Méthodes numériques en optimisation de forme

Beniamin Bogosel

LAMA, Chambéry

Formulation générale

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} F(\Omega).$$

- $\mathcal{A}$ - espace formes admissibles, contraintes. Exemples : classe ouverts réguliers, contrainte de volume/périmètre, partitions d'un ouvert, etc.
- F - fonction qui dépend de Ω. Exemples : Per, volume, valeurs propres, énergie élastique, etc.

Exemples

- Problème isopérimétrique : minimiser le périmètre a volume donne $\rightarrow$ la boule ;
- La structure hexagonale du nid d'abeille minimise le coût de construction ;
- Maximiser le périmètre a volume donné ?

Questions?

- Existence : dépendance de la topologie
- Unicité : en général non
- Trouver les formes optimales : très difficile en général (si la boule n'est pas optimale...)

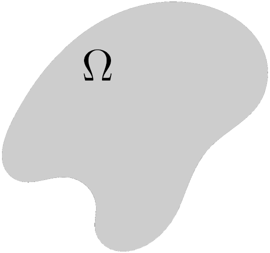
Pourquoi les calculs numériques?

- on connaît pas la forme optimale
- tester des conjectures;
- proposer des conjectures;
- proposer/prouver des nouveaux résultats théoriques;

Comment représenter une forme?

- paramétrisation
- fonction densité
- ligne de niveau

Valeurs propres - Laplacien Dirichlet



$$\begin{cases} -\Delta u & = \lambda u \\ \quad u & \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq ... \to +\infty$$

Rayleigh :

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{S_k \subset H_0^1(\Omega)} \max_{\phi \in S_k} \frac{\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx}{\int_\Omega \phi^2 dx}$$

Consequence : $\lambda_k(t\Omega) = \frac{1}{t^2}\lambda_k(\Omega)$.

Monotonie : $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \lambda_k(\Omega_1) \geq \lambda_k(\Omega_2)$

Optimisation spectrale

- Contrainte de périmètre (Velichkov, de Philippis, existence + régularité $C^{1,\alpha}$)

$$\min_{\text{Per}(\Omega)=1} \lambda_k(\Omega)$$

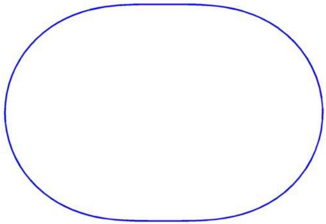
équivalente (a une homothétie près) a

$$\min \lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega).$$

Quelles sont les formes optimales?

- λ_1 avec contrainte de volume : la boule (Faber-Krahn)
- λ_2 avec contrainte de volume : deux boules identiques
- λ_1 avec contrainte de périmètre : la boule (Faber-Krahn $+$ l'inégalité isopérimétrique).

- λ_2 avec contrainte de périmètre : Ω^* est un ensemble C^∞ et sa frontière ne contient des segments ou des arcs des cercles (Bucur, Buttazzo, Henrot)



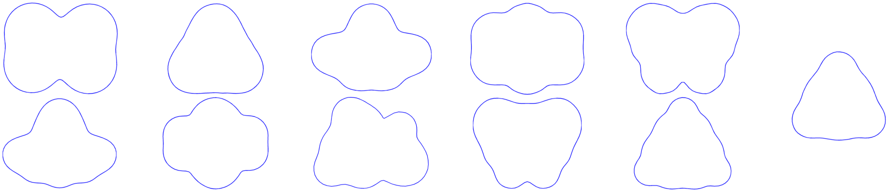
$\longrightarrow$ motivation étude numérique

- Conjecture : 2D, $k = 3$, contrainte volume : la boule

$\longrightarrow$ Conjecture : 2D, $k = 3$, contrainte périmètre : la boule

Études numériques antérieures :

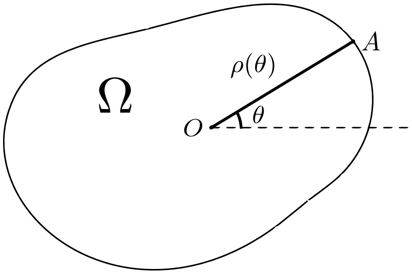
- Oudet, contrainte volume 2004;
- Antunes, Freitas, contrainte volume 2012;
- Antunes, Freitas, contrainte périmètre 2D et 3D, 2014.



Première méthode

- en 2D la forme optimale est convexe

$$\Omega \longrightarrow \rho : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_+.$$



Développement en série de Fourier

$$\rho(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)).$$

- a_n, b_n petits très vite

$$\rho(\theta) \approx \rho_N(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

Si Ω_N correspond a ρ_N alors

$$|\lambda_n(\Omega_N) - \lambda_n(\Omega)| \leq \frac{3}{r^*}\lambda_n(B_{r^*}) \sum_{k \geq N+1} (|a_k| + |b_k|).$$

(B_{r^*} est la boule maximale contenu en Ω, Ω_N)

Calcul du gradient

$$\lambda_k(\Omega) \approx \lambda_k(a_0, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n).$$

Si $-\Delta u_n = \lambda_n(\Omega) u_n, \;\; u_n \in H_0^1(\Omega)$

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial a_k} = -\int_0^{2\pi} \rho(\theta)\cos(k\theta)\left|\frac{\partial u_n}{\partial n}(\rho(\theta),\theta)\right|^2 d\theta$$

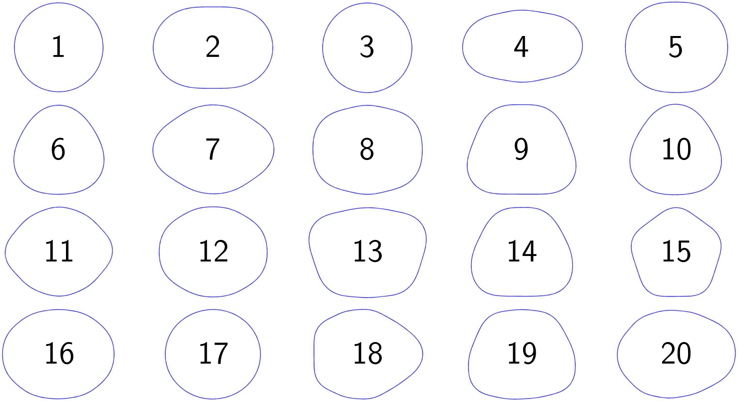
$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial b_k} = -\int_0^{2\pi} \rho(\theta)\sin(k\theta)\left|\frac{\partial u_n}{\partial n}(\rho(\theta),\theta)\right|^2 d\theta$$

Optimisation

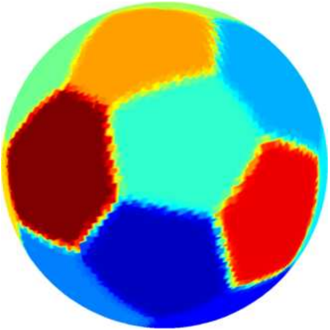
$\longrightarrow$ algorithme d'optimisation basé sur le gradient (LBFGS)

- point de départ aléatoire pour éviter les minima locaux;
- calcul des valeurs/vecteurs propres avec MpsPack (méthode solutions particuliers);

Résultats numériques



Deuxième méthode



- remplacer Ω par une densité φ
- approximer la valeur propre $\lambda_k(\Omega)$ en utilisant une formulation relaxée avec pénalisation :

$$\begin{cases} -\Delta u + C(1-\varphi)u = \lambda_k(\mu)u \\ u \in H_1(D) \end{cases}$$

- approximer le périmètre ...

"Relaxation" du périmètre

Si $u \approx \chi_\Omega$ dans L^1 alors

$$\mathrm{Per}(\Omega) \approx F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_D u^2(1-u)^2.$$

dans le sens suivant :

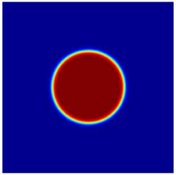
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \min_{\int_D u = c} F_\varepsilon(u) \to \min_{|\Omega| = c} \mathrm{Per}(\Omega).$$

notion plus précise : Γ-convergence.

Tests numériques - inégalité isopérimétrique

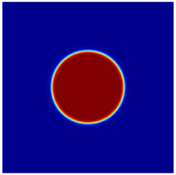
$$\min_{|\Omega|=1/7} \operatorname{Per}(\Omega).$$

Valeur analytique : $2\sqrt{\pi/7} = 1.3398$;



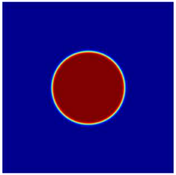
1.3216

$\varepsilon = 1/150$



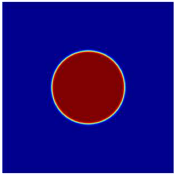
1.3276

$\varepsilon = 1/200$



1.3311

$\varepsilon = 1/250$



1.3398

$\varepsilon = 1/300$

Combiner les deux

$$\begin{array}{ccc} \lambda_k(\Omega) & + & \operatorname{Per}(\Omega) \\ & \downarrow & \\ \lambda_k\left(\frac{1}{\varepsilon^2}(1-\varphi)\right) & + & \varepsilon\int_D |\nabla\varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_D \varphi^2(1-\varphi)^2 dx \end{array}$$

Calculs numériques

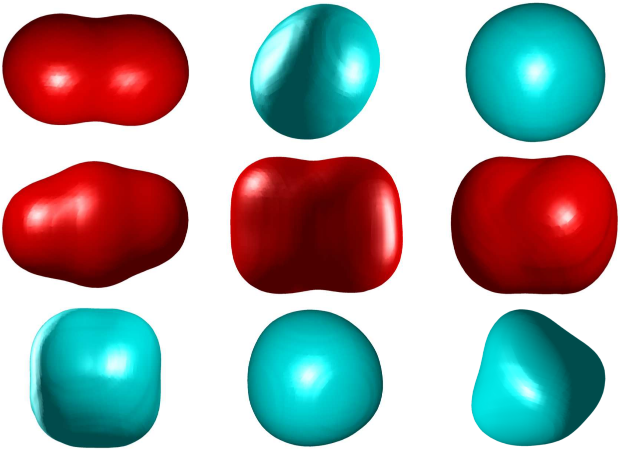
- $D = [0,1]^2$ avec une grille uniforme $N \times N$.
- quadrature + différences finies pour approx périmètre;
- $\lambda_k(\varphi) \longrightarrow \left[A + \frac{1}{\varepsilon^2}(1-\varphi)I\right] u = \lambda u$ ou A est la matrice du Laplacien discret;
- algorithme du gradient;
- choix initial avec une concentration au centre.;
- méthode moins précise : double approximation - périmètre, valeur propre ;
- on obtient les mêmes résultats que avec la première méthode.

Comparaison Methodes

k	mult.	Γ-conv	Fourier
1	1	11.55	11.55
2	1	15.28	15.28
3	2	15.75	15.75
4	2	18.35	18.35
5	2	19.11	19.11
6	1	20.09	20.09
7	2	21.50	21.50
8	2	22.07	22.02
9	1	23.21	23.21
10	2	23.58	23.55

k	mult.	Γ-conv	Fourier
11	2	24.62	24.60
12	3	24.76	24.74
13	1	25.98	25.98
14	2	26.46	26.43
15	1	26.91	26.91
16	3	27.27	27.25
17	3	27.37	27.36
18	2	28.66	28.63
19	2	29.09	29.08
20	3	29.54	29.51

Extension directe en 3 dimensions



Conclusions

méthode paramétrisation

- méthode très précise
- en forme radiale - applicabilité limité a des formes étoilés ou convexes ;

méthode densité

- méthode assez précise ;
- pas de contrainte topologique ;
- permet de traiter des problèmes de partitions optimales ;
- la fonction coût nécessite une formulation relaxée.

Merci!