

Optimisation spectrale et solutions fondamentales

JERAA - Clermont-Ferrand - 2015

Benjamin Bogosel

LAMA, Chambéry

20/11/2015

- Objectif : analyse numérique des certains problèmes d'optimisation spectrale (Steklov, Wentzel)
- Challenge : précis vs rapide !

Problèmes :

- le spectre de l'opérateur Steklov
- le spectre de l'opérateur Laplace-Beltrami : partitions optimales sur des surfaces

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} \mathcal{F}(\Omega).$$

- existence
- régularité
- trouver explicitement la forme optimale
- calculs numériques

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, assez régulier, simplement connexe on considère

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma u & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Valeurs propres Steklov :

$$0 = \sigma_0 \leq \sigma_1(\Omega) \leq \sigma_2(\Omega) \leq \sigma_3(\Omega) \leq \dots \rightarrow +\infty$$

Caractérisation variationnelle :

$$\sigma_n(\Omega) = \inf_{S_n} \sup_{u \in S_n \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$S_n \subset H^1(\Omega) \cap \left\{ \int_{\partial\Omega} u = 0 \right\};$$

$$\sigma_k(t\Omega) = \frac{1}{t} \sigma_k(\Omega).$$

$$\max_{\mathcal{A}} F(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$$

- F continue et croissante en chaque variable ;
- \mathcal{A} - contraintes volume/périmètre

Exemple : $\max_{|\Omega|=1} \sigma_k(\Omega), \min_{\text{Per}(\Omega)=1} \sum_{l=1}^k \frac{1}{\sigma_l(\Omega)}$

Résultats d'existence

- Contrainte volume + convexité (B.)
- Contrainte volume, relaxation (Bucur, Giacomini)

Formes optimales connues (2D)

- $\max_{\text{Per}(\Omega)=1} \sigma_k(\Omega)$
- $\min_{\text{Per}(\Omega)=1} \sum_{l=1}^k \frac{1}{\sigma_l(\Omega)}$
- $\max_{\text{Per}(\Omega)=1} \sigma_1(\Omega)\sigma_2(\Omega)$

... toujours des disques

Calculer numériquement - vp Steklov

FreeFem++ - méthode maillage. Pour avoir une précision importante il faut une discrétisation fine.



Peut-on être plus précis, utiliser moins de points dans le discrétisation et avoir une vitesse de calcul beaucoup plus importante ?

Méthode des solutions fondamentales

- Résoudre l'EDP analytiquement à l'intérieur du domaine
- erreur condition au bord assez petite

Question

Est-ce que avoir une erreur au bord petite implique une erreur globale petite ?

Méthode des solutions fondamentales

- $(y_i)_{i=1}^N$ - une famille des points à l'extérieur du domaine Ω ;
- ϕ_i - fonctions harmoniques radiales centrées en y_i ;

⇒ toute combinaison

$$u = \alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_N \phi_N$$

est harmonique dans Ω .

Condition au bord

⇒ "arranger" (α_i) tels que

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \sigma u \text{ sur } \partial\Omega.$$

- $(x_i)_{i=1}^N$ - une discrétisation du $\partial\Omega$;
- on impose les conditions

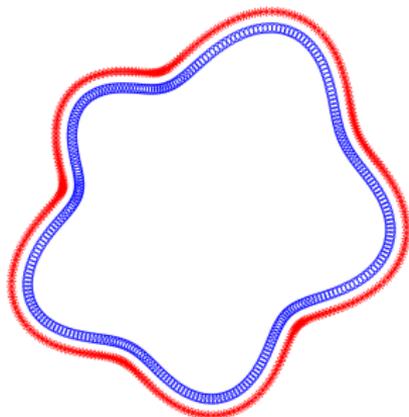
$$\alpha_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n}(x_i) + \dots + \alpha_N \frac{\partial \phi_N}{\partial n}(x_i) =$$
$$\sigma(\alpha_1 \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_N \phi_N(x_i)), \quad i = 1..N$$

- $\phi_j(x) = \log |x - y_j|$ (formule analytique) ;
- $A = (\partial_n \phi_j(x_i))_{ij}^N, B = (\phi_j(x_i))_{ij}^N, u = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$;
- le problème devient $A\vec{\alpha} = \sigma B\vec{\alpha}$;
- problème valeurs propres généralisées : `eigs` (Matlab)

Le choix des points $(x_i), (y_i)$ détermine *analytiquement* les matrices A et B .

Choix centres - important

- Les (x_i) on les choisit uniformément sur $\partial\Omega$ (angles ou longueur d'arc) ;
- Les (y_i) on les choisit sur les normales en (x_i) a $\partial\Omega$ a distance 0.1 des (x_i) .



... limitations de la méthode

Comparaison FreeFem++

		FreeFem++			
k	MFS	2096▲	33788▲	134898▲	211290▲
1	0.712751	0.714888	0.712886	0.712785	0.712773
2	0.940247	0.942837	0.940411	0.940288	0.940274
3	1.381278	1.38874	1.38175	1.3814	1.38135
4	1.443204	1.45137	1.44372	1.44333	1.44329
5	3.146037	3.15592	3.14665	3.14619	3.14614
6	3.443637	3.45562	3.44438	3.44382	3.44376
7	3.757833	3.78642	3.75962	3.75828	3.75812
8	3.922822	3.95461	3.92478	3.92331	3.92313
9	4.274362	4.32906	4.27774	4.27521	4.2749
10	4.693207	4.75819	4.69723	4.69422	4.69385
t	0.02s	0.81s	6.57s	24.76s	41.61s

Estimation d'erreur

- l'erreur numérique semble être petite ; quantification ?
- méthode similaire Moler-Payne, vp Laplace-Dirichlet :

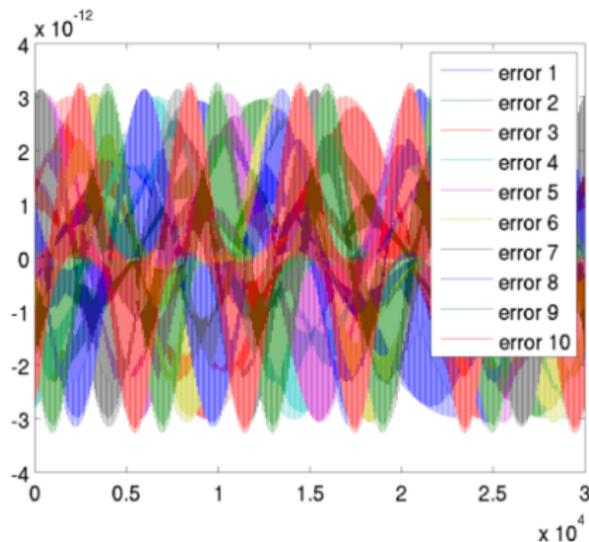
Soit Ω borné, régulier, qui satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \sigma_\varepsilon u_\varepsilon + f_\varepsilon & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)} = 1$ et $\|f_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)} = \delta$ petit. Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{|\sigma_\varepsilon - \sigma_k|}{\sigma_k} \leq C \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

- disque : prédiction théorique erreur : 10^{-12} . Précision numérique : 10^{-12} .



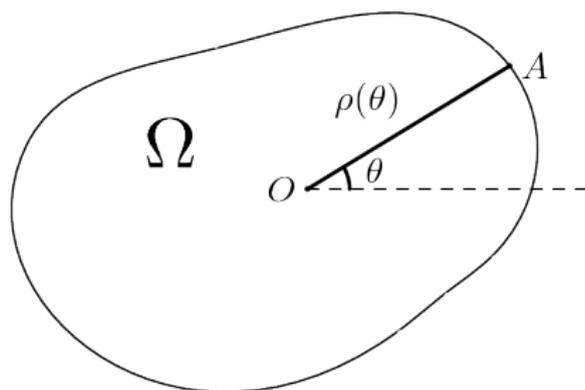
- en général, on voit que

$$\|\partial_n u_{\text{num}} - \sigma_{\text{num}} u_{\text{num}}\|_{L^\infty} = O(10^{-6})$$

$$\Rightarrow \text{precision d'ordre } 10^{-6}.$$

Cas des formes étoilées

$$\Omega \longrightarrow \rho : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}_+.$$



la restriction à ce cas n'est pas trop pénalisante...

Dérivée de forme - cas radial

$$\rho(\theta) \approx a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \cos(i\theta) + \sum_{i=1}^m b_i \sin(i\theta).$$

Dambrine, Kateb, Lamboley, *An extremal eigenvalue problem for the Wentzell-Laplace operator*, Section E

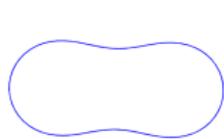
$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial a_i} = \int_0^{2\pi} (|\nabla u_k|^2 - (2\sigma_k^2 + \sigma_k \mathcal{H})|u_k|^2) \rho(\theta) \cos(i\theta) d\theta$$

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial b_i} = \int_0^{2\pi} (|\nabla u_k|^2 - (2\sigma_k^2 + \sigma_k \mathcal{H})|u_k|^2) \rho(\theta) \sin(i\theta) d\theta.$$

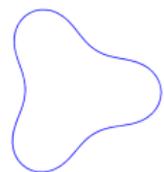
Tests numériques - cas étoilé

- Weinstock, Hersch-Payne
- $\min \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i(\Omega)|\Omega|^{\frac{1}{2}}}$ réalisé par le disque
- $\min \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{2i-1}(\Omega)\sigma_{2i}(\Omega)|\Omega|}$ réalisé par le disque
- $\max |\Omega|^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sigma_i(\Omega)$ réalisé par le disque
- $\min \sum_{i \in A} \frac{1}{\sigma_i(\Omega)|\Omega|^{\frac{1}{2}}}$ réalisé par le disque, où A a la propriété : $1 \in A, 2k \in A \Rightarrow 2k - 1 \in A$.

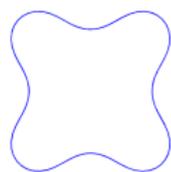
Steklov - contrainte aire



$$\sigma_2 = 2.91$$



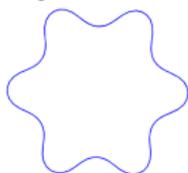
$$\sigma_3 = 4.14$$



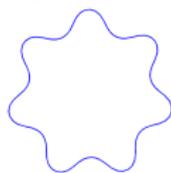
$$\sigma_4 = 5.28$$



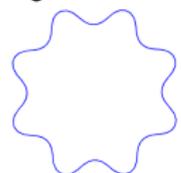
$$\sigma_5 = 6.49$$



$$\sigma_6 = 7.64$$



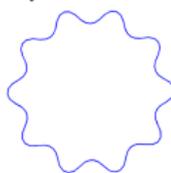
$$\sigma_7 = 8.84$$



$$\sigma_8 = 10.00$$



$$\sigma_9 = 11.19$$



$$\sigma_{10} = 12.35$$

FIGURE : Les maximiseurs pour la $k^{\text{ème}}$ vp Steklov sous contrainte d'aire, $k = 2, 3, \dots, 10$.

Steklov - contrainte volume

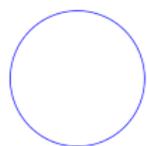
- Remplir les trous baisse la valeur propre : si Ω' est Lipschitz alors les espaces test S_n sont les mêmes pour Ω et $\Omega \setminus \Omega'$

- $$\sup_{u \in S_n \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega \setminus \Omega'} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\partial\Omega \cup \partial\Omega'} u^2 d\sigma} \leq \sup_{u \in S_n \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma}$$
- donc $\sigma_n(\Omega \setminus \Omega') \leq \sigma_n(\Omega)$;
- finalement $\sigma_n(\Omega \setminus \Omega') |\Omega \setminus \Omega'|^{1/2} \leq \sigma_n(\Omega) |\Omega|^{1/2}$.

- En conclusion - pas restrictif de chercher les minimiseurs parmi les simplement connexes (contrainte volume)

- Contrainte périmètre - on sait que le minimum n'est pas atteint parmi les simplement connexes

Steklov - contrainte aire + convexité



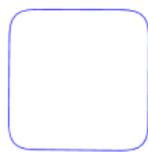
$$\sigma_1 = 1$$



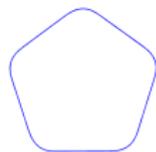
$$\sigma_2 = 2.87$$



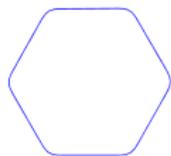
$$\sigma_3 = 3.86$$



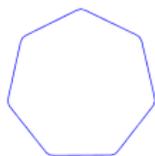
$$\sigma_4 = 4.56$$



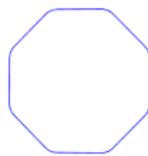
$$\sigma_5 = 5.61$$



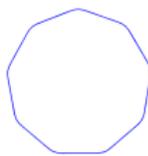
$$\sigma_6 = 6.24$$



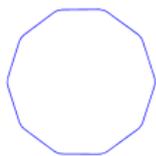
$$\sigma_7 = 7.43$$



$$\sigma_8 = 7.99$$



$$\sigma_9 = 9.15$$



$$\sigma_{10} = 9.75$$

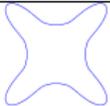
FIGURE : Formes convexes d'aire 1 qui maximisent la $k^{\text{ème}}$ vp

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\beta \Delta_{\tau} u + \partial u_n = \sigma u & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Δ_{τ} est le Laplacien Beltrami ;
- adaptation méthode solutions fondamentales ;
- on utilise la formule : $\Delta u = \Delta_{\tau} u + \mathcal{H} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$.
- les mêmes solutions fondamentales, avec la condition au bord

$$\sum \alpha_j [(\beta \mathcal{H} + 1) \partial_n \phi_j + \beta \partial_n^2 \phi_j] = \sigma \sum \alpha_j \phi_j.$$

Resultats numeriques - Wentzell

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$\beta = 0$					
$\beta = 0.1$					
$\beta = 0.5$					
$\beta = 100$					
	101	101	402	402	903

Objectif : étudier les partitions $(\Omega_i)_{i=1}^n$ de \mathbb{S}^2 :

$$\min(\lambda_1^{LB}(\Omega_1) + \dots + \lambda_1^{LB}(\Omega_n)).$$

Motivation

- vérification des conjectures théoriques

Approche solutions fondamentales

$$\begin{cases} -\Delta_\tau u &= \sigma u & \text{sur } \mathbb{S}^2 \\ -\Delta u &= 0 & \text{dans } B_1 \end{cases}.$$

On utilise la décomposition

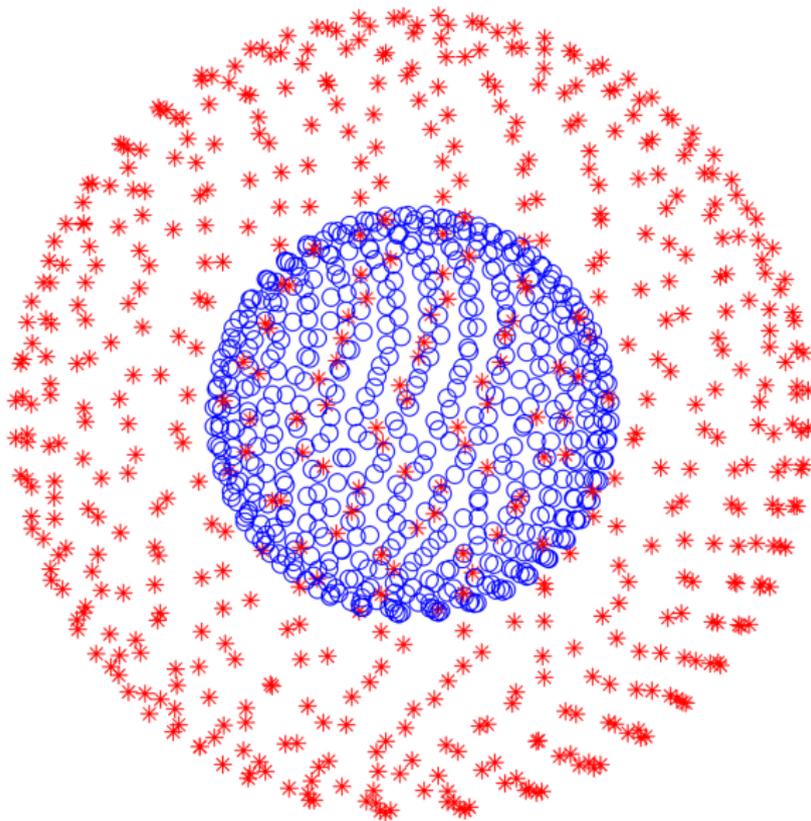
$$\Delta u = \Delta_\tau u + \mathcal{H} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2},$$

ou $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = (D^2 u \cdot n) \cdot n.$

- Solutions fondamentales : $\phi_j(x) = 1/|x - y_j|.$
- Condition au bord

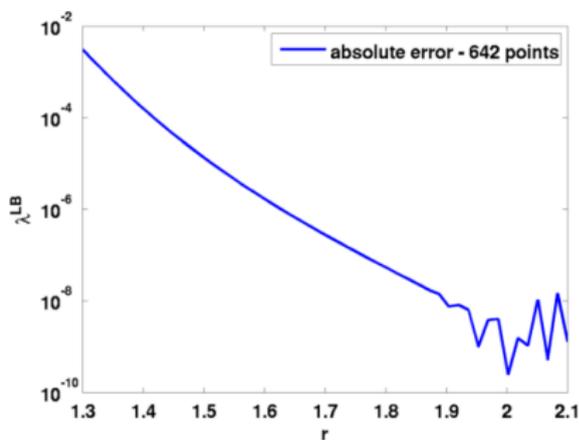
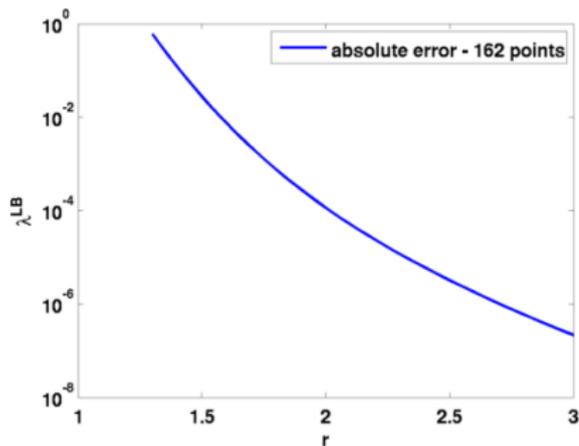
$$\sum \alpha_j \left(\mathcal{H} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial n^2} \right) = \sigma \sum \alpha_j \phi_j$$

Exemple points source/évaluation



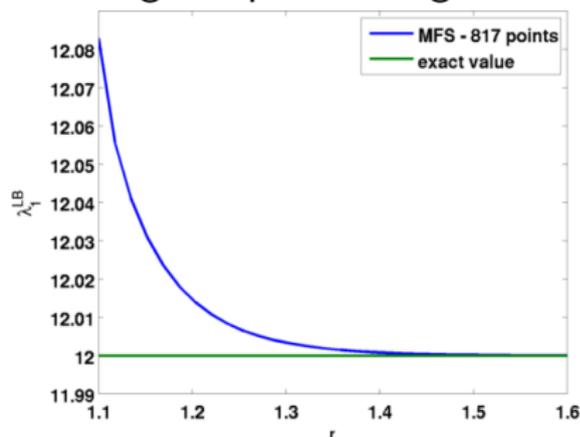
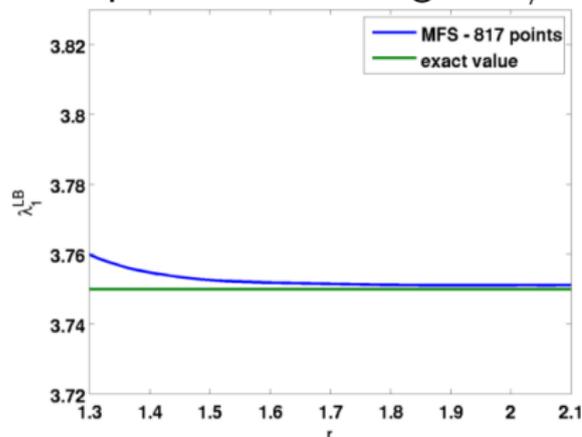
Précision ?

- dépendance de r (distances entre points source et la sphere)



Autres exemples

- coupe verticale d'angle $2\pi/3$ ou triangle triple rectangle

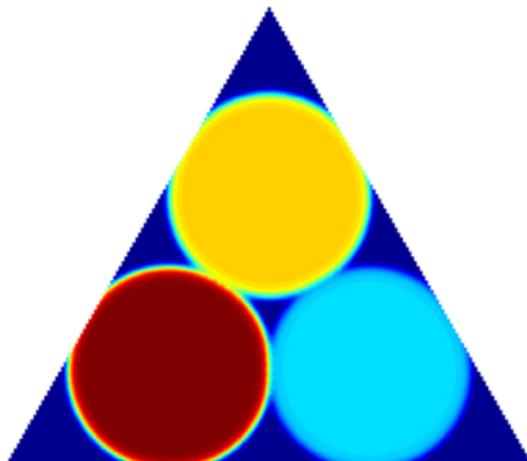
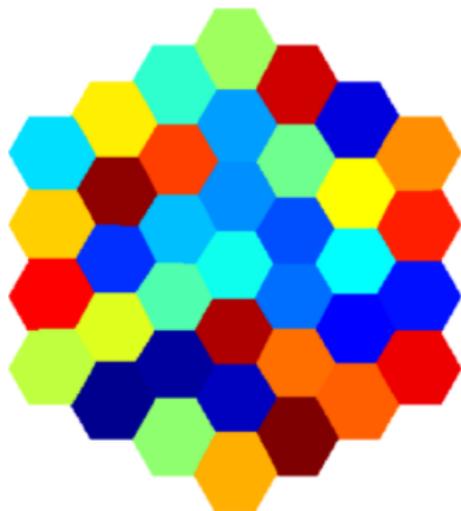


Quoi faire pour des sous-ensembles généraux de la sphère ?

Formulation avec pénalisation

$$-\Delta_{\tau} u + C(1 - \varphi)u = \sigma u \text{ sur } \mathbb{S}^2$$

- Méthode utilisée par Bourdin, Bucur, Oudet pour étudier les partitions spectrales dans le plan :
- B., Velichkov, cas multiphase



Discrétisation

- maillage de la sphere : les points d'évaluation (x_i) ;
- problème discrète :

$$(K + C \text{diag}(1 - \varphi)M)u = \sigma Mu,$$

- K : matrice contenant les termes Beltrami

$$\left(\mathcal{H} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial n^2}\right)(x_i)$$

- M : matrice contenant les valeurs des fonctions fondamentales $\phi_j(x_i)$.
- $\varphi \in [0, 1]^N$: la phase.

Condition + projection

- Condition partition

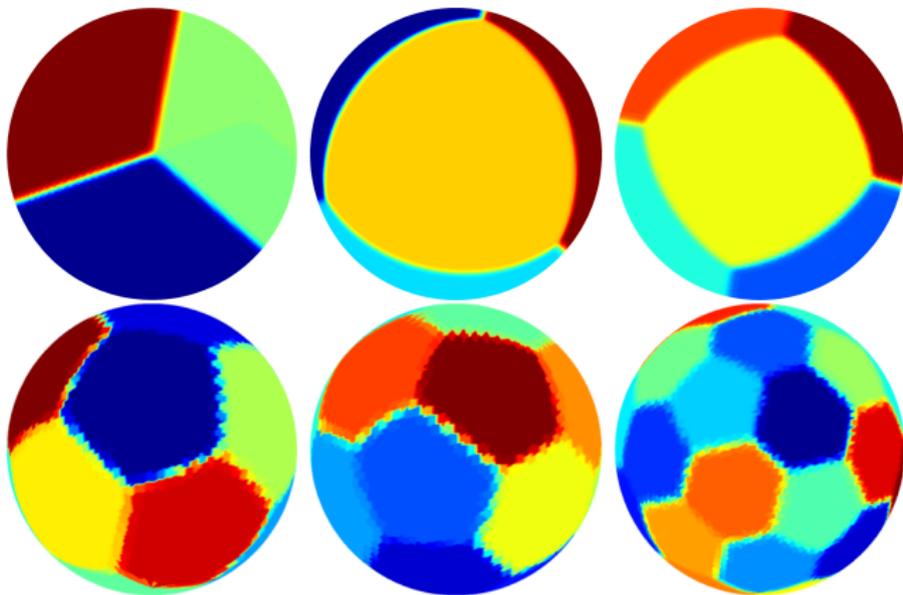
$$\varphi_1 + \dots + \varphi_n = \mathbf{1}.$$

- Projection sur la contrainte

$$\Pi(\varphi)_{i=1}^n = \left(\frac{|\varphi_i|}{\sum_{j=1}^n |\varphi_j|} \right)_{i=1}^n .$$

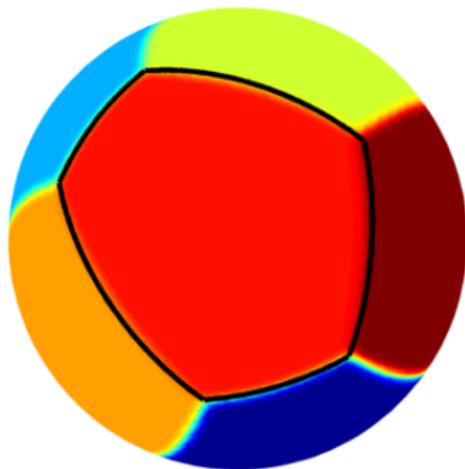
- Elliott, Ranner (2014) : $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 32\}$.
- B. (2015) : $n \in \{3, 4, 5, \dots, 24, 32\}$.
- pour $n \leq 16$ solutions fondamentales ;
- pour $n > 16$ éléments finis ;

Approche - fonctions densité

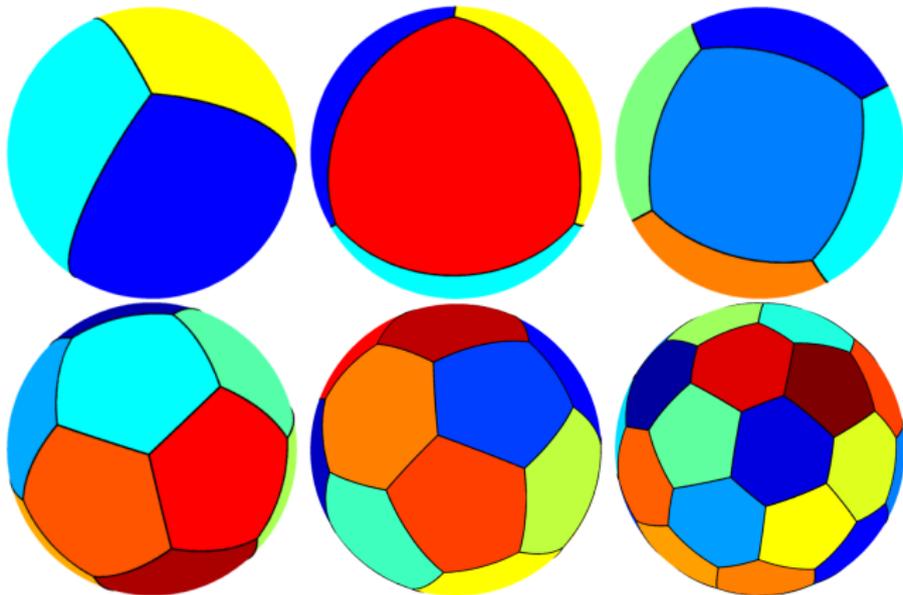


Arcs géodesiques

- Les ensembles qui forment la partitions sont proches des polygones géodésiques



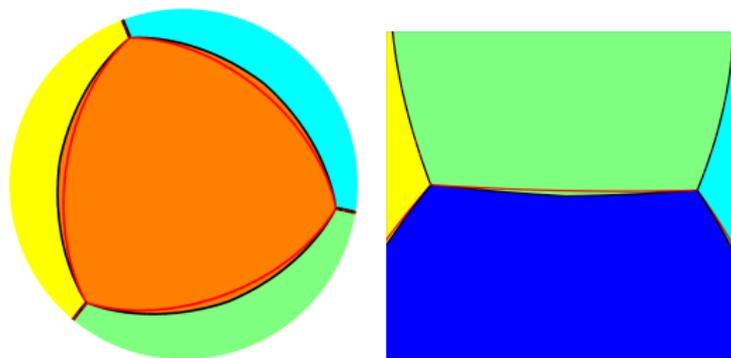
Optimisation - polygones géodésiques



Quelques remarques

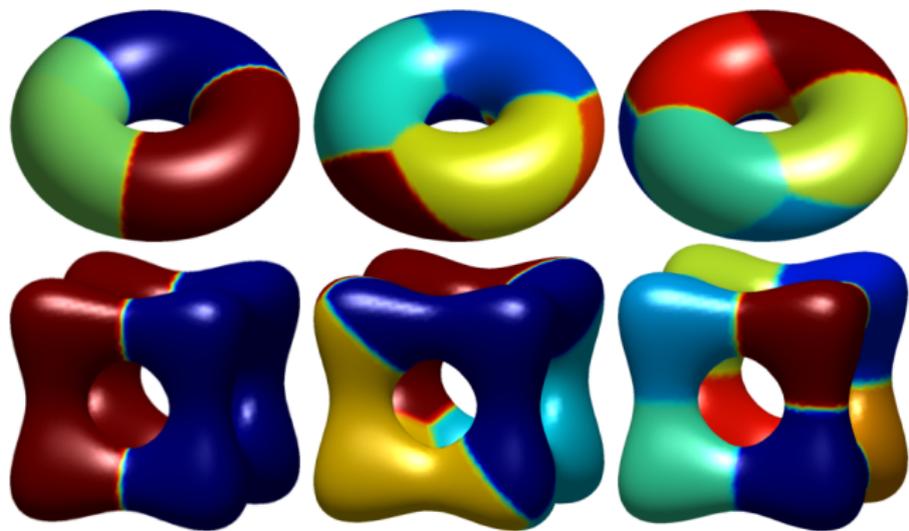
- en général on a les mêmes résultats que Elliott et Ranner ;
- pour $n = 16$ on a 4 hexagones congruents et 12 pentagones congruents (plausible, structure symétrique) ;

La question des géodésiques



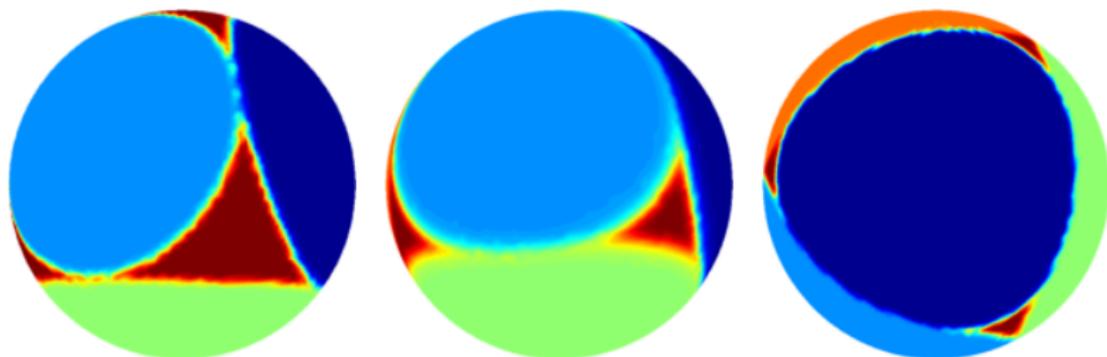
- Oui pour $n \in \{3, 4, 6, 12\}$
- Non pour $n = 11$ et $n \geq 13$ (Gauss-Bonnet)

Autres formes



Variations

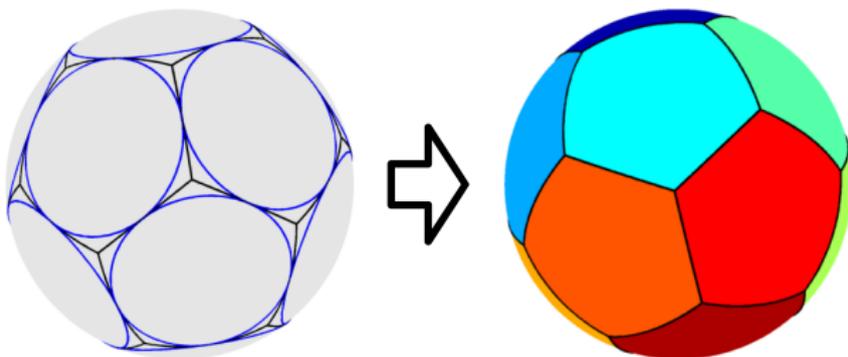
$$\min \sum_{i=1}^n (\lambda_1^{LB}(\Omega_i) + \alpha \text{Aire}(\Omega_i)).$$



- on peut étudier des partitions sur des autres formes

Questions ouvertes

- quels sont les partitions optimales pour $n = 3, 4, 6, 12$?
Conjecture : partition régulière
- peut-on lier le problème de "circle packing" sur la sphere au problème spectral, via le problème multiphase ?



Merci !