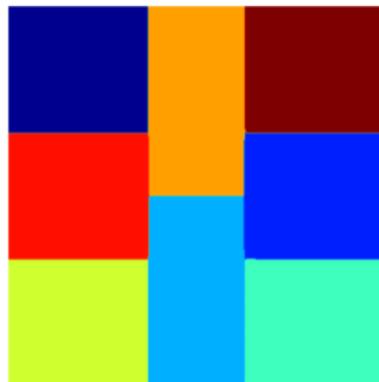
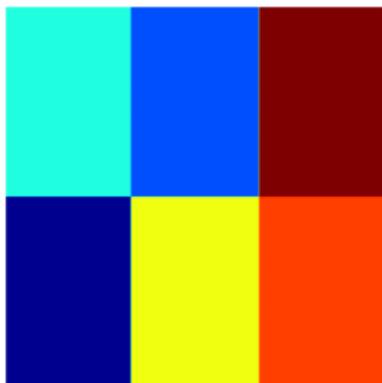
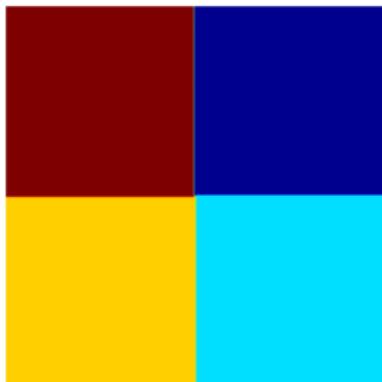
- dans cet cas la, l'algorithme est plus couteux parce qu'on doit chercher les bonnes valeurs pour λ_j .

Algorithme

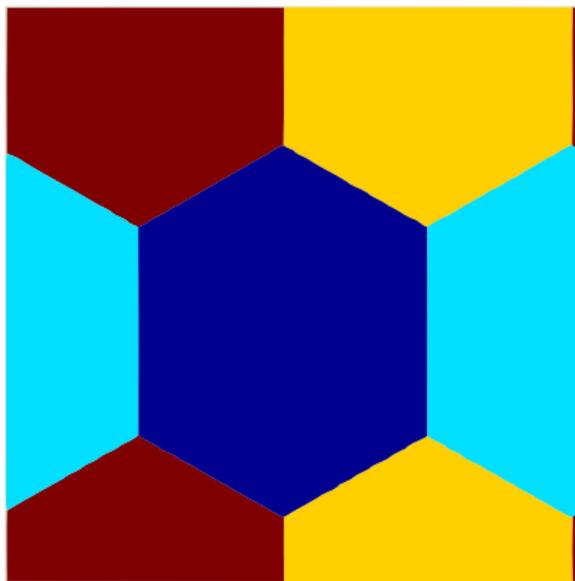
1. $\varepsilon = 1/N$;
2. conditions initiales aléatoires ;
3. optimisation
4. on diminue ε ;
5. le nouveau choix initial est le résultat de l'optimisation antérieure ;
6. optimisation
on fait répéter les étapes 4,5,6 jusqu'au moment où ε est assez petit.

- pas de garantie de convergence, mais les résultats sont très bons ;

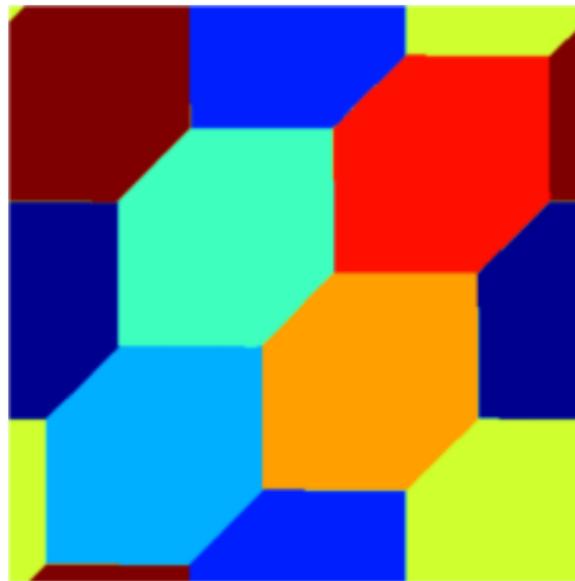
Deux directions



Trois directions



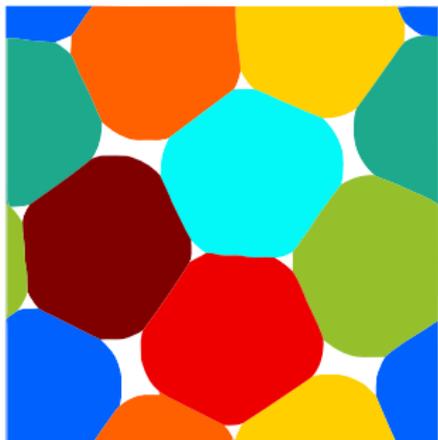
Anisotropie avec trois directions favorisées : $\pi/6, \pi, 5\pi/6$



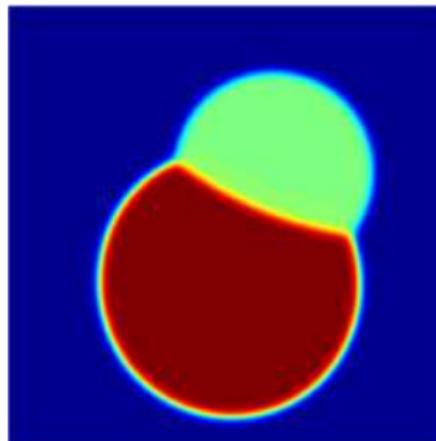
Anisotropie avec trois directions favorisées : $0, \pi/4, \pi/2$

Conclusions

- il en reste la partie numérique pour le cas 3D ;
- étudier le comportement des partitions optimales par rapport à φ ;
- l'approche numérique par Γ -convergence est riche en applications :



Optimisation multi-phase pour des valeurs propres



Boules de savon

Références Bibliographiques

-  É. Oudet, *Approximation of partitions of least perimeter by Γ -convergence : around Kelvin's conjecture*
-  A. Braides, *Approximation of Free Discontinuity Problems*
-  S. Baldo, *Minimal interface criterion for phase transitions in mixtures of Cahn-Hilliard fluids*

Merci !